УДК 513.88+517.927

С. Н. Дементьев, ст. преп.,
Л. П. Яновский, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. с.-х. ин-т)

О разрешимости нелинейных краевых задач Валле Пуссена

Рассматривается разрешимость краевой задачи вида (1), (2) в классе нелинейностей f, для которых традиционные ограничения типа условий Липшица заменены условиями вогнутости (или обобщенной вогнутости) по специально подобранным переменным.

Розглядається розв'язність крайової задачі вигляду (1), (2) в класі нелінійності f, для яких традиційні обмеження типу умов Ліпшіца замінені умовами вгнутості (або узагальненої вгнутості) за спеціально підібраними змінними.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

$$x^{(j-1)}(t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, r_k; \quad \sum_{k=1}^{m} r_k = n;$$
$$a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_m \leqslant b. \tag{2}$$

Валле Пуссен [1] изучал задачу (1), (2) в предположении, что функция $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ удовлетворяет по каждой из переменных x_k равномерному относительно других переменных условию Липшица, на коэффициенты которого налагались некоторые ограничения малости. Эти результаты в дальнейшем уточнялись, развивались и усиливались. А. Ю. Левин [2, 3], Г. А. Безсмертных [4], И. Т. Кигурадзе [5] рассматривали задачу (1), (2) в предположении, что коэффициенты Липшица могут иметь особенности по t. Е. А. Лифшиц и И. Ф. Леженина [6, 7] разработали метод L-положительных операторов, позволивший дополнить полученные ранее результаты. При этом авторы опирались на теорему Красносельского — Лифшица — Покорного — Стеценко, в которой из положительной обратимости операторов сравнения доказывается однозначная разрешимость нелинейного уравнения. Однако ограничения на нелинейность и в этом случае являются ограничениями типа условий Липшица.

В настоящей работе для доказательства однозначной разрешимости задачи (1), (2) применяется теория псевдовогнутых операторов [8], обобщающая на немонотонный случай теорию вогнутых операторов, развитую М. А. Красносельским, его учениками и сотрудниками [9, 10]. При этом существенно используется уже упомянутый метод L-положительных операторов. Все это позволяет отказаться от ограничений типа условий Липшица на нелинейность f и для широкого класса нелинейностей заменить эти условия условиями их вогнутости (или обобщенной вогнутости) по специально организованным переменным.

Отметим, что в терминологии и обозначениях теории конусов будем в дальнейшем следовать монографии [9].

1. Необходимые определения. Пусть E — вещественное банахово пространство с конусом K. Пусть u_0 — фиксированный ненулевой элемент из K. Через $K(u_0)$ обозначим множество элементов $x \in K$, для которых $\alpha(x) u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x) u_0$, где $\alpha, \beta > 0$, а через $E(u_0)$ — совокупность таких $x \in E$, что $-\gamma u_0 \leqslant x \leqslant \gamma u_0$ при некотором $\gamma > 0$. Для $x \in E(u_0)$ введем u_0-норму:

$$\| x \|_{u_0} = \min \{\gamma : -\gamma u_0 \leqslant x \leqslant \gamma u_0\}.$$

Если конус K нормален, то из сходимости по u_0-норме следует сходимость по норме пространства E.

Конусным отрезком $\langle x_0, y_0 \rangle$ называется множество элементов $x \in E$, удовлетворяющих неравенству $x_0 \leqslant x \leqslant y_0$.

Определение 1 [8]. *Нелинейный оператор $T: E \to E$ называется χ-псевдовогнутым, если для любого конусного отрезка $\langle x_0, y_0 \rangle \subset K$ имеем $T \langle x_0, y_0 \rangle \subset K(u_0)$ и существует $\chi \in [0, 1]$ такое, что для любых $x \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$ выполнено включение*

$$T \langle \tau x, \frac{1}{\tau} x \rangle \subset \langle \tau^{\chi} T x, \frac{1}{\tau^{\chi}} T x \rangle. \tag{3}$$

Теорема A ([8], теорема 5). *Пусть оператор T χ-псевдовогнут. Тогда T имеет единственную неподвижную точку x^*, к которой сходятся по u_0-норме последовательные итерации $T^n x$ при любом $x \in K$, $x \neq \Theta$.*

2. Разрешимость абстрактной краевой задачи. Пусть линейный, взаимно однозначный и ограниченный оператор L действует из банахова пространства E в банахово пространство Y с конусом K_Y. Рассмотрим множество K_L элементов x из E, для которых $Lx \in K_Y$. Очевидно, множество K_L является конусом. Если конус K_Y нормальный и воспроизводящий, то конус K_L тоже нормальный и воспроизводящий.

