УДК 517.9

В. И. Фущич, чл.-корр. АН Украины,
В. А. Тычинин, Н. И. Серов, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Формула размножения решений уравнений Кортевега — де Фриза

Предложена формула размножения решений уравнения Кортевега — де Фриза. С помощью указанной формулы построены множества решений данного уравнения. Решены уравнения Риккати, которые появляются в процессе размножения.

Запропонована формула розмноження розв'язків рівняння Кортевега — де Фріза. За допомогою вказаної формули побудовані множини розв'язків даного рівняння. Розв'язані рівняння Ріккаті, які виникають в процесі розмноження.

В настоящей работе предложена конструктивная и простая формула размножения решений уравнения Кортевега — де Фриза (KdV)

$$L_1(u) = u_0 + 6uu_1 + u_{111} = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Если* $\overset{(1)}{u}$ *— решение* KdV, *то*

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2z_1, \ z_1 = \partial z/\partial x_1, \tag{2}$$

есть решение уравнения KdV, *функция* z *является решением уравнения Риккати*

$$L_2(z) = z_1 - z^2 - \overset{(1)}{u} = 0 \tag{3}$$

и удовлетворяет дополнительному условию

$$L_3(z) = z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) *совместны тогда и только тогда, когда* $\overset{(1)}{u}$ *— решение уравнения* KdV.

Доказательство теоремы сводится к подстановке (2) в (1), после чего получаем

$$L_1(\overset{(2)}{u}) = \lambda_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + \lambda_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + \lambda_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{5}$$

где

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 12(\overset{(1)}{z}_{11} + \overset{(1)}{z}_1\partial_1),\ \lambda_3 = -2\partial_1.$$

Условие совместности уравнений (3) и (4) имеет вид

$$z_{10} - z_{01} = k_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + k_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + k_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{6}$$

где

$$k_1 = 1,\ k_2 = \partial_{111} + 6\overset{(1)}{u}\partial_1 + 6\overset{(1)}{z}_{11} - 12\overset{(1)}{z}\,\overset{(1)}{z}_1,\ \ k_3 = 2\overset{(1)}{z}.$$

Из формул (5), (6) следует утверждение теоремы.

Проиллюстрируем эффективность формулы (2) на простейших примерах. Очевидно, что константа $\overset{(1)}{u} = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$, является решением уравнения (1). Тогда по формуле (2) находим $\overset{(2)}{u} = \lambda - 2\overset{(1)}{z}_1$. Чтобы в явном виде найти $\overset{(2)}{u}$, необходимо решить уравнение Риккати

$$\overset{(1)}{z}_1 = \overset{(1)}{z}{}^2 + \lambda. \tag{7}$$

Возможны три случая: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$. Рассмотрим подробно первый случай. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\overset{(1)}{z} = \frac{-1}{x_1 + c(x_0)}, \tag{8}$$

где $C(x_0)$ — постоянная интегрирования по x_1, которую необходимо определить из условия (4). Подставляя (8) в (4), находим $\dot{c} = 0$. Так как уравнение (4) инвариантно относительно трансляций по x_1, то не умаляя общности можно положить $c = 0$. Таким образом, из очевидного тривиального решения $\overset{(1)}{u} = 0$ по формуле (2) находим стационарное решение $\overset{(2)}{u} = -2x_1^{-2}$ уравнения KdV.

Повторим эту процедуру еще раз:

$$\overset{(3)}{u} = \overset{(2)}{u} - 2z_1, \tag{9}$$

где

$$z_1 = z^2 + \overset{(2)}{u}, \tag{10}$$

$$z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{11}$$

Решением уравнения Риккати (10) является функция

$$z = \frac{c(x_0) - 2x_1^3}{x_1(c(x_0) + x_1^3)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), находим $\dot{c} = 12$. Тогда

$$\overset{(3)}{u} = \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2}. \tag{13}$$

Если продолжать этот процесс, то на n-м шаге получим формулу

$$\overset{(n+1)}{u} = \overset{(n)}{u} - 2\overset{(n)}{z}_1, \tag{14}$$

$$\overset{(n)}{z}_1 = \overset{(n)}{z}{}^2 + \overset{(n)}{u}, \tag{15}$$

$$\overset{(n)}{z}_0 - 6\overset{(n)}{z}{}^2\,\overset{(n)}{z}_1 + \overset{(n)}{z}_{111} = 0. \tag{16}$$

