УДК 517.444

Ву Ким Туан, д-р физ.-мат. наук,
С. Б. Якубович, канд. физ.-мат. наук (Белорус. ун-т)

Об одном критерии унитарности двустороннего интегрального преобразования

Рассматривается критерий унитарности двустороннего преобразования Ватсона в пространстве $L_2(R)$, позволяющий строить новые примеры интегральных преобразований с симметричными формулами обращения (известны лишь преобразования Фурье и Хартли). Приводятся некоторые новые примеры указанных преобразований, в частности, симметричные преобразования Ханкеля с суммой двух функций Бесселя в ядре, Харди с суммой функций Неймана и Струве и преобразование Нараина с суммой двух G-функций.

Розглядається критерій унітарності двостороннього перетворення Ватсона в просторі $L_2(R)$, що дозволяє будувати нові приклади інтегральних перетворень з симетричними формулами обернення (відомі лише перетворення Фур'є і Хартлі). Наводяться деякі нові приклади вказаних перетворень, зокрема, симетричні перетворення Ханкеля з сумою двох функцій Бесселя в ядрі, Харді з сумою функцій Неймана та Струве і перетворення Нараіна з сумою двох G-функцій.

Известно [1, 2], что интегральное преобразование

$$(K^+f)(x) = g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} k(xy) f(y) \frac{dy}{y} \tag{1}$$

унитарно в пространстве $L_2(0, +\infty)$ и имеет аналогичную формулу обращения вида

$$(K^+g)(x) = f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \overline{k(xy)}\, g(y) \frac{dy}{y} \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда ядро $k(x)$ удовлетворяет следующему функциональному условию:

$$\int_0^{+\infty} k(xu)\overline{k(yu)}\, u^{-2}\, du = \min\{x, y\}, \quad x, y \in (0, \infty). \tag{3}$$

Такое ядро называется ядром Ватсона, а соответствующие преобразования (1), (2) — симметричными преобразованиями Ватсона. Показано, что преобразованиями Ватсона являются косинус- и синус-преобразования Фурье, преобразования Ханкеля [3], Нараина [4], а также многие другие преобразования [5].

В работе [6] преобразования (1), (2) были распространены с полупрямой $(0, \infty)$ на произвольный интервал (a, b) вещественной прямой. Однако несложный анализ показывает, что класс таких преобразований пуст, когда a (или b) конечно и отличается от нуля. Что касается двустороннего преобразования Ватсона (случай $a = -\infty$, $b = +\infty$) [2], то в отличие от одностороннего преобразования Ватсона известны лишь преобразования Фурье [3] и Хартли [7].

В настоящей работе мы приводим другой критерий унитарности двустороннего преобразования Ватсона, позволяющий построить множество новых интересных примеров. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы двустороннее преобразование вида*

$$(Kf)(x) = g(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(xy) f(y) \frac{dy}{y} \tag{4}$$

было унитарно в $L_2(R)$ *и допускало аналогичную формулу обращения*

$$(\bar{K}g)(x) = f(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{k(xy)}\, g(y) \frac{dy}{y}, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы четная и нечетная компоненты функции $2k(x)$ *были ядрами Ватсона, т. е. имело место разложение*

$$k(x) = \frac{1}{2}(k_1(|x|) + \operatorname{sign}(x) k_2(|x|)),\ x \in R, \tag{6}$$

где $k(x)$, $x \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют соотношению* (3).

Доказательство этого утверждения основано на применении теоремы Ватсона [1] к двустороннему преобразованию (4) от четной и нечетной компонент функции $f(x)$.

Пусть четные и нечетные компоненты функций $2k(x)$, $2h(x)$ (обозначим их $k_i(x)$, $h_i(x)$, $x \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$) удовлетворяют следующему соотношению, аналогичному (3):

$$\int\limits_0^{+\infty} k_i(xu) h_i(yu) u^{-2} du = \min\{x, y\},\quad x, y \in (0, \infty),\ i = 1, 2. \tag{7}$$

Тогда преобразования (4) и (5) с заменой $\overline{k(x)}$ на $h(x)$, вообще говоря, не унитарны, но остаются ограниченными в $L_2(R)$ и обращают друг друга.

Пусть теперь $k(x)$ дифференцируема, причем $k'(x) \in L_2(-a, a)$ для всех $0 < a < \infty$. Тогда двусторонние преобразования Ватсона (4), (5) можно записать в виде

$$(Kf)(x) = \lim_{M, N \to +\infty} \int\limits_{-M}^{N} k'(xy) f(y)\, dy, \tag{8}$$

$$(\bar{K}g)(x) = \lim_{M, N \to +\infty} \int\limits_{-M}^{N} \overline{k'(xy)}\, g(y)\, dy, \tag{9}$$

где сходимость понимается в смысле $L_2(R)$. Ядро $k'(x)$ называется ядром Фурье.

