УДК 517.9

Г. А. Курина, канд. физ.-мат. наук
(Воронеж. лесотехн. ин-т)

О расщеплении двухточечной краевой задачи, возникающей в теории оптимального управления

В гильбертовом пространстве рассматривается двухточечная краевая задача, возникающая при минимизации линейно-квадратичного функционала на траекториях линейного уравнения с обратимым при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператором $A + \varepsilon B$ при производной, где оператор A фредгольмов, а все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину. Доказывается, что можно произвести асимптотическое расщепление рассматриваемой задачи на регулярно возмущенную краевую задачу и две сингулярно возмущенные задачи Коши.

В гільбертовому просторі розглядається двоточкова крайова задача, що виникає при мінімізації лінійно-квадратичного функціоналу на траєкторіях лінійного рівняння з оберненим при досить малих $\varepsilon > 0$ оператором $A + \varepsilon B$ при похідній, де оператор A фредгольмів, а всі B-жорданові ланцюжки оператора A мають однакову довжину. Доводиться, що можна виконати асимптотичне розщеплення розглядуваної задачі на регулярно збурену крайову задачу та дві сингулярно збурені задачі Коші.

Используя условия оптимальности управления, при исследовании задачи минимизации функционала

$$J = g(x(T)) + \frac{1}{2}\int_0^T (x'(t)\,W(t)\,x(t) + u'(t)\,R(t)\,u(t))\,dt$$

на траекториях матрично сингулярно возмущенного уравнения

$$(A + \varepsilon B)\,\dot{x}(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t), \quad x(0) = x_0,$$

получаем систему вида

$$\begin{gathered}(A + \varepsilon B)\,\dot{x}(t) = C(t)\,x(t) + S(t)\,y(t),\\ (A' + \varepsilon B')\,\dot{y}(t) = W(t)\,x(t) - C'(t)\,y(t), \quad S(t) = D(t)\,R^{-1}(t)\,D'(t),\end{gathered} \tag{1}$$

с условиями

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$(A' + \varepsilon B')\,y(T) = -\,d \ \text{ при } \ g(x) = d'x \tag{3}$$

или

$$(A' + \varepsilon B')\,y(T) = -\,Fx(T) \ \text{ при } \ g(x) = \frac{1}{2}\,x'Fx. \tag{4}$$

Здесь штрих обозначает транспонирование.

Рассмотрим задачи (1)—(3) и (1), (2), (4) в случае, когда $x(t)$, $y(t)$, d — элементы гильбертова пространства H, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, все операторы, входящие в (1)—(4), принадлежат $L(H)$ — пространству линейных ограниченных операторов, действующих в H, и бесконечно дифференцируемы по t, операторы $S(t)$, $W(t)$, F являются симметрическими неотрицательно определенными, штрих обозначает сопряженный оператор.

Предположим, что оператор A вырожден, а $A + \varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, причем все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p. Для полноты изложения приведем определение B-жордановой цепочки оператора A (см., например, [1]): *элемент* $\varphi_1 \in \operatorname{Ker} A$ *имеет* B-*жорданову цепочку* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ *длины* p, *если* $A\varphi_k = B\varphi_{k-1}$, $k = \overline{2, p}$, *а уравнение* $A\varphi = B\varphi_p$ *не разрешимо*.

Будем считать, что A — фредгольмов оператор, и используем разложение пространства H в ортогональные суммы

$$H = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A' = \operatorname{Ker} A' \oplus \operatorname{Im} A.$$

Через P обозначим ортогональный проектор пространства H на $\operatorname{Ker} A$, через Q — ортогональный проектор пространства H на $\operatorname{Ker} A'$. Далее используем симметричность ортогональных проекторов. Предположим также, что точки спектра оператора

$$\begin{pmatrix} QC(t)P & QS(t)Q \\ PW(t)P & -PC'(t)Q \end{pmatrix} : \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker} A' \to \operatorname{Ker} A' \oplus \operatorname{Ker} A$$

не находятся на мнимой оси при всех $t \in [0, T]$.