Определение 2. *Линейный оператор $A: E \to Y$ называется L-положительным, если $A(K_L) \subset K_Y$.*

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$Lx = f(L_1 x, \ldots, L_k x). \tag{4}$$

Будем предполагать, что операторы $L_1, L_2, \ldots, L_k$ являются L-положительными операторами.

Теорема 1. *Пусть оператор L имеет на Y ограниченный обратный оператор L^{-1}. Пусть нелинейный оператор f действует из k-кратного прямого произведения $K_Y \times K_Y \times \ldots \times K_Y$ в K_Y. Пусть, кроме того, существует элемент $u_0 \in K_L$ такой, что для любого $x \in K_L$ найдутся константы $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$, для которых*

$$\alpha(x) L u_0 \overset{(K_Y)}{\leqslant} f(L_1 x, \ldots, L_k x) \overset{(K_Y)}{\leqslant} \beta(x) L u_0. \tag{5}$$

Пусть, наконец, существует $\chi \in (0, 1)$ такое, что для любых $v_i \in K_Y$, $v_i \neq \Theta$, $\tau \in (0, 1)$ и $y_i: \tau v_i \overset{(K_Y)}{\leqslant} y_i \overset{(K_Y)}{\leqslant} \frac{1}{\tau} v_i$ выполнены неравенства

$$\tau^{\chi} f(v_1, \ldots, v_k) \overset{(K_Y)}{\leqslant} f(y_1, \ldots, y_k) \overset{(K_Y)}{\leqslant} \frac{1}{\tau^{\chi}} f(v_1, \ldots, v_k). \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) имеет в E единственное решение, к которому при любом начальном значении $x_0 \in K_L$ сходятся по u_0-норме последовательные итерации $\{x_n\}$, удовлетворяющие уравнению

$$L x_{n+1} = f(L_1 x_n, \ldots, L_k x_n). \tag{7}$$

Доказательство. Определим оператор $T: E \to E$ формулой

$$Tx = L^{-1} f(L_1 x, \ldots, L_k x). \tag{8}$$

Из линейности и положительности оператора L^{-1}, как оператора из Y в E, вытекает его монотонность. Поэтому из оценки (5) следует включение $Tx \in K(u_0)$, $x \in K_L$. Далее из монотонности L-положительных операторов $L_1, L_2, \ldots, L_k$ для любого $y \in \langle \tau x, \frac{1}{\tau} x \rangle$, $x \in K_L$ имеем серию неравенств

$$\tau L_i x \overset{(K_Y)}{\leqslant} L_i y \overset{(K_Y)}{\leqslant} \frac{1}{\tau} L_i x, \ i = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Из неравенств (9) и оценки (6) получаем, что для любых $\tau \in (0, 1)$ и $y \in \langle \tau x, \frac{1}{\tau} x \rangle$, $x \in K_L$ существует $\chi \in (0, 1)$ такое, что

$$\tau^{\chi} f(L_1 x, \ldots, L_k x) \overset{(K_Y)}{\leqslant} f(L_1 y, \ldots, L_k y) \overset{(K_Y)}{\leqslant} \frac{1}{\tau^{\chi}} f(L_1 x, \ldots, L_k x).$$

Из последнего неравенства, определения конуса K_L и ограниченности оператора L^{-1} следует соотношение

$$\tau^{\chi} L^{-1} f(L_1 x, \ldots, L_k x) \overset{(K_L)}{\leqslant} L^{-1} f(L_1 y, \ldots, L_k y) \overset{(K_L)}{\leqslant} \frac{1}{\tau^{\chi}} L^{-1} f(L_1 x, \ldots, L_k x),$$

поэтому для оператора T выполнена оценка (3) в K_L. Для завершения доказательства остается применить теорему A.

3. Разрешимость краевой задачи Валле Пуссена. Рассмотрим оператор n-кратного дифференцирования

$$Lx(t) = x^{(n)}(t) \tag{10}$$

с краевыми условиями (2), действующий из банахова пространства $C_0^n [a, b]$ n раз непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (2), в пространство непрерывных функций $C [a, b]$.

Пусть K_Y — конус неотрицательных функций из $C [a, b]$. Как показано в [6, 7], операторы из $C_0^n [a, b]$ в $C [a, b]$ вида

$$x_j(t) = L_{ip} x(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{(t - t_i)^p} \right)^{n-p}, & t \neq t_i, \\ x^{(n)}(t), & t = t_i \end{cases} \tag{11}$$

$$i = 1, \ldots, m; \; p = 1, \ldots, r_i, \; \sum_{i=1}^{m} r_i = n,$$

$j = \sum_{s=1}^{i-1} r_s + p$ при $i \geqslant 2$, $j = p$ при $i = 1$ и их линейные **комбинации с** неотрицательными коэффициентами являются L-положительными операторами. Там же доказано, что любой дифференциальный оператор $(n-1)$ порядка

$$Bx(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t) x^{(k)}(t)$$

допускает представление в виде линейной комбинации операторов вида (11). Разумеется, коэффициенты представления не обязаны быть неотрицательными.