Если ядра $k_1'(x)$, $h_1'(x)$, $k_2'(x)$, $h_2'(x)$ таковы, что в пространстве $L_1(R_+)$ имеют место следующие разложения функций в интеграл Фурье (о таких ядрах см. в [3]):

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} h_1'(xt)\, dt \int\limits_0^{\infty} k_1'(yt) f(y)\, dy, \tag{10}$$

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} h_2'(xt)\, dt \int\limits_0^{\infty} k_2'(yt) f(y)\, dy, \tag{11}$$

то легко показать, что в $L_1(R)$ справедливо разложение

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h'(xt)\, dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} k'(yt) f(y)\, dy. \tag{12}$$

В формулах (10)—(12) внутренние интегралы сходятся абсолютно, а внешние понимаются в несобственном смысле ((10), (11)) и в смысле главного значения (12).

Ниже рассмотрим некоторые примеры двусторонних преобразований с ядрами Фурье.

1. Пусть $k_1'(x) = h_1'(x) = (2/\pi)^{1/2}\cos(x)$, $k_2'(x) = -h_2'(x) = (2/\pi)^{1/2} i \sin(x)$. Тогда $k'(x) = \overline{h'(x)} = (2\pi)^{-1/2} e^{ix}$, и мы получаем классическое преобразование Фурье.

2. Ядра $k_1'(x) = h_1'(x) = (2/\pi)^{1/2}\cos(x)$, $k_2'(x) = h_2'(x) = (2/\pi)^{1/2}\sin(x)$ позволяют получить формулу симметричного преобразования Хартли [7]:

$$\begin{Bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{Bmatrix} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(xy) + \sin(xy)) \begin{Bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{Bmatrix} dy. \tag{13}$$

3. Двустороннее симметричное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\begin{Bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |xy|^{1/2} (J_{\nu_1}(|xy|) + \operatorname{sign}(xy) J_{\nu_2}(|xy|)) \begin{Bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{Bmatrix} dy, \tag{14}$$

где J_{ν_i} — функция Бесселя [8], $\operatorname{Re}(\nu_i) > -1$, $i = 1, 2$.

4. Двустороннее симметричное преобразование Харди имеет вид

$$\begin{Bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |xy|^{1/2} (Y_\nu(|xy|) + \operatorname{sign}(xy) H_\nu(|xy|)) \begin{Bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{Bmatrix} dy, \tag{15}$$

где Y_ν, H_ν — функции Неймана и Струве [8], $-1 < \operatorname{Re}(\nu) < 0$.

Следует отметить, что в отличие от преобразований Фурье, Хартли и Ханкеля, преобразование Харди (15) не унитарно в $L_2(R)$, хотя является автоморфизмом в данном пространстве.

5. Приведенные выше ядра Фурье являются частными случаями ядер Нараина [4] с G-функцией Мейера [8] $G_{p,q}^{m,n}\left(x \middle| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix}\right)$. При выполнении условий $p_i + q_i = 2(m_i + n_i)$, $p_i \neq q_i$, $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{p_i} a_j^i - \sum_{j=1}^{q_i} b_j^i\right) = 0$, $\operatorname{Re}(a_j^i) < 1/2$, $j = \overline{1, n_i}$, $\operatorname{Re}(a_j^i) > -1/2$, $j = \overline{n_i + 1, p_i}$; $\operatorname{Re}(b_j^i) > -1/2$, $j = \overline{1, m_i}$; $\operatorname{Re}(b_j^i) < 1/2$, $j = \overline{m_i + 1, q_i}$, $i = 1, 2$, ядра Нараина порождают двустороннее симметричное автоморфное преобразование в $L_2(R)$ вида

$$\begin{Bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_{p_1,q_1}^{m_1,n_1}\left(|xy| \middle| \begin{matrix} (a_{p_1}^1) \\ (b_{q_1}^1) \end{matrix}\right) + \operatorname{sign}(xy)\, G_{p_2,q_2}^{m_2,n_2}\left(|xy| \middle| \begin{matrix} (a_{p_2}^2) \\ (b_{q_2}^2) \end{matrix}\right) \right) \begin{Bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{Bmatrix} dy. \tag{16}$$

В частности, если $p_i = 2n_i$, $q_i = 2m_i$, $m_i \neq n_i$, $a_j^i \in R$, $a_{j+n_i}^i = -a_j^i$, $j = \overline{1, n_i}$, $b_j^i \in R$, $b_{j+m_i}^i = -b_j^i$, $j = \overline{1, m_i}$, $i = 1, 2$, то преобразование (16) является унитарным в $L_2(R)$.

1. *Watson G. N.* General transforms // Proc. London Math. Soc.— 1933 — 35.— P. 159—199.
2. *Prudnikov A. P.* On Watson transforms // Fract. Cals. and Appl. Proc. of the Intern. Conf. of Nihon Univ.— Tokyo, 1990.— P. 185—190.
3. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье.— М.; Л. : Гостехиздат, 1948.— 480 с.
4. *Narain R.* The G-functions as unsymmetrical Fourier kernel. II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1963.— 14, N 1.— P. 18—28.
5. *Ву Ким Туан.* Интегральные преобразования и их композиционная структура: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук.— Минск, 1987.— 275 с.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М; Л. : Гостехиздат, 1947.— 323 с.
7. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. Теория и приложения.— М. : Мир, 1990.— 175 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1965.— Т. 1.— 294 с.; 1966.— Т. 2.— 295 с.

Получено 16.05.91