Докажем, что возможно произвести асимптотическое расщепление задач (1)—(3) и (1), (2), (4) на регулярно возмущенную двухточечную краевую задачу и две сингулярно возмущенные задачи Коши. При $A + \varepsilon B = \operatorname{diag}(I, \varepsilon I)$, где I — единичный оператор, такое расщепление задачи (1), (2), (4) в конечномерном случае произведено В. А. Соболевым [2].

Очевидно, что любой оператор $M(t) \in L(H)$ можно представить в виде суммы операторов

$$M(t) = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t) + M_4(t),$$

где $M_1(t) = QM(t)P$, $M_2(t) = QM(t)(I - P)$, $M_3(t) = (I - Q)M(t)P$, $M_4(t) = (I - Q)M(t)(I - P)$. (Последними обозначениями для операторов будем пользоваться в дальнейшем изложении, не оговаривая это особо.)

Применим слева к первому уравнению в (1) сначала оператор $I - Q$, затем Q, а ко второму уравнению в (1) сначала оператор $I - P$, затем P. Учитывая обратимость при достаточно малых ε операторов $I + \varepsilon\widetilde{A}^{-1}B_4$ и $I + \varepsilon(\widetilde{A}^{-1})'B_4'$, где $\widetilde{A}^{-1}$ обозначает обратный к оператору $(I - Q) \times A(I - P) : \operatorname{Im} A' \to \operatorname{Im} A$, получаем систему

$$(I - P)\dot{x} = -\varepsilon(I + \varepsilon\widetilde{A}^{-1}B_4)^{-1}\widetilde{A}^{-1}B_3P\dot{x} + \widetilde{A}^{-1}(C_3Px + (I - Q)SQy + C_4(I - P)x + (I - Q)S(I - Q)y) + \varepsilon(E_1x + E_2y), \quad (5)$$

$$\varepsilon(B_1P\dot{x} + B_2(I - P)\dot{x}) = C_1Px + QSQy + C_2(I - P)x + QS(I - Q)y, \quad (6)$$

$$(I - Q)\dot{y} = -\varepsilon(I + \varepsilon(\widetilde{A}^{-1})'B_4')^{-1}(\widetilde{A}^{-1})'B_2'Q\dot{y} + (\widetilde{A}^{-1})'((I - P)WPx - C_2'Qy + (I - P)W(I - P)x - C_4'(I - Q)y) + \varepsilon(E_1x + E_2y), \quad (7)$$

$$\varepsilon(B_1'Q\dot{y} + B_3'(I - Q)\dot{y}) = PWPx - C_1'Qy + PW(I - P)x - C_3'(I - Q)y. \quad (8)$$

Аргумент t для краткости опустим, а через $E_1 = E_1(t, \varepsilon)$, $E_2 = E_2(t, \varepsilon)$ обозначим известные операторы из $L(H)$, имеющие разложения в ряд по неотрицательным степеням ε.

Подставляя выражения для $(I - P)\dot{x}$, $(I - Q)\dot{y}$ в соотношения (6), (8) соответственно, получаем

$$\varepsilon(B_1 - \varepsilon B_2(I + \varepsilon\widetilde{A}^{-1}B_4)^{-1}\widetilde{A}^{-1}B_3)P\dot{x} = C_1Px + QSQy + C_2(I - P)x + QS(I - Q)y + \varepsilon(E_1x + E_2y), \quad (9)$$

$$\varepsilon(B_1' - \varepsilon B_3'(I + \varepsilon(\widetilde{A}^{-1})'B_4')^{-1}(\widetilde{A}^{-1})'B_2')Q\dot{y} = PWPx - C_1'Qy + PW(I - P)x - C_3'(I - Q)y + \varepsilon(E_1x + E_2y). \quad (10)$$

