УДК 517.9

И. Дж. Марданов, канд. физ.-мат. наук (Азерб. инж.-строит. ин-т, Баку)

Построение интегрального многообразия решений системы разностных уравнений

Найдены достаточные условия существования интегрального многообразия решений.

Знайдені достатні умови існування інтегрального многовиду розв'язків.

В настоящей статье используются идеи работы [1] о построении системы разностных уравнений, определяющей интегральное многообразие решений, а также общие методы теории интегральных многообразий [2].

1. Рассматривается система линейных разностных уравнений с отклонениями аргумента

$$x_{n+1} = Ax_n + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l x_{n+l}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{1}$$

Предположим, что система уравнений (1) имеет интегральное многообразие решений, определенное системой линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x_{n+1} = Bx_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{2}$$

Поскольку любое решение системы уравнений (2) является также решением системы уравнений (1), то для матрицы B получим матричное алгебраическое уравнение

$$B = A + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l B^l. \tag{3}$$

Если уравнение (3) для матрицы B имеет решение, то система разностных уравнений (1) имеет алгебраическое многообразие решений, определяемое системой уравнений (2).

Будем искать решение матричного уравнения (3) методом последовательных приближений $B(\mu) = \lim\limits_{s \to +\infty} B_s$:

$$B_{s+1} = A + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l B_s^l, \qquad s = 0, 1, 2, \dots, B_0 = 0. \tag{4}$$

Докажем, что последовательность матриц B_s, $s = 0, 1, 2, \dots$, сходится, если величина $|\mu| > 0$ достаточно мала.

2. Для исследования сходимости матриц B_s, $s = 0, 1, 2, \dots$, преобразуем матричное уравнение (4), полагая $C_s = B_s^{-1}$. Уравнение (4) можно представить также в виде

$$B_{s+1} = A + \mu A_0 + \mu \sum_{l=1}^{N} (A_l B_s^l + A_l C_s^l),$$

$$C_{s+1} = \left(A + \mu A_0 + \mu \sum_{l=1}^{N} (A_l B_s^l + A_{-l} C_s^l)\right)^{-1} . \tag{5}$$

Полагая $\|A\| = \alpha$, $\|A^{-1}\| = \beta^{-1}$, находим оценки для матриц B_s, C_s:

$$\|B_{s+1}\| \leqslant \alpha + |\mu| \|A_0\| + |\mu| \sum_{l=1}^{N} (\|A_l\| \|B_s\|^l + \|A_{-l}\| \|C_s\|^l),$$

$$\|C_{s+1}\| \leqslant \left(\beta - |\mu| \|A_0\| + |\mu| \sum_{l=1}^{N} (\|A_l\| \|B_s\|^l + \|A_{-l}\| \|C_s\|^l)\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$s = 0, 1, 2, \dots .$$

Решение этой системы неравенств мажорируется решением системы нелинейных алгебраических уравнений

$$u = \alpha + |\mu| \|A_0\| + \|\mu\| \sum_{l=1}^{N} (\|A\ | u^l + \|A_{-l}\| v^l),$$

$$v = \left(\beta - |\mu| \|A_0\| - |\mu| \sum_{l=1}^{N} (\|A_l\| u^l + \|A_{-l}\| v^l)\right)^{-1}. \tag{7}$$

Если найдено положительное решение $u = u_0$, $v = v_0$ системы (7), то из неравенств $\| B_s \| \leqslant u_0$, $\| C_s \| \leqslant v_0$ вытекает выполнение неравенств $\| B_{s+1} \| \leqslant \leqslant u_0$, $\| C_{s+1} \| \leqslant v_0$.

Из системы уравнений (7) находим уравнение $v = (\alpha + \beta - u)^{-1}$, которое позволяет показать порядок системы уравнений (7)

$$u = \alpha + |\mu| \| A_0 \| + |\mu| \sum_{l=1}^{N} \left(\| A_l \| u^l + \| A_{-l} \| (\alpha + \beta - u)^l \right). \tag{8}$$

Обозначим

$$\varphi(u) = \| A_0 \| + \sum_{l=1}^{N} \left(\| A_l \| u^l + \| A_{-l} \| (\alpha + \beta - u)^{-l} \right).$$

При изменении величины u от α до $\alpha + \beta$ функция $\varphi(u)$ монотонно возрастает и положительна и имеет монотонно возрастающую производную $\varphi'(u)$. Поэтому уравнение

$$u = \alpha + |\mu| \varphi(u), \qquad 0 < \mu < \mu_0 \tag{9}$$

имеет или два положительных решения при $0 < \mu < \mu_0$, лежащие на интервале $(\alpha, \alpha + \beta)$, или одно кратное положительное решение при $\mu = \mu_0$, или не имеет решений при достаточно больших значениях $\mu > \mu_0$.