Основная трудность применения формул (14)—(16) для конкретного размножения решений уравнения (1) заключается в решении уравнения Риккати (15). Однако, если $\overset{(1)}{u} = \lambda = \text{const}$, то удается построить общее решение уравнения (15) для произвольного $\overset{(n)}{u}$, найденного по формуле (14):

$$\overset{(n)}{z} = -\overset{(n-1)}{z} - \overset{(n-1)}{v}, \tag{17}$$

где

$$\overset{(n+1)}{v} = \left(\ln \int \exp\left\{2 \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \int \overset{(m)}{v} dx_1\right\} dx_1\right)_1, \tag{18}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \overset{(0)}{v} = 0.$$

Если доопределить функции $\overset{(n)}{z}$ относительно переменной x_0 с помощью условия (16), то из (14) получим

$$\lambda \to \lambda + 2(\ln \overset{(1)}{w})_{11} \to \lambda + 2(\ln \overset{(2)}{w})_{11} \to \dots,$$

где $(\ln w)_1 = v$, или

$$\overset{(2n)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n} \overset{(2m)}{v_1}, \quad \overset{(2n+1)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n} \overset{(2m+1)}{v_1}, \tag{19}$$

где $v = \partial v/\partial x_1$.

Таким образом, используя формулы (18), (19), имеем цепочку решений

$$0 \to \frac{-2}{x_1^2} \to \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2} \to \dots.$$

Аналогично получим следующие две цепочки решений:

$$1 \to 1 - \frac{2}{\cos^2(x_1 - 2x_0)} \to$$

$$\to 1 - \frac{16[(x_1 + 6x_0)\sin 2(x_1 - 2x_0) + \cos 2(x_1 - 2x_0) + 1]}{[2(x_1 + 6x_0) + \sin 2(x_1 - 2x_0)]^2} \dots$$

$$-1 \to -1 + \frac{2}{\operatorname{ch}^2(x_1 + 2x_0)} \to$$

$$-1 + \frac{16[(x_1 - 6x_0)\operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0) - \operatorname{ch} 2(x_1 + 2x_0) - 1]}{[2(x_1 - 6x_0) + \operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0)]^2} \dots.$$

Итак, зная решения уравнения Риккати, по формуле (2) строим решения *KdV*. Следует отметить, что предложенная формула размножения решений является следствием нелокальной симметрии уравнения (1). Лиевская симметрия уравнения (1) дает такие формулы размножения:

трансляции —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0 + \theta_0;\ x_1 + \theta_1), \tag{20}$$

галилеевские преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0;\ x_1 + \theta x_0) - \frac{1}{6}\theta, \tag{21}$$

масштабные преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = a^2 \overset{(1)}{u}(x_0 a^3;\ x_1 a), \tag{22}$$

где θ, θ_0, θ_1, a — групповые параметры.

Объединяя формулу (2) с формулами (20), (21), (22), легко построить широкие классы точных (солитонных и несолитонных) решений уравнения *KdV*. В частности, решение

$$u = -1 + \frac{2}{\mathrm{ch}^2 (x_1 + 2x_0)}$$

после размножения с помощью формул (20)—(22), где $\theta = -6$, $\theta_0 = 0$, принимает вид классического солитонного решения

$$u = \frac{2a^2}{\mathrm{ch}^2 a (x_1 - 4a^2 x_0 + \theta_1)} .$$

Очевидно, что формула (2) не является единственной для уравнения *KdV*. Например, формулы вида

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2(\overset{(1)}{z^2} + \overset{(1)}{k}),$$

$$\overset{(1)}{z_1} = \overset{(1)}{z^2} + \overset{(1)}{k} + \overset{(1)}{u},$$

$$\overset{(1)}{z_0} - 6(\overset{(1)}{z^2} + \overset{(1)}{k})\overset{(1)}{z_1} + \overset{(1)}{z_{111}} = 0$$

также дают размножение решений уравнения (1).

Получено 21.10.91