Оценим операторы, стоящие при производных. Учитывая, что все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p, имеем

$$B_1 - \varepsilon B_2(I + \varepsilon\widetilde{A}^{-1}B_4)^{-1}\widetilde{A}^{-1}B_3 = (-1)^{p-1}\varepsilon^{p-1}(A_p + O(\varepsilon)),$$

$$B_1' - \varepsilon B_3'(I + \varepsilon(\widetilde{A}^{-1})'B_4')^{-1}(\widetilde{A}^{-1})'B_2' = (-1)^{p-1}\varepsilon^{p-1}(A_p' + O(\varepsilon)),$$

где $A_p = QB((I-P)\tilde{A}^{-1}(I-Q)B)^{p-1}P : \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Ker} A'$ — обратимый оператор, причем $A_p^{-1} \in L(H)$. Теперь уравнения (9), (10) можно представить в виде

$$\varepsilon^p P\dot{x} = (-1)^{p-1} A_p^{-1}(C_1 Px + QSQy + C_2(I-P)x + QS(I-Q)y) + \\ + \varepsilon(E_1 x + E_2 y), \tag{11}$$

$$\varepsilon^p Q\dot{y} = (-1)^{p-1}(A_p')^{-1}(PWPx - C_1' Qy + PW(I-P)x - C_3'(I-Q)y) + \\ + \varepsilon(E_1 x + E_2 y). \tag{12}$$

Уравнения (5), (7), (11) и (12) запишем в виде системы

$$\dot{z}_1 = \varepsilon G_1(\varepsilon)\dot{z}_2 + G_2(t,\varepsilon)z_1 + G_3(t,\varepsilon)z_2,$$

$$\varepsilon^p \dot{z}_2 = G_4(t,\varepsilon)z_1 + G_5(t,\varepsilon)z_2,$$

где $z_1 = \begin{pmatrix}(I-P)x \\ (I-Q)y\end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix}Px \\ Qy\end{pmatrix}$, а выражения для коэффициентов G_i несложно выписать.

Следуя [2], введем новые переменные u, v следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= z_1 + \varepsilon U(t,\varepsilon)v, \\ v &= z_2 + V(t,\varepsilon)z_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Операторы $U(t, \varepsilon)$, $V(t, \varepsilon) \in L(H)$ подберем так, чтобы уравнения для переменных u, v были разделены. Приравнивая нулю коэффициент при u в уравнении для v, получаем уравнение для определения $V = V(t, \varepsilon)$:

$$(I + \varepsilon VG_1)(G_4 - G_5 V) + \varepsilon^p(\dot{V} + V(G_2 - G_3 V)) = 0. \tag{14}$$

Приравнивая нулю коэффициент при v в уравнении для $\varepsilon^{p-1}u$, получаем уравнение для определения $U = U(t, \varepsilon)$:

$$G_1(-\varepsilon G_4 U + G_5(I + \varepsilon FU)) - \varepsilon^p G_2 U + \varepsilon^p G_3 VU + \varepsilon^{p-1}G_3 + \\ + \varepsilon^p \dot{U} + U(G_5 + \varepsilon VG_1G_5 + \varepsilon^p VG_3) = 0. \tag{15}$$

Тогда для u, v имеем уравнения

$$\varepsilon^{p-1}\dot{u} = (G_1(G_4 - G_5 V) + \varepsilon^{p-1}(G_2 - G_3 V))u, \tag{16}$$

$$\varepsilon^p \dot{v} = (G_5 + \varepsilon VG_1G_5 + \varepsilon^p VG_3)v. \tag{17}$$

Решения уравнений (14), (15) можно найти в виде ряда по целым неотрицательным степеням ε, так как оператор

$$G_5(t,0) = (-1)^{p-1}\begin{pmatrix}A_p^{-1} & 0 \\ 0 & (A_p')^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 & QSQ \\ PWP & -C_1'\end{pmatrix}$$

в силу предположения обратим.