Рассмотрим нелинейную задачу (1), (2). В силу изложенного правую часть уравнения можно преобразовать к виду

$$f(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) = \varphi\left(t, \left(\frac{x(t)}{(t - t_1)}\right)^{(n-1)}, \ldots, \left(\frac{x(t)}{(t - t_1)^{r_1}}\right)^{(n-r_1)}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \left(\frac{x(t)}{(t - t_m)^{r_m}}\right)^{(n-r_m)}\right) = \varphi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) =$$
$$= \varphi(t, L_{11} x(t), \ldots, L_{1r_1} x(t), \ldots, L_{mr_m} x(t)). \tag{12}$$

Далее, известно, что однородное уравнение $Lx = 0$ не имеет ненулевых решений на отрезке $[a, b]$, поэтому существует ограниченный оператор L^{-1}, действующий из $C [a, b]$ в $C_0^n [a, b]$.

Обозначим через K_L конус таких функций $x(t)$ из $C_0^n[a, b]$, что $x^{(n)}(t) \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть существует функция $u_0(t) \in K_L$ такая, что для любого $x \in K_L$, $x \neq 0$ найдутся константы $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$, для которых*

$$\alpha(x) u_0^{(n)}(t) \leqslant \varphi(t, \ldots) \leqslant \beta(x) u_0^{(n)}(t), \tag{13}$$

а функция $\varphi(t, \ldots)$ задана формулой (12).

Далее, пусть существует такое $\chi \in (0, 1)$, что для любых $t \in [a, b]$, $v_i > 0$, $\tau \in (0, 1)$ и y_i: $\tau v_i \leqslant y_i \leqslant \frac{1}{\tau} v_i$ выполнено неравенство

$$\tau^{\chi} \varphi(t, v_1, \ldots, v_n) \leqslant \varphi(t, y_1, \ldots, y_n) \leqslant \frac{1}{\tau^{\chi}} \varphi(t, v_1, \ldots, v_n). \tag{14}$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение $x^*(t)$, к которому сходятся по норме $C_0^n[a, b]$ последовательные итерации x_k, являющиеся решениями линейных уравнений*

$$x_{k+1}^{(n)}(t) = f(t, x_k(t), \ldots, x_k^{(n-1)}(t))$$

с краевыми условиями (2) *при любом начальном значении $x_0 \in K_L$.*

Обсудим условия теоремы 2. Пусть, например, $u_0(t) = t^n$. Тогда оценка (13) означает положительность при $x \neq 0$ и локальную ограниченность функции φ. Условие (14) означает обобщенную вогнутость функции φ. В частности, если φ монотонно возрастает, то (14) означает вогнутость функции φ.

Отметим, что на практике наибольшие технические трудности вызывает не проверка условий (13), (14), а преобразование функции f в функцию φ.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1. В самом деле, конус неотрицательных функций нормален в $C[a, b]$; о существовании ограниченного оператора L^{-1} говорилось выше; выполнение условия (5) гарантируется условием (13) и способом построения функции φ; оценка (6) следует из оценки (14), что и требовалось.

1. *Vallee-Poussin de la Ch. J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second order. Determination d'une equation d'order *n* // J. Math. Pures et Appl.— 1929.— N 8.— P. 125—144.
2. *Левин А. Ю.* Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР.— 1964.— **159**, № 1.— С. 13—16.
3. *Левин А. Ю.* Оценка функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных // Мат. сб.— 1964.— **64**, № 3.— С. 396—409.
4. *Безсмертных Г. А.* О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле-Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1970.— **8**, № 2.— С. 298—310.
5. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975.— 352 с.
6. *Лифшиц Е. А., Леженина И. Ф.* L-положительные операторы.— Воронеж, 1979.— 16 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2300-79.
7. *Леженина И. Ф., Лифшиц Е. А.* Теорема о существовании решения многоточечной краевой задачи // Приближенные методы исслед. дифференц. уравнений и их прил.— Куйбышев, 1982.— С. 109—116.
8. *Яновский Л. П.* Монотонные итерационные процессы для операторных уравнений с псевдовогнутыми операторами // Сиб. мат. журн.— 1984.— **25**, № 4.— С. 214—219.
9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М.: Физматгиз, 1962.— 386 с.
10. *Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* К теории уравнений с вогнутыми операторами // Сиб. мат. журн.— 1969.— **10**, № 3.— С. 565—572.

Получено 26.03.90