УДК 517.5

Р. А. Угриновский, мл. науч. сотр.
(Ин-т прикл. физики АН России, Нижний Новгород)

О тригонометрической проблеме моментов с люком, алгоритме Левинсона и некоторых прикладных вопросах

Предлагается эффективный критерий разрешимости тригонометрической проблемы моментов с люком в терминах коэффициентов рекуррентных соотношений, которым подчинены полиномы, ортогональные на единичной окружности. Критерий основан на процедуре Левинсона. Обсуждаются возможные приложения результатов.

Пропонується эффективний критерій розв'язку тригонометричної проблеми моментів з люком у термінах коефіцієнтів рекурентних співвідношень, яким задовольняють многочлени, ортогональні на одиничному колі. В основі критерію лежить процедура Левінсона. Розглянуто можливі практичні застосування результатів.

1. Пусть задана конечная последовательность комплексных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n \,(c_0 > 0)$ и некоторая дуга $\gamma = \{z : z = e^{i\theta},\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$ единичной окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. Выясним, когда заданная последовательность $\{c_k\}_0^n$ допускает интегральное представление

$$c_k = \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[\alpha,\beta]} e^{ik\theta}\, d\sigma(\theta),\ k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\sigma(\theta)$ — некоторая неубывающая функция или, другими словами, когда тригонометрическая проблема моментов с предписанным люком имеет решение.

Критерий разрешимости указанной задачи дает следующая теорема, впервые полученная в [1].

Т е о р е м а. *Для существования неубывающей функции* $\sigma(\theta)$, *определенной на дуге* $\Gamma\setminus\gamma$ *единичной окружности и удовлетворяющей условиям*

$$c_k = \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[\alpha,\beta]} e^{ik\theta}\, d\sigma(\theta),\quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\{c_k\}_0^n$ — *заданная конечная последовательность комплексных чисел* $(c_0 > 0)$, *необходимо и достаточно неотрицательности двух квадратичных форм*

$$\sum_{j,k=0}^{n} c_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0 \text{ и } \sum_{j,k=0}^{n-1} \mu_{j-k}\xi_i\bar{\xi}_k \geqslant 0,\quad \forall\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C},$$

где $c_{-k} = \bar{c}_k$, $\mu_{-k} = \bar{\mu}_k$, *а элементы последовательности* $\{\mu_k\}_0^{n-1}$ *определяются соотношением*

$$\mu_k = 2\cos\frac{\beta - a}{2}\, c_k - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} c_{k+1} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} c_{k-1}.$$

Сформулированный критерий, хотя формально дает ответ на поставленный вопрос, нельзя считать окончательным, поскольку он не содержит способа проверки последовательностей $\{c_k\}_0^n$ и $\{\mu_k\}_0^{n-1}$ на положительную определенность. Это весьма важно, так как непосредственная проверка на положительную определенность квадратичных форм $\sum\limits_{j,k=0}^{n} c_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k$ и $\sum\limits_{j,k=0}^{n-1} \mu_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k$ путем вычисления определителей

$$\Delta_p = \det \| c_{j-k} \|_{j,k=0}^{p} \text{ и } D_p = \det \| \mu_{j-k} \|_{j,k=0}^{p}$$

даже по специальным процедурам для теплицевых матриц приводит к сложным вычислительным задачам.

2. Рассмотрим произвольную положительно определенную последовательность $\{c_k\}_0^n$. Как известно, она порождает систему полиномов 1-го рода $\{P_k(z)\}_0^n$, ортогональных на единичной окружности относительно некоторого обложения $d\sigma(\theta)$. Полиномы $P_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{k+1}(z) = zP_k(z) - a_{k+1}P_k^*(z), \tag{2}$$

где

$$P_k^*(z) = z^k \overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right),$$

а коэффициенты $p_{k,l}$ полинома $P_k(z)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_k \\ \overline{c}_1 & c_0 & \cdots & c_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{c}_k & \overline{c}_{k-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k0} \\ p_{k1} \\ \vdots \\ p_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где

$$h_k = \int_{-\pi}^{\pi} |P_k(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) > 0.$$

Используя (3) и рекуррентное соотношение (2), несложно получить [2] следующую связь между заданными моментами $c_0, c_1, \dots, c_k$, коэффициентами полинома $P_{k-1}(z)$, числами h_{k-1}, h_k и коэффициентом a_k, фигурирующим в рекуррентном соотношении (2):

$$a_k h_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1} p_{k-1,i}; \; h_k = h_{k-1}(1 - |a_k|^2). \tag{4}$$

Добавляя к соотношениям (4) рекуррентное соотношение (2) и начальные условия

$$P_0(z) = 1, \quad h_0 = c_0,$$

получаем быстрый алгоритм генерации системы полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$, ортогональных на единичной окружности относительно веса, порожденного заданной положительно определенной последовательностью $\{c_k\}_0^n$.

Указанный алгоритм, предложенный Н. Левинсоном в 1947 году как способ решения системы уравнений (3), является тригонометрическим аналогом одного частного варианта модифицированного алгоритма Чебышева [4].