Из уравнения (14) следует, что разложение $G_4 - G_5 V$ по степеням ε начнется с ε^p. Поэтому уравнение (16) можно разделить на ε^{p-1} и для переменной u получим регулярно возмущенное уравнение

$$\dot{u} = \tilde{G}u, \tag{18}$$

а для v — сингулярно возмущенное уравнение (17).

Перепишем уравнение (17) для $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ в виде

$$\varepsilon^p \dot{v}_1 = D_1 v_1 + D_2 v_2,$$

$$\varepsilon^p \dot{v}_2 = D_3 v_1 + D_4 v_2,$$

где

$$D_1 = (-1)^{p-1} A_p^{-1} C_1 + O(\varepsilon), \quad D_2 = (-1)^{p-1} A_p^{-1} QSQ + O(\varepsilon),$$

$$D_3 = (-1)^{p-1} (A_p')^{-1} PWP + O(\varepsilon), \quad D_4 = -(-1)^{p-1} (A_p')^{-1} C_1' + O(\varepsilon).$$

Расщепим последнюю систему на два независимых уравнения

$$\varepsilon^p \dot{v}_3 = K v_3, \tag{19}$$

$$\varepsilon^p \dot{v}_4 = N v_4, \tag{20}$$

где

$$v_3 = v_1 + L v_4, \quad v_4 = v_2 + M v_1, \quad K = D_1 - D_2 M, \quad N = D_4 + M D_2, \tag{21}$$

а операторы L, M удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon^p \dot{L} + L (D_4 + M D_2) - (D_1 - D_2 M) L + D_2 = 0,$$

$$\varepsilon^p \dot{M} + M (D_1 - D_2 M) - D_4 M + D_3 = 0.$$

Решения последних уравнений будем искать в виде разложения по целым неотрицательным степеням ε:

$$M = M(t, \varepsilon) = M_0(t) + \varepsilon M_1(t) + \dots, L = L(t, \varepsilon) = L_0(t) + \varepsilon L_1(t) + \dots .$$

Для определения M_0 получаем алгебраическое уравнение Риккати

$$A_p' M_0 A_p^{-1} C_1 + C_1' M_0 - A_p' M_0 A_p^{-1} QSQ M_0 + PWP = 0.$$

Выполняя замену $\widetilde{M} = (-1)^{p-1} A_p' M_0$, для $\widetilde{M}$ находим стандартное алгебраическое уравнение Риккати, рассматриваемое в теории оптимального управления:

$$\widetilde{M} (-1)^{p-1} A_p^{-1} C_1 + ((-1)^{p-1} A_p^{-1} C_1)' \widetilde{M} - \widetilde{M} A_p^{-1} QSQ (A_p')^{-1} \widetilde{M} + PWP = 0.$$

Предположим, что это уравнение при всех $t \in [0, T]$ имеет единственное симметрическое положительно определенное решение, и при этом оператор

$$A_p^{-1} ((-1)^{p-1} C_1 - QSQ (A_p')^{-1} \widetilde{M}) \tag{22}$$

устойчивый, т. е. его спектр расположен внутри левой полуплоскости. Например, для этого достаточно предположить, что при всех $t \in [0, T]$ оператор $PW(t) P$ положительно определен на $\operatorname{Ker} A$, а пара $(A_p^{-1} C_1(t), A_p^{-1} QD(t))$ полностью управляема [3].

Докажем, что спектры операторов $T_1 T_2$ и $T_2 T_1$, где $T_1, T_2, T_2^{-1} \in L(H)$, совпадают. Сначала докажем, что совпадают их резольвентные множества $\rho(T_1 T_2)$ и $\rho(T_2 T_1)$. Возьмем $\lambda \in \rho(T_1 T_2)$, следовательно, $(T_1 T_2 - \lambda I)^{-1} \in L(H)$. Из тождества $T_2 T_1 - \lambda I = T_2 (T_1 T_2 - \lambda I) T_2^{-1}$ получаем $(T_2 T_1 - \lambda I)^{-1} \in L(H)$. Действительно, $(T_2 T_1 - \lambda I)^{-1} = T_2 (T_1 T_2 - \lambda I)^{-1} T_2^{-1}$. Значит, $\lambda \in \rho(T_2 T_1)$. Доказательство обратного включения аналогично и следует из тождества $T_1 T_2 - \lambda I = T_2^{-1} (T_2 T_1 - \lambda I) T_2$. Из совпадения резольвентных множеств вытекает совпадение спектров операторов $T_1 T_2$ и $T_2 T_1$, т. е. $\sigma(T_1 T_2) = \sigma(T_2 T_1)$.