При $\mu = \mu_0$ выполняются уравнения

$$u = \alpha + \mu_0 \varphi(u), \quad 1 = \mu_0 \varphi'(u). \tag{10}$$

Для переменной $u = u_0$ находим уравнение

$$u = \alpha + \varphi(u)/\varphi'(u), \ \mu_0 = 1/\varphi'(u_0), \tag{11}$$

которое принимает вид

$$u = \alpha + \left(\| A_0 \| + \sum_{l=1}^{N} \left(\| A_l \| u^l + \| A_{-l} \| (\alpha + \beta - u)^{-l} \right) \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{l=1}^{N} \left(\| A_l \| l u^{l-1} + \| A_{-l} \| l (\alpha + \beta - u)^{-l-1} \right) \right)^{-1}. \tag{12}$$

Лемма 1. *Уравнение* (12) *имеет положительный корень* $u = u_0$, *удовлетворяющий условию* $\alpha < u_0 < \alpha + \beta$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную непрерывную на интервале $[\alpha, \alpha + \beta]$ функцию

$$\psi(u) = \alpha + \varphi(u) (\psi'(u))^{-1} - u.$$

Поскольку $\psi(\alpha) > 0$, $\lim\limits_{u \to \alpha + \beta} \psi(u) = -\beta < 0$, то из теоремы Коши вытекает справедливость леммы.

Если найдено значение $u = u_0$, то можно найти значение $\mu_0 = = (\psi'(u_0))^{-1}$. Из леммы 1 следует существование положительного решения $u = u_0$, $v = v_0$ системы (7), что доказывает справедливость теоремы.

Теорема 1. *Пусть в системе разностных уравнений* $\| A \| = \alpha$, $\| A^{-1} \|^{-1} = \beta$. *Существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $|\mu| < \mu_0$ *последовательность матриц* B_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, *определяемая разностным уравнением* (4), *будет ограничена и при этом* $\| B_s \| < \alpha + \beta$, $s = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Исследуем сходимость последовательностей B_s, C_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, определяемых уравнениями (5). Используя равенства

$$B_s^l - B_{s-1}^l = B_s^l - B_{s-1} B_s^{l-1} + B_{s-1} B_s^{l-1} - B_{s-1}^2 B_s^{l-2} + \ldots + B_{s-1}^{l-1} B_s - B_{s-1}^l,$$

$$(A + S)^{-1} - (A + T)^{-1} = (A + S)^{-1} (T - S) (A + T)^{-1},$$

находим следующие неравенства:

$$\| B_{s+1} - B_s \| \leqslant |\mu| \sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} \| B_s - B_{s-1} \| + \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} \| C_s - C_{s-l} \|,$$

$$\| C_{s+1} - C_s \| \leqslant (\alpha + \beta - u_0)^{-2} |\mu| \Big(\sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} \| B_s - B_{s-1} \| + \\ + \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} \| C_s - C_{s-1} \| \Big), \qquad s = 1, 2, 3, \ldots . \tag{13}$$

Последовательности $\| B_{s+1} - B_s \|$, $\| C_{s+1} - C_s \|$ сходятся к нулю и мажорируются темами убывающей геометрической прогрессии, если собственные числа матрицы

$$J = \begin{Vmatrix} |\mu| \sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} & |\mu| \sum_{l=1}^{N} \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} \\ \dfrac{|\mu|}{(\alpha + \beta - u_0)^2} \sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} & \dfrac{|\mu|}{(\alpha + \beta - u_0)^2} \sum_{l=1}^{N} \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} \end{Vmatrix}$$

по модулю меньше единицы. Поскольку строки матрицы J пропорциональны, то достаточно доказать справедливость неравенства

$$|\mu| \sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} + \frac{|\mu|}{(\alpha + \beta - u_0)^2} \sum_{l=1}^{N} \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} < 1. \tag{14}$$

Уравнение $1 = \mu_0 \varphi'(u_0)$ можно представить в виде

$$\mu_0 \Big(\sum_{l=1}^{N} \| A_l \| l u_0^{l-1} + \sum_{l=1}^{N} \| A_{-l} \| l v_0^{l-1} (\alpha + \beta - u_0)^{-2} \Big) = 1,$$

так как $(\alpha + \beta - u_0)^{-1} = v_0$. Следовательно, при $|\mu| < \mu_0$ будет выполнено неравенство (14) и последовательность $\| B_{s+1} - B_s \|$, $\| C_{s+1} - C_s \|$ мажорируются членами убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть в системе разностных уравнений* (1) $|\mu| < \mu_0$, *где величина* μ_0 *определена уравнениями* (11). *При этом последовательность матриц* B_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, *определяемая уравнением* (4), *сходится к некоторой матрице*

$$B(\mu) = \lim_{s \to +\infty} B_s.$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что все матрицы B_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, аналитически зависят от параметра μ и сходимость последовательности $B_s(\mu)$ равномерная. Поэтому справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Если* $|\mu| < \mu_0$, *то для системы разностных уравнений* (1) *существует интегральное многообразие решений вида*

$$x_{n+1} = B(\mu) x_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $B(\mu)$ — *матрица с элементами, аналитическими относительно* μ.

Из теоремы 3 следует, что решение матричного алгебраического уравнения (3) можно всегда найти в виде ряда по степеням параметра μ

$$B(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} B_s \mu^s, \quad B_0 = A, \quad B_1 = \sum_{l=-N}^{N} A_l A^l, \ldots .$$

Полученные результаты можно обобщить на случай системы разностных уравнений с переменными коэффициентами.

1. *Марданов И. Дж.* О построении и асимптотическом свойстве инвариантного многообразия решений разностного уравнения в бинаховом пространстве // Докл. АН АзССР.— 1989.— 14, № 4.— С. 3—5.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Получено 28.06.91