УДК 512.542

С. Ю. Башун, Э. М. Пальчик (Полоц. гос. ун-т, Беларусь)

О РАЗРЕШИМЫХ РАДИКАЛАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We assume that G is a finite group, $\pi(G) = \{s\} \cup \sigma,\ s > 2,\ \Sigma$ is a set of Sylow σ-subgroups taken one for each $p_i \in \sigma$, $R(G)$ is the largest normal soluble subgroup in G (the soluble radical of G). Suppose also that each Sylow p_i-subgroup $G_{p_i} \in \Sigma$ normalizes the s-subgroup $T^{(i)} \neq 1$ of the group G. With these assumptions, we determine the conditions under which s divides $|R(G)|$.

Нехай G — скінченна група, $\pi(G) = \{s\} \cup \sigma,\ s > 2,\ \Sigma$ — множина силовських σ-підгруп, взятих по одній для кожного $p_i \in \sigma$, $R(G)$ — найбільша нормальна розв'язна підгрупа в G (розв'язний радикал G). Нехай кожна силовська p_i-підгрупа $G_{p_i} \in \Sigma$ нормалізує s-підгрупу $T^{(i)} \neq 1$ з групи G. Встановлено умови, при яких s ділить $|R(G)|$.

Введение. Пусть G — конечная группа без разрешимых нормальных подгрупп. Тогда компоненты слоя $L(G)$ группы G являются группами лиева типа $\mathrm{Chev}(r_i),\ i = \overline{1,k}$, или группами из множества Spor, или из множества $\{A_n, n \geq 5\}$. Пусть $L \in \mathrm{Chev}(r_i)$. Если $L \notin \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$, то существует простой делитель t порядка $|L|$ группы L, который не делит порядка любой собственной параболической подгруппы группы L [4] (лемма 3). В [2] t назван минизотропным делителем (кратко, m-делителем) группы L и рассмотрены некоторые свойства групп, связанные с m-делителями (см. также [3] (лемма 6).

Пусть G — конечная группа, $\pi(G) = \{s\} \cup \sigma,\ s > 2,\ \Sigma^0$ — множество силовских p_i-подгрупп, взятых по одной для каждого $p_i \in \sigma$. Пусть силовская p_i-подгруппа G_{p_i} нормализует некоторую s-подгруппу $T^{(i)} \neq 1$ для каждого $p_i \in \sigma$. В статье доказывается, что если $\bigcap_{i=1}^{m} T^{(i)} \neq 1$, где m — число попарно различных подгрупп $T^{(i)}$, то $O_s(G) \neq 1$.

1. Обозначения, определения и вспомогательные результаты. Будем рассматривать только конечные группы. При этом используем стандартные обозначения и терминологию современной теории конечных групп, которые можно найти в работах [4 – 9]. Приведем некоторые из них:

$p,\ r,\ p_i,\ r_i,\ s, \ldots$ — простые числа;

π — некоторое множество различных простых чисел ($\pi \subset \mathbb{P}$);

$\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$ — множество простых чисел, не принадлежащих π;

$|X|$ — число различных элементов конечного множества X (порядок множества X);

(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b;

$e(q, t)$ — наименьшее натуральное число e такое, что $q^e \equiv 1 \pmod t$ для $(q, t) = 1$, t — простое число, $t > 2$ (т. е. t — примитивный простой делитель числа $q^e - 1$);

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей целого числа n;

$\pi(X) = \pi(|X|)$ для множества X;

$x^g = g^{-1}xg$.

Соответственно:

G_p — силовская p-подгруппа группы G;

$L(G)$ — слой группы G — центральное произведение всех субнормальных подгрупп L группы G с $L = L'$ и $L/Z(G)$ — простая неабелева группа (L — компонента группы G);

Spor — множество из 26 простых неабелевых спорадических групп;

Chev — множество групп лиева типа;

Chev^a — подмножество простых групп в Chev;

$\mathrm{Chev}(r)$ — подмножество в Chev с полями определения $GF(q)$ характеристики r;

$\mathrm{Chev}(q)$ — $\mathrm{Chev}(r)$ с $q = r^f$;

${}^d\Sigma(q)$ — $\mathrm{Chev}(q)$ с неприводимой системой корней $(d = 1, 2, 3)$ [7] (замечание 2.2.5 и определение 2.3.4);

Φ_G (Γ_G) — группа полевых (графовых) автоморфизмов группы $G \in \mathrm{Chev}$;

$\alpha \in \Gamma\Phi_G$ — α-графо-полевой автоморфизм группы $G \in \mathrm{Chev}$;

$\mathrm{Outdiag}(G)$ — подгруппа внешних диагональных автоморфизмов группы $G \in \mathrm{Chev}$;

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G;

$F^*(G) = F(G)L(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G;

$K \lhd G$ $(K \lhd \lhd G)$ — K-нормальная (субнормальная) подгруппа группы G;

$[A, B]$ — взаимный коммутант групп A и B;

G — p-замкнутая группа, если $G_p \lhd G$;

G — p-нильпотентная группа, если $G_{p'} \lhd G$, где $G_{p'}$ — дополнение к G_p в G;

pd-группа G — группа G, у которой $p \in \pi(G)$;

pd-элемент — элемент x, для которого выполняется условие p делит $|\langle x\rangle|$ (или $p \in \pi(\langle x\rangle)$);

π-элемент — элемент x, для которого выполняется условие $\pi(\langle x\rangle) \subseteq \pi$;

$R(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G.