Учитывая последнее утверждение и связь между спектрами оператора и его сопряженного, из устойчивости оператора (22) находим, что оператор

$$(A_p')^{-1} ((-1)^{p-1} C_1 - QSQ (A_p')^{-1} \widetilde{M})' \tag{23}$$

также устойчивый.

Для определения M_i, $i \geqslant 1$, получаем линейные уравнения вида

$$M_i A_p^{-1}((-1)^{p-1}C_1 - QSQ(A'_p)^{-1}\widetilde{M}) + (A'_p)^{-1}((-1)^{p-1}C_1 -$$
$$- QSQ(A'_p)^{-1}\widetilde{M})' M_i = f_i,$$

где f_i — известные функции. В силу устойчивости операторов (22), (23) последнее уравнение имеет единственное решение [4].

Для определения L_i, $i \geqslant 0$, получаем уравнения вида

$$L_i (A'_p)^{-1}((-1)^{p-1}C_1 - QSQ(A'_p)^{-1}\widetilde{M})' + A_p^{-1}((-1)^{p-1}C_1 -$$
$$- QSQ(A'_p)^{-1}\widetilde{M}) L_i = g_i,$$

где g_i — известные функции. В силу устойчивости операторов (22), (23) последнее уравнение также однозначно разрешимо.

Из выражений для K, N и устойчивости операторов (22), (23) следует, что K, $-N$ — устойчивые операторы при достаточно малых ε. Поэтому для решений уравнений (19), (20) при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ справедливы оценки [4]

$$\| v_3(T) \| \leqslant k_1 \exp(-\nu_1 T/\varepsilon^p) \| v_3(0) \|, \quad \| v_4(0) \| \leqslant k_2 \exp(-\nu_2 T/\varepsilon^p) \| v_4(T) \|, \tag{24}$$

где ν_i, $k_i > 0$, $i = 1, 2$.

Теперь с помощью проведенных преобразований расщепим краевые условия. Если разность двух функций $g_1 - g_2$ при $\varepsilon \to 0$ убывает быстрее любой степени ε, то это будем обозначать так: $g_1 \simeq g_2$. В частности, из (24) получаем

$$v_3(T) \simeq 0, \quad v_4(0) \simeq 0. \tag{25}$$

Из соотношений (21), (13) имеем

$$(I - P)x = u_1 - \varepsilon(W_{11}v_3 + W_{12}v_4), \tag{26}$$

$$(I - Q)y = u_2 - \varepsilon(W_{21}v_3 + W_{22}v_4), \tag{27}$$

$$Px = S_{11}v_3 + S_{12}v_4 - V_{11}u_1 - V_{12}u_2, \tag{28}$$

$$Qy = S_{21}v_3 + S_{22}v_4 - V_{21}u_1 - V_{22}v_2, \tag{29}$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} I & -L \\ -M & I + ML \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = (I + \varepsilon VU) \begin{pmatrix} I & -L \\ -M & I + ML \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу (2), (25) из равенств (26), (28) находим

$$(I - P)x_0 \simeq u_1(0) - \varepsilon W_{11}(0, \varepsilon) v_3(0), \tag{30}$$

$$Px_0 \simeq S_{11}(0, \varepsilon) v_3(0) - V_{11}(0, \varepsilon) u_1(0) - V_{12}(0, \varepsilon) u_2(0).$$

При достаточно малых ε оператор $S_{11}(0, \varepsilon)$ обратим, поэтому из последнего равенства можно найти

$$v_3(0) \simeq S_{11}^{-1}(0, \varepsilon)(Px_0 + V_{11}(0, \varepsilon) u_1(0) + V_{12}(0, \varepsilon) u_2(0)).$$

Подставляя это выражение в (30), получаем равенство, связывающее значения $u_1(0)$ и $u_2(0)$.