Одновременно с системой полиномов $\{P_k(z)\}_0^n$ алгоритм Левинсона последовательно генерирует коэффициенты a_k рекуррентного соотношения (2). Условие положительной определенности последовательности $\{c_k\}_0^n$, как известно [5], эквивалентно следующему:

$$|a_k| < 1, \; k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, используя алгоритм Левинсона для генерации последовательности $\{a_k\}_1^{n-1}$, можно проверять на положительную определенность произвольно заданную последовательность. Более того, если на каком-то шаге окажется, что $|a_k| \geqslant 1$, то процесс можно остановить, и при этом нет необходимости в построении всей последовательности $\{a_k\}_1^{n-1}$.

3. Комбинируя теорему п. 1 с алгоритмом Левинсона, приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а. *Для существования неубывающей функции* $\sigma(\theta)$, *опреде-*

ленной на дуге $\Gamma\diagdown\gamma$ единичной окружности, такой, что

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]\diagdown[\alpha,\beta]} e^{ik\theta}\, d\sigma(\theta) = c_k, \; k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\{c_k\}_0^n$ — заданная конечная последовательность комплексных чисел ($c_0 > 0$), необходимо и достаточно, чтобы числа a_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и b_k, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, полученные с помощью итерационных процедур Левинсона

$$P_0 = 1, \; h_0 = c_0; \; \text{для } k = 1, 2, \ldots, n-1:$$

$$a_k = \frac{1}{h_{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} c_{j+1} p_{k-1,j}; \; h_k = h_{k-1}(1 - |a_k|^2); \; P_k(z) = $$

$$= zP_{k-1}(z) - a_k P^*_{k-1}(z),$$

$$P'_0 = 1, \; h'_0 = \mu_0; \; \text{для } k = 1, 2, \ldots, n-2:$$

$$b_k = \frac{1}{h'_{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \mu_{j+1} p'_{k-1,j}; \; h'_k = h'_{k-1}(1 - |b_k|^2); \; P'_k(z) = zP'_{k-1}(z) - b_k P'^*_{k-1}(z),$$

где

$$\mu_k = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} c_k - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} c_{k+1} - e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} c_{k-1},$$

удовлетворяли условиям

$$|a_k| < 1, \; k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и

$$|b_k| < 1, \; k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Отметим, что проверку на положительную определенность последовательностей $\{c_k\}_0^n$ и $\{\mu_k\}_0^{n-1}$ можно проводить параллельно.

4. Приведенная выше теорема может быть эффективно использована при решении различного рода прикладных задач, сводящихся в том или ином виде к тригонометрической проблеме моментов с люком.

Для примера рассмотрим задачу оценивания спектральной плотности мощности (СПМ) стационарного случайного процесса, возникающую при обработке сигналов [6].

В математической постановке задача оценивания СПМ состоит в отыскании некоторой неотрицательной функции $S(\theta)$, определенной на интервале $[-\pi, \pi]$ и связанной с исходными данными соотношениями

$$1)\; S(\theta) \geqslant 0, \; \theta \in [-\pi, \pi],$$

$$2)\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} S(\theta)\, d\theta = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ — известные отсчеты функции корреляции. Среди всех возможных функций $S(\theta)$, удовлетворяющих 1—2, требуется отобрать решение, обладающее рядом физических свойств, в частности (и в первую очередь) повышенным разрешением.

Под разрешением обычно понимают способность оценки различать две узкие спектральные линии, находящиеся достаточно близко друг от друга. Сформулированная в п. 3 теорема позволяет строго определить это понятие.

Определение. *Спектральные линии, расположенные в точках θ_0 и θ_1 $\theta_0, \theta_1 \in [-\pi, \pi]$, назовем теоретически разрешаемыми по моментной последовательности $\{c_k\}_0^n$, если существуют числа α, β, $\theta_0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \theta_1$, такие, что соответствующая тригонометрическая проблема моментов $\{c_k\}_0^n$ с люком $\gamma = \{z : z = e^{i\theta}, \; \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$ имеет решение.*

С учетом данного определения задача отыскания оценки СПМ $S(\theta)$, обладающей повышенным разрешением, сводится к задаче проверки на наличие люка у меры, являющейся решением тригонометрической проблемы моментов. Тем самым, отказавшись от построения самой оценки $S(\theta)$, можно свести задачу оценивания СПМ к задаче распознавания гипотезы о наличии люка конечной длины, решение которой непосредственно содержится в теореме п. 3.

1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* Uber Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem // Сообщения Харьк. Мат. о-ва.— 1934.— **4**, № 9.— С. 9—23.
2. *Yves Genin*. On a Duality Relation in Theory of Orthogonal Polynomials and its Application in Signal Processing // ICIAM'87 : Proc. 1-st Int. Conf. Ind. and Appl. Math., Paris, June 29-July 3, 1987.— Philadelphia, 1988.
3. *Levinson N*. The Wiener rms (root-mean-square) Error Criterion in Filter Design and Prediction // J. Math. Phys.— 1947.— 25.— P. 261—278.
4. *Овчаренко И. Е*. Скалярные произведения в пространстве многочленов и положительность // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 7.— С. 17—21.
5. *Ахиезер Н. И*. Классическая проблема моментов.— М : Физматгиз, 1961.— 310 с.
6. *Кей С. М., Марпл С. Л*. Современные методы спектрального анализа: Обзор // ТИИЭР.— 1981.— **69**, № 11.— С. 5—51.

Получено 08.01.91