Определение 1.1. *Пусть G — конечная группа, $\pi(G) = \{s, p_1, \ldots, p_n\}$, $s > 2$, $\sigma = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $\Sigma^0 = \{G_{p_1}, \ldots, G_{p_n}\}$. Пусть силовская p_i-подгруппа G_{p_i} нормализует некоторую неединичную s-подгруппу $T^{(i)}$ наибольшего порядка с $s > 2$, $i = \overline{1, m}$, $m \leq n$.*

Группу G, удовлетворяющую этому условию, для краткости условимся называть (v, s)-группой. Отметим, что для каждого i берется единственная силовская подгруппа G_{p_i} группы G. Пусть

$$\mathfrak{X}^0 = \left\{T^{(i)}, i = \overline{1, m},\ m \leq n\right\}$$

($m \leq n$, так как G_{p_i} и G_{p_j} могут нормализовать одну и ту же подгруппу из $\mathfrak{X}^0$).

Если $T^{(i)} \subseteq G_s$ для всех $i = \overline{1, m}$, то множества $\mathfrak{X}^0$ и Σ^0 обозначаем соответственно $\mathfrak{X}$ и Σ.

Определение 1.2. *Пусть $G \in \mathrm{Chev}$. m-Делителем группы G назовем простой делитель числа $|G|$, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.*

Определение 1.3. *Две подгруппы H и B конечной группы G называются p'-экстремальной парой в G, если выполняются следующие условия*:

(1) *силовские p'-подгруппы групп H и B являются силовскими подгруппами в группе G*;

(2) $O_p(H) \neq 1 \neq O_p(B)$, $p > 2$;

(3) $(|H|, |B|) = p^x$, $x \geq 0$, $p > 2$;

(4) $\pi(H) \cup (\pi(B) \setminus \{p\}) = \pi(G)$.

В частности, если две p-локальные подгруппы H и B образуют p'-экстремальную пару, то не обязательно $G = H \cdot B$.

Определение 1.4. *Пусть x и y являются парой элементов одной группы G. Тогда $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y = y^{-x}y$, $x^{(0)} \circ y = y$, $x^{(n+1)} \circ y = x \circ (x^{(n)} \circ y)$.*

Лемма 1.1 ([1] лемма 3, [3], лемма 6)**.** *Пусть*:

(1) $G \in \mathrm{Chev} \setminus \{A_5(2),\ C_3(2),\ D_4(2),\ {}^2A_3(2)\}$. *Тогда G имеет m-делитель $t \neq 1$.*

(2) *Пусть* $G \in \{L_n(q),\ n \geq 3;\ PSp_{2n}(q),\ n \geq 3;\ P\Omega_{2n+1}(q),\ n \geq 2;\ P\Omega_{2n}(q),\ n \geq 4$ (*при* $n = 4,\ q \neq 2);\ {}^2P\Omega_{2n}(q),\ n \geq 4;\ U_n(q),\ n > 3\}$, $b(G) = q^n - 1$ *при* $G = L_n(q)$, $b(G) = q^{2n} - 1$ *при* $G \in \{PSp_{2n}(q),\ P\Omega_{2n+1}(q),\ {}^2P\Omega_{2n}(q),\ U_n(q),\ n = 2k+1,\ k > 1\}$, $b(G) = q^{2(n-1)} - 1$ *при* $G \in \{U_n(q),\ n = 2k;\ P\Omega_{2n}(q)$ (*при* $n = 2,\ q \neq 2)\}$.

Тогда:

(i) *каждый примитивный простой делитель* t *числа* $b(G)$ *является* m*-делителем группы* G;

(ii) *каждый* m*-делитель* t *группы* G *является примитивным делителем числа* $b(G)$.

Лемма 1.2. *Предположим, что* $G \in \{A_n/n \geq 5\}$. *Тогда либо* G *не* (v,s)*-группа, либо* $s = 3$ *и* $n = 3^a = 4k+3$. *Если* $G \in \mathrm{Spor}$, *то* G *не* (v,s)*-группа.*

Доказательство. Если $s > 3$, то по теоремам 2 и 3 [10] $G_2 \notin \Sigma^0$. Пусть $s = 3$, $G \cong A_n$. Тогда по теореме 2 [10] либо $G_2 \notin \Sigma^0$, либо $n = 4k+3$. Если 3 не делит n, то $G_3 \cong Y_3$, где $Y = A_{n-1}$ и $G_2 \cong Y_2$. Но в подгруппе Y из G $Y_2 = G_2$ не нормализует 3-подгрупп, т. е. $G_2 \notin \Sigma^0$. Поэтому пусть 3 делит n. Если существует простой делитель $p > 3$, который делит n, то по следствию 9 [11] абелева p-подгруппа A наибольшего порядка является также элементарной абелевой p-подгруппой в G_p порядка $p^{[n/p]} = p^{n/p}$. Но тогда по [6] ((20-3)) A (тогда и G_p) не нормализует неединичных 3-подгрупп группы G, т. е. $G_p \notin \Sigma^0$. Поэтому $s = 3$, $n = 3^a$ для некоторого целого числа a. Если $s = 3$, $G \in \mathrm{Spor}$ и $G \in \{M_{11}, Ly\}$ (по теореме 3 [10]), то по [6] ((20-11)) $G_{11} \notin \Sigma^0$ или $G_5 \notin \Sigma^0$.

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* G, Σ^0 *и* $\mathfrak{X}^0$ *такие, как в определении* 1.1, G — (v,s)*-группа. Тогда существуют силовская* s*-подгруппа* $G_s = S$ *и множество* $\mathfrak{X}$ *такое, что* $\mathfrak{X}$ *содержит* s*-подгруппы* $T^{(i)}$ *в* G_s *и множество* Σ *такое, что каждая силовская* p_i*-подгруппа* $G_{p_i} \in \Sigma$ *нормализует* s*-подгруппу* $T^{(i)} \in \mathfrak{X}$. *В частности, если* G — (v,s)*-группа, то она имеет как множества* Σ^0 *и* $\mathfrak{X}^0$, *так и множества* Σ, $\mathfrak{X}$, *как в определении* 1.1.

Доказательство. Пусть $G_t \in \Sigma^0$, $t = p_i$, $T^{(i)} = T$. Если $T \nsubseteq G_s$, то по теореме Силова $T \subseteq G_s^g$, $g \in G$. Тогда $gTg^{-1} \subseteq G_s$. Из $G_t \subseteq N_G(T)$ следует, что $gG_tg^{-1} \subseteq N_G(gTg^{-1})$. Составляем множество Σ ($\mathfrak{X}$), состоящее из групп gG_tg^{-1} ($gT^{(i)}g^{-1}$) для подходящих элементов $g \in G$.

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Пусть* $G = G_s \cdot L(G)$, *где* $Z(L(G)) = 1$ *и* G_t, $t \neq s$, *нормализует* s*-подгруппу* $T \neq 1$ *такую, что* $T \nsubseteq M$, *где* M — *минимальная нормальная подгруппа группы* G, *лежащая в* $L(G)$. *Тогда существует факторизация* $T = T_0(T \cap M)$ *такая, что* T_0 *нормализует все компоненты* L *группы* M, *для которых* $L \cap G_t \neq 1$ (*в частности,* T *их также нормализует*).

Доказательство. Пусть $X_0 = T \rightthreetimes G_t$, $X = T \rightthreetimes M_t$, где $M_t \subseteq G_t$, $X \cap M = (T \cap M)M_t$ и $M \cap T = A \lhd T$, $A \lhd A \rightthreetimes M_t$, $A \lhd TM_t = X$. Группа X/A нильпотентна, так как $M_tA/A \lhd X/A$ и $T/A \lhd X/A$. По теореме III.3.10 [4] в X имеется нильпотентная подгруппа U такая, что $UA = X$. Поэтому M_t содержится в сопряженной с U подгруппе группы X. Не нарушая общности, предположим, что $U = T_0 \times M_t$ с $T_0 \subseteq T$ ($N_X(M_t)T = TN_X(M_t)$, поэтому $T \cap N_X(M_t) \subseteq T_0$).

Пусть $1 \neq y \in T_0$ и $y \notin N_G(L)$. Так как $[y, M_t] = 1$, то $L_t = L_t^y$, где $L_t = L \cap G_t$ (в силу $L \lhd \lhd G$). Но тогда $L_t \subset L \cap L^y \neq 1$, что невозможно для группы M, если $M \neq L$.

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. (i) *Пусть* $G \in \mathrm{Chev}(r)^a$ *и* $t = 3$ — m*-делитель группы* G. *Тогда* $G \cong L_2(q)$ *с* $q \equiv -1 \pmod 3$. *Эти группы имеют только автоморфизмы из множества* Φ_G.

(ii) *Пусть p — простое число, m, n — натуральные числа, $n > 2$. Если t — простой примитивный делитель числа $p^n - 1$ (т. е. $e(p^n, t) = n$) и t делит $p^m - 1$, то n делит m.*

Доказательство. (i). Если G — группа лиева ранга $n > 1$, то в G есть минимальная параболическая подгруппа P с множителем Леви L ранга 1 [5, с. 87]. Если $L \not\cong Sz(q)$, то 3 делит $|L|$ и $|P|$. Поэтому пусть $L \cong Sz(q)$. Но по предложению 2.17(ii) [5] $G \in \mathrm{Chev}(2)$. Тогда все 2-локальные подгруппы группы G являются $3'$-группами. В частности, группа G S_4-свободна, а 2-локальные подгруппы группы G S_3-свободны. По теоремам C и 7.1 [12] $G \cong L_2(3^{2n+1})$, или $G \cong Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$, или $G \cong U_3(2^n)$, $n \geq 2$. Не все 2-локальные подгруппы группы $U_3(2^n)$, $n \geq 2$, являются $3'$-группами (даже при $n = 2$ есть параболическая подгруппа P, $|P| = q^3(q^2-1)$ и 3 делит $|P|$). Поэтому $G \cong L_2(3^{2n+1})$ ($G \not\cong Sz(q)$, так как 3 не делит $|Sz(q)|$). Кроме того, $L_2(q)$ — группа лиева ранга 1, которая может иметь максимальные параболические подгруппы порядка $q(q-1)$ с 3, не делит $q-1$. Остальные группы лиева ранга 1 $\big(U_3(q),\ L_2(q),\ {}^2G_2(3^n)\big)$ имеют параболические подгруппы, порядок которых делится на 3. Поэтому $G \in \{L_2(q),\ 3 \text{ не делит } q-1\}$. По [5, с. 16] эти группы могут иметь только полевые внешние автоморфизмы.

(ii). Существует натуральное число k такое, что $kn \leq m$, но $(k+1)n > m$. Тогда $[m/kn] = 1$, t делит число $p^{kn}\,(p^{m-kn}-1)$. Из $(t,p)=1$ следует противоречие с определением числа t, если $m \neq kn$.

Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. (i) *Пусть t — m-делитель группы $G \in \mathrm{Chev}(q)$, $q = r^f$. Если t-подгруппа $T \neq 1$, то $T \nsubseteq N_G(R)$, где $R \neq 1$ — r-группа. В частности, если $X \in \mathrm{Chev}(r)$, $Y \in \mathrm{Chev}(r)$, $X \subseteq Y$, то каждый m-делитель t группы Y является m-делителем группы X, если t делит $|X|$.*

(ii) *Если G — (v,s)-группа, то G — не простая группа, или $s = 3$ и $G \cong A_n$, $n = 3^a = 4k+3$.*

Доказательство. (i). Предположим, что t-подгруппа $T \neq 1$ нормализует r-подгруппу R группы G. По теореме Бореля – Титса [7] (теорема 3.1.3) $T \subseteq N_G(R) \subseteq P$, $R \subseteq O_r(P)$ для некоторой параболической подгруппы P группы G. Но тогда t делит $|P|$, что противоречит определению m-делителя.

(ii). Предположим сначала, что $G \in \mathrm{Chev}(r)$ и G — простая группа. Тогда по теореме 4.254 [5] $r = s$. Так как $s > 2$, то по лемме 1.1(1) в Σ имеется подгруппа G_t, где t — m-делитель группы G. Но это невозможно в силу случая (i).

Предположим теперь, что $G \in \big\{A_n,\ n \geq 5,\ n \neq 4k+3 = 3^a\big\}$ или $G \in \mathrm{Spor}$. В Σ имеется силовская 2-подгруппа G_2. По лемме 1.2 эти случаи невозможны.

Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. *Пусть группа $G = \langle z\rangle \leftthreetimes L$, где $L \cong {}^d\Sigma(q)^a$, $q = r^f$, $z^s = 1$, s делит $|L|$, $r \neq s$ — простое число, $s > 2$. Если z — диагональный, или полевой, или графо-полевой автоморфизм (порядка 3 по [6] ((7–3))) группы L, $C = C_L(z)$, то $L_r \nsubseteq C$.*

Доказательство. Если $z \in \mathrm{Outdiag}(L)$, то рассматриваем L как $O^{r'}(C_{\overline{X}}(\sigma))$ для автоморфизма Стейнберга σ подходящей полупростой алгебраической группы $\overline{X}$ над алгебраическим замыканием $\overline{F}_r$ поля F_r из r элементов. По теореме 2.5.1(b) и лемме 2.5.6 [7] $C_{\langle z\rangle}(L_r) = 1$.

Если z индуцирует на L полевой или графо-полевой автоморфизм группы L, то по предложению 4.9.1 [7] $O^{r'}(C) \cong {}^d\Sigma(q^{1/s})$ или ${}^3D_4(q^{1/s})$. Но тогда $|L_r| > |C_r|$.

Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. *Пусть группа* $G = \langle z\rangle \leftthreetimes L$, *где* L — *простая группа лиева типа с полем определения* $GF(q)$, $q = r^f$, $z^s = 1$, s — *простое число,* $s > 2$. *Если* $r = s$, *то* z *не может индуцировать диагональный автоморфизм* β *группы* L.

Доказательство. По теореме 2.5.12 [7] $\beta \notin \mathrm{Outdiag}(L)$, так как s не делит $s^f \pm 1$.

Лемма 1.9. *Пусть* $L = {}^d\Sigma(q)$, $q = s^f$, $s > 2$, s *делит* $|L|$, L — *простая группа,* $G = \langle z\rangle \leftthreetimes L$, *где* z *индуцирует автоморфизм* α *порядка* s *группы* G, $\alpha \in \{\mathrm{Outdiag}(L), \Phi_L, \Gamma\Phi_L\}$, $f = f_1 \cdot s$, $q_0 = s^{f_1}$. *Пусть* t — m*-делитель группы* G, $C = C_L(\alpha)$, $C^0 = O^{s'}(C)$. *Тогда* $[z, G_t] = 1$ *влечет* $[z, L] = 1$.

Доказательство. Предположим, что $[z, L] \neq 1$. Тогда z индуцирует или диагональный, или полевой, или графо-полевой автоморфизм α группы G. Рассмотрим эти случаи отдельно.

I. $\alpha \notin \mathrm{Outdiag}(L)$ по лемме 1.8.

II. Пусть α — полевой автоморфизм группы L. По предложению 4.9.1(a) [7]

$$C^0 \cong {}^d\Sigma(q_0), \quad \text{если} \quad \alpha \in \Phi_L, \tag{1.1}$$

кроме того, по лемме 1.6(i)

$$t \quad — \quad m\text{-делитель и группы} \quad C^0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим все возможные типы простых групп ${}^d\Sigma(q) = L$.

(1), (2). $L \in \{{}^2B_2(q), {}^2F_4(q)\}$. Эти случаи исключаются, так как $s > 2$ не делит $r = 2$.

(3), (4). $L \in \{G_2(q); {}^2G_2(3^{2n+1}), n > 0\}$. Из строения параболических подгрупп группы $G_2(q)$ [8, с. 127] (таблица 4.1) следует, что t не делит $q^2 - 1$. Поэтому t делит $q^6 - 1$. Но тогда по (1.1) t не делит $q_0^6 - 1$ и $q_0^3 - 1$, так как даже в случае, когда t делит $q^3 - 1$, имеем $q^3 - 1 = s^{3f_1 s} - 1 > s^{6f_1} - 1 = q_0^6 - 1$, поскольку $s > 2$. В силу (1.1) для $L = G_2(q)$ выражение (1.2) не может иметь места. Отметим также, что $e(q,t) = 6$ или 3.

Пусть $L \cong {}^2G_2(q)$. Из доказательства леммы 1.3 в [1] следует, что существует m-делитель t группы L из множества $\pi(q^2 - q + 1)$. Тогда t не делит $q - 1$. Так как $|L|_{3'} = (q^3+1)(q-1)$ [9, с. 16], то $e(q,t) \neq 3$ (иначе t делит $2q^3$), а $t \neq 2$ по теореме 4.2 [8]; $e(q,t) \neq 2$, так как в противном случае t делит $q^2 - 1 + q^2 - q + 1 = q(2q-1)$, t делит $q+1$ и $3q$, что невозможно по лемме 1.5(i). Поэтому $e(q,t) = 6$, что невозможно по (1.1) и (1.2). Итак, случаи (3), (4) не могут иметь места.

(5)–(10). $L \in \{L_n(q); U_n(q); PSp_{2n}(q), n > 2; P\Omega_{2n+1}, n > 1; P\Omega_{2n}^+(q), n > 3; P\Omega_{2n}^-(q), n > 3\}$. Эти случаи исключаются на основании леммы 1.2 и выражений (1.1), (1.2). Покажем это на примере, когда $L \cong U_n(q)$. По (1.1) $C^0 \cong U_n(q_0)$, $n > 2$. По лемме 1.2 $e(q,t) = 2n = e(q_0, t)$ при нечетном n и $e(q,t) = 2(n-1) = e(q, t_0)$. Противоречие. Аналогично исключаются и случаи (5), (7)–(10).

(11). $L \cong F_4(q)$, $C^0 \cong F_4(q_0)$. В этом случае имеем $|L|_{s'} = (q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. Из строения параболических подгрупп группы L [8] (теорема 4.4) и определения m-делителя t следует, что

$$t \quad \text{не делит} \quad (q^2-1)(q^4-1)(q^6-1). \tag{1.3}$$

Поэтому t делит $q^{12} - 1$ или t делит $q^8 - 1$. Отсюда следует, что $e(q,t) = 12$ или 8. Действительно, если t делит $q^{12} - 1$ и t — не примитивный делитель числа $q^{12} - 1$, то t — примитивный делитель числа $q^n - 1$ с $n < 12$. По лемме 1.5(ii) получаем, что n делит 12. Тогда $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Но это противоречит (1.3). Поэтому $e(q,t) = 12$.

Если t делит q^8-1 и $e(q,t)\neq 8$, то $e(q,t)=m<8$ и $m=2,4$. Противоречие с (1.3). Тогда t не делит $q_0^{12}-1$ и t не делит q_0^8-1. В самом деле, если $e(q,t)=8$, то $s^{8f_1s}-1>s^{12f_1}-1$ в силу $s\geq 3$. Противоречие.

(12). $L\cong {}^3D_4(q)$, $C^0\cong {}^3D_4(q_0)$. Тогда $|L|_{s'}=(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$ [9, с. 16]. Из строения параболических подгрупп группы L (см. теорему 4.3 [8]) и определения m-делителя t следует, что

$$t \quad \text{не делит} \quad q^6-1. \tag{1.4}$$

Поэтому t делит $q^8+q^4+1=(q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1)$ и t делит q^4-q^2+1. Так как t делит $q^{12}-1=(q^4-1)(q^8+q^4+1)$, то $e(q,t)=12$. Действительно, если $e(q,t)\neq 12$, то $e(q,t)=n<12$, и по лемме 1.5(ii) получаем, что n делит 12. Значит, $n\in\{2,3,4,6\}$, но $n\notin\{2,3,6\}$ по (1.4). Если t делит q^4-1, то t делит q^2+1 в силу (1.4). Кроме того, t делит $-(q^2+1)+(q^4-q^2+1)=q^4-2q^2$, t делит q^2-2, t делит 3. Но $t>3$ по лемме 4 [3]. Поэтому t не делит q^4-1, $e(q,t)=12$ и t не делит $q_0^{12}-1$. Противоречие.

(13). $L\cong E_6(q)$, $C^0\cong E_6(q_0)$. Тогда $|L|_{s'}=(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$ [9, с. 16]. В L имеются параболические подгруппы, порядки которых делятся на $(q^5-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)$ (см. [8, с. 169, 171]) и на $(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)$ (см. [5, с. 76]). По определению m-делителя отсюда следует, что

$$t \quad \text{не делит} \quad (q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1). \tag{1.5}$$

Поэтому t делит $(q^{12}-1)(q^9-1)$. Если t делит $q^{12}-1$ и $e(q,t)=n<12$, то n делит 12 по лемме 1.5(ii). Тогда $n\in\{2,3,4,6\}$, что противоречит (1.5). Поэтому если t делит $q^{12}-1$, то $e(q,t)=12$. Если t делит q^9-1 и $e(q,t)=m<9$, то $m=3$ по лемме 1.5(ii). Это противоречит (1.5). Итак, либо $e(q,t)=9$, либо $e(q,t)=12$. В любом случае t не делит $(q_0^{12}-1)(q_0^9-1)$, так как $s\geq 3$, $q=s^{9f_1s}$, $q_0\leq s^{12f_1}$. Противоречие.

(14). $L\cong {}^2E_6(q)$, $C^0\cong {}^2E_6(q_0)$. По [1, с. 53]

$$t \quad \text{не делит} \quad (q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^4+1). \tag{1.6}$$

Учитывая значение числа $|L|_{s'}$ (см. [5, с. 145]), получаем, что t делит $(q^{12}-1)(q^9+1)$. Если t делит $q^{12}-1$ и $e(q,t)=n<12$, то по лемме 1.5(ii) $n\in\{2,3,4,6\}$. Это противоречит (1.6). Поэтому $e(q,t)=12$.

Если t делит q^9+1, то t делит $q^{18}-1$, и если $e(q,t)=n<18$, то по лемме 1.5(ii) $n\in\{2,3,6,9\}$. Это невозможно в силу (1.6) и $t>2$. Поэтому $e(q,t)=18$. Даже если $e(q,t)=12$, то t не делит $q_0^{18}-1$, так как $s^{12f_1s}-1>s^{18f_1}-1$ и $s\geq 3$. Противоречие.

(15). $L\cong E_7(q)$, $C^0\cong E_7(q_0)$. По [5, с. 76] в L есть параболические подгруппы, порядки которых делятся на $|E_6(q)|$ и на $|A_6(q)|$. Поэтому

$$t \quad \text{не делит} \quad (q^{12}-1)\prod_{i=2}^{9}(q^i-1). \tag{1.7}$$

Исходя из значения числа $|L|$ [9, с. 16], получаем, что t делит $(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{10}-1)$. Если t делит $q^{18}-1$ и $e(q,t)=n<18$, то по лемме 1.5(ii) имеем $n\in\{2,3,6,9\}$, что противоречит (1.7). Поэтому $e(q,t)=18$. Если t делит $q^{14}-1$, то, аналогично, $e(q,t)=14$. Если t делит

$q^{10}-1$, то опять по (1.7) и лемме 1.5(ii) имеем $e(q,t)=10$. В любом из этих случаев t не делит q_0^k-1, $k\in\{10,14,18\}$, так как $s\geq 3$. Противоречие.

(16). $L\cong E_8(q)$, $C^0\cong E_8(q_0)$. По [5, с. 76; 8, с. 176] группа L имеет параболические подгруппы, порядки которых делятся на $\big|E_6(q)\big|$, $\big|E_7(q)\big|$, $\big|A_7(q)\big|$. По определению m-делителя t получаем

$$t \quad \text{не делит} \quad \prod_{i=1}^{10}(q^2-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1). \tag{1.8}$$

Исходя из значения числа $|L|$ (см. [5, с. 145]), получаем, что t делит $(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)$. Если t делит $q^{30}-1$ и $e(q,t)=n<30$, то по лемме 1.5(ii) имеем $n\in\{2,3,5,6,10\}$, что противоречит (1.8). Если t делит $q^{24}-1$ и $e(q,t)=m<24$, то $m\in\{2,4,6,8,12\}$, что противоречит (1.8). Если t делит $q^{20}-1$ и $e(q,t)=l<20$, то, как и выше, $l\in\{2,4,5,10\}$, что опять же противоречит (1.8). Итак, $e(q,t)=20$, или 24, или 30. В любом случае t не делит $q_0^{30}-1=s^{30f_1}-1$, поскольку $q^{20}-1=s^{20f_1 s}-1>s_0^{30f_1}-1$ вследствие того, что $s\geq 3$. Противоречие.

III. Пусть теперь $\alpha\in\Gamma\Phi_L$. По [6] ((7–3)) $L\cong D_4(q)^a$. По предложению 4.9.1(a) [7] $C^0\cong {}^3D_4(q_0)$. Для L $e(q,t)=6$ по лемме 1.1(2). Для C^0 $e(q_0,t)=12$ согласно пункту (12). Но это означает, что t делит $s^{18f_1}-1$ и t делит $s^{12f_1}-1$, что невозможно по определению m-делителя t (по лемме 1.1(ii)). Это противоречие исключает случай III.

Лемма 1.9 доказана.

Лемма 1.10. *Пусть группа* $L\in \mathrm{Chev}(q)^a$, $q=r^f$, $G=\langle z\rangle\leftthreetimes L$, $z^3=1$, z *индуцирует автоморфизм* $\alpha\in\Gamma_L$ *или* $\beta\in\Gamma_L$ (β *не* $\mathrm{Aut}(L)$*-сопряжен с* α) *группы* L. *Тогда*:

(1) *если* $[z,L_r]=1$, *то и* $[z,L]=1$;

(2) *если* t — m*-делитель группы* L, $r=s$, *то* $[z,L_t]=1$ *влечет* $[z,L]=1$.

Доказательство. По [6] ((7–3)) $L\in\big\{D_4(q)^a,\ {}^3D_4(q)\big\}$. Если $r=3$, то по предложению 4.9.2(b)(5) [7] $C_L(\alpha)\cong G_2(q)$.

Если $r\neq 3$, то либо $C=C_L(\alpha)\cong G_2(q)$, либо имеется еще один графовый автоморфизм β порядка 3, $q=r^f\equiv\pm 1 \pmod 3$, $C=C_L(\beta)$, $O^{r'}(C)\cong L_3(q)$ или $U_3(q)$ [6] ((9–1)(3)(f)).