Если задано условие (3), то значение $y(T)$ известно. Из (27), (29) при $t = T$ с учетом (25) имеем

$$(I - Q)y(T) \simeq u_2(T) - \varepsilon W_{22}(T, \varepsilon) v_4(T),$$

$$Qy(T) \simeq S_{22}(T, \varepsilon) v_4(T) - V_{21}(T, \varepsilon) u_1(T) - V_{22}(T, \varepsilon) u_2(T).$$

Если обратим один из операторов $W_{22}(T, \varepsilon)$ или $S_{22}(T, \varepsilon)$, то из последней системы $v_4(T)$ однозначно выражается через $u_1(T)$, $u_2(T)$ и находится равенство, связывающее значения $u_1(T)$ и $u_2(T)$. Например, $v_4(T) \simeq \simeq S_{22}^{-1}(T, \varepsilon)(Qy(T) + V_{21}(T, \varepsilon)u_1(T) + V_{22}(T, \varepsilon)u_2(T))$, $(I - \varepsilon W_{22}(T, \varepsilon) \times \times S_{22}^{-1}(T, \varepsilon)V_{22}(T, \varepsilon))u_2(T) \simeq (I - Q)y(T) + \varepsilon W_{22}(T, \varepsilon)S_{22}^{-1}(T, \varepsilon)(Qy(T) + + V_{21}(T, \varepsilon)u_1(T))$. Из последней формулы видно, что если $Qy(T)$ зависит мероморфно от ε, то значение $u_2(T)$ в 0-м приближении в общем случае не равно $(I - Q)y(T)$, т. е. может появиться так называемый скачок [5] в функционале у предельной (при $\varepsilon \to 0$) задачи минимизации функционала J.

Рассмотрим задачу (1), (2), (4). В равенство (4) при $t = T$ подставляем выражения (26)—(29), учитывая (25). Если применить к этому равенству слева оператор P, то получим асимптотическое равенство, из которого однозначно определяется $v_4(T)$ через $u_1(T)$, $u_2(T)$ при условии обратимости при $t = T$ оператора $\varepsilon PB'QS_{22} - \varepsilon PB'(I - Q)W_{22} + PFPS_{12} - - \varepsilon PF(I - P)W_{12}$. Применив слева к этому же равенству оператор $I - P$ и воспользовавшись полученным выражением для $v_4(T)$, будем иметь асимптотическое равенство, связывающее значения $u_1(T)$ и $u_2(T)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Матрично сингулярно возмущенные двухточечные краевые задачи* (1)—(3) *и* (1), (2), (4) *можно расщепить асимптотическим образом на регулярно возмущенную двухточечную краевую задачу для* u *и две сингулярно возмущенные задачи Коши для* v_3, v_4.

В конечномерном случае рассматриваемая задача докладывалась на 6-й Всесоюзной конференции по управлению в механических системах [6].

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
2. *Sobolev V. A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. and Contr. Lett.— 1984.— 5, N 3.— P. 169—179.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления.— М. : Наука, 1972.— 576 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
5. *Дмитриев М. Г., Есипова В. А., Чуев В. И.* Предельный переход в одной сингулярно возмущенной задаче оптимального управления // Дифференц. уравнения и их прил.— 1973.—Вып. 2.— С. 40—45.
6. *Курина Г. А.* Декомпозиция линейной матрично сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи, возникающей в теории оптимального управления // Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по управлению в механических системах.— Львов, 1988.— С. 92—93.

Получено 06.08.90