(1). Если $r=3$, то $|L_r|=q^{12}$, $|C_r|=q^6$ [9, с. 16]. Поэтому $[z,L_r]\neq 1$. Противоречие с условием.

Если $r\neq 3$ и существует $\beta\in\Gamma_L$, то $|L_r|=q^{12}$, $|C_r|=q^3$ [6] ((9–1)(3)(f)). Опять противоречие с условием.

(2). По лемме 1.6(i) t — m-делитель группы L и группы $O^{r'}(C)$, где $C=C_L(\alpha)$ или $C=C_L(\beta)$.

Если $L\cong {}^3D_4(q)$, то $e(q,t)=12$ (пункт (12) в доказательстве леммы 1.9). Если $C\cong G_2(q)$, то $e(q,t)\leq 6$ (пункт (3) в доказательстве леммы 1.9). Если $O^{r'}(C)\cong L_3(q)$, то по лемме 1.1(2) $e(q,t)\leq 3$. Если $O^{r'}(C)\cong U_3(q)$, то по лемме 1.1(2) $e(q,t)=6$.

Если $L\cong D_4(q)^a$, то $e(q,t)=6$ по лемме 1.1(2). По [7, с. 206] (таблица 4.7.1), $C^0\cong L_3(q)$. Тогда для C^0 по лемме 1.1(2) $e(q,t)=3$.

Эти противоречия с определением $e(q,t)$ для одного и того же t (и q) показывают, что $[z,L_t]\neq 1$, $[z,L]\neq 1$.

Лемма 1.10 доказана.

Лемма 1.11. *Пусть (v,s)-группа G имеет вид $G = G_s \leftthreetimes L^{(i)}$, где $\big(s, |L^{(i)}| = 1\big)$, $s > 2$, $L^{(i)}$ — порождение компонент L_i группы G таких, что $L_i \in \mathrm{Chev}(r_i)$, $R(G) = 1$. Пусть $G_r = G_{r_i} \in \Sigma$, $T_i = T \in \mathfrak{X}$ и $G_r \subseteq N_G(T)$. Тогда $\big[T, L^{(i)}\big] = 1$. В частности, если i пробегает все возможные значения для слоя $L(G^*)$ некоторой группы $G^* = G_s \leftthreetimes L(G^*)$ с $\big(s, |L(G^*)|\big) = 1$, то $[T_i, L^{(i)}] = 1$ для каждого i.*

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G, $G_r \cap M = M_r \subseteq N_G(T)$, L — одна из компонент группы G, $L \subseteq M = L_1 \times \ldots \times L_m$, $L_i \cong L$, $i = \overline{1,m}$, $L = {}^d\Sigma(q)^a$, $r = r_i$, $q = r^{f_1 s}$, $q_0 = r^{f_1}$, $L \lhd M$, $L \cap M_r = L_r \subseteq N_G(T)$, а также $L = L_1$. По лемме 1.4 $L \lhd X = T \rightthreetimes L$, $T/F(X)$ — циклическая группа по теореме 2.5.12(d) [7]. Так как $F(X) = C_T(L)$, то $F(X) \times L_2 \times \ldots \times L_m \lhd TM$. Тогда $F(X) \lhd TM$. Поэтому $[F(X), M] = 1$. Предположим, что $Q = F(X) = F(TM) \subset T$. Пусть $TM/Q = \overline{Y}$, $\overline{L} = LQ/Q$. Тогда элемент $\overline{z} \in \overline{T}$ порядка s индуцирует автоморфизм $\alpha \in \Phi_{\overline{L}}$, $\overline{C}^0 = O^{r'}(C_{\overline{L}}(\alpha)) \cong {}^d\Sigma(q_0)$ по предложению 4.9.1(a) [7]. Так как $\overline{L}_r \cdot \overline{T} = \overline{L}_r \times \overline{T}$, то $|\overline{C}^0_r| = |\overline{L}_r|$, что невозможно для q_0 и q. Поэтому $Q = T$ и $[T, M] = 1$. Вследствие произвольного выбора $L = L_i \in \mathrm{Chev}(r_i)$ получаем, что $\big[T_i, L^{(i)}\big] = 1$ для каждого возможного значения i для слоя $L(G^*)$ группы G^*.

Лемма 1.11 доказана.

Лемма 1.12. *Пусть (v,s)-группа G с $R(G) = 1$ имеет вид $G = G_s \leftthreetimes L^*$, где $s > 2$, $L^* = L(G)$ и все компоненты K группы G удовлетворяют условию*

$$K \in \big\{(A_n/n \geq 5,\ n \neq 3^a = 4k+3) \cup \mathrm{Spor} \setminus \{M_{11}, Ly\}\big\},$$

$$G_2 \in \Sigma, \quad T^{(2)} = T \in \mathfrak{X}, \quad G_2 \subseteq N_G(T), \quad \big(s, |L^*|\big) = 1.$$

Тогда $[T^{(2)}, L^*] = 1$. (Если $s \neq 3$, то ограничение $n \neq 3^a = 4k+3$ и группы M_{11}, Ly можно не исключать.)

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащая компоненту K группы G. Тогда $G_2 \cap K = K_2 \subseteq N_G\big(T^{(2)}\big)$. Пусть $X = T^{(2)} \rightthreetimes K_2$. $T^{(2)} \nsubseteq K$ по теореме 2.3 [10] . По лемме 1.4 $K \lhd X$. Поэтому $\big[T^{(2)}, K_2\big] = 1$.

Если $[T^{(2)}, K] \neq 1$, то в $T^{(2)}$ есть элемент, который индуцирует автоморфизм нечетного порядка группы K, что невозможно [5] (теоремы 239 и 240). Поэтому $[T^{(2)}, K] = 1$. Вследствие произвольного выбора M и K получаем, что $[T^{(2)}, L^*] = 1$.

Лемма 1.12 доказана.

Лемма 1.13. *Пусть $G = TK$, $K \lhd G$, K — простая неабелева группа, $Q = C_G(K) = C_T(K)$. Если $Q \subset T$, то в группе $\overline{G} = TK/Q$ имеется элемент простого порядка $\overline{y} \in \overline{T} = T/Q$, который индуцирует автоморфизм простого порядка группы $\overline{K}$.*

Доказательство очевидно по определению автоморфизма.

Лемма 1.14. *Если $G \cong A_n$, то G не может иметь p'-экстремальной пары подгрупп H и B.*

Доказательство. Из $p > 2$ и определения 1.3 следует, что 2 делит или $|H|$, или $|B|$, если H и B — p'-экстремальная пара в G. Пусть для определенности 2 не делит $|H|$. Тогда H — разрешимая группа по известной теореме Томсона – Фейта и поэтому имеет p-дополнение K [4] (теорема VI.1.7). K является холловой $(\pi(H)\backslash\{p\})$-подгруппой в G по определению 1.3. Пусть $|\pi(K)| > 1$. Тогда либо K — $\{2,3\}$-группа, либо n — простое число и $K \cong A_{n-1}$ [14] (таблица 2). Так как $|K|$ — нечетное число, то оба эти случая невозможны. Поэтому пусть K — силовская r-подгруппа нечетного порядка в G. Тогда $H = H_pK = H_p \cdot G_r$ для $K = G_r$. Но тогда $\pi(B) = \pi(G)\backslash\{r\}$ по определению 1.3 (в силу теоремы 5.8 [15] $|G: B| \neq |G_r|$). Поскольку $O_p(B) \neq 1$, то из леммы 3.1 и таблицы 3.1 [16] следует, что $B \notin \{A_{n-1}, S_{n-2}, A_{n-2}\}$. Пусть теперь $K = 1$. Тогда $|G: B| = p^a$. Но $G = B \cdot G_p$ и $1 \neq H = H_p \subseteq G_p$. Тогда $B_p \lhd \lhd G_p$, $B_p \lhd \lhd B$ и $B_p \lhd \lhd G$ [17] (теорема 7.7.1), $O_p(G) \neq 1$ и $G \ncong A_n$.

Лемма 1.14 доказана.

Лемма 1.15 [18, с. 211]**.** *Пусть π — некоторое множество простых чисел, Y — π'-подгруппа группы X. Если π-элемент $x \in N_X(Y)$, $y \in Y$ и последовательность $(x^{(n)} \circ y)$ содержит π-элемент для некоторого целого числа $n > 0$, то $xy = yx$.*

Лемма 1.16. *Пусть X — p-разрешимая группа, $X = X_p \cdot X_{p'}$, $x \in X_p$, $y \in X_{p'}$. Если последовательность $x^{(n)} \circ y$ содержит p-элемент для любого $y \in X_{p'}$ для некоторого целого числа $n > 0$ (зависящего от y), то $x \in O_p(X)$.*

Доказательство. Используем индукцию по порядку группы. Из определения p-разрешимой группы следует, что либо $O_{p'}(X) = K \neq 1$, либо $O_p(X) = P \neq 1$.

Пусть $K \neq 1$, $P = 1$. Тогда для любого элемента $y \in K$ выполняются условия леммы 1.15 для некоторого целого числа $m > 0$ (это возможно, потому что $m \neq n$ для различных элементов y_1 и y_2 из K). По этой лемме $[y, x] = 1$ для всех $y \in K$. Поэтому $x \in C_X(K) = C \lhd X$. Если $C \subset X$, то (так как $C \neq O_p(X)$) по предположению индукции $x \in O_p(C) \lhd X$, и все доказано. Если $C = X$, то $K \subseteq Z(X)$. Если $K \subset X_{p'}$, то в группе $\overline{X} = X/K$ выполняется условие леммы. По индуктивному заключению $\overline{x} \in O_p(\overline{X})$. Пусть Y — прообраз группы $O_p(\overline{X})$ в X. Тогда $Y = Y_pK = Y_p \times K \lhd X$ и $x \in Y_p \lhd X$. Пусть теперь $K = X_{p'}$. Тогда $X = X_p \times K$ и $x \in X_p \lhd X$.

Предположим, что $P \neq 1$. Если $x \notin P$, то рассмотрим группу $\overline{G} = G/P$, элемент $\overline{x} = xP/P$ и подгруппу $\overline{X}_{p'} = X_{p'}P/P$. По лемме III.1.6 [4] условия для $\overline{x}$ и $\overline{X}_{p'}$ сохраняются. По предположению индукции $\overline{x} \in O_p(\overline{X})$. Но тогда $x \in O_p(X) = P$.

Лемма 1.16 доказана.

Лемма 1.17. *Пусть группа $G = L_1 \times \ldots \times L_n$, где L_i, $1 \leq i \leq n$, — изоморфные простые группы. Пусть G_t нормализует s-подгруппу (наибольшего порядка) $S \neq 1$ из G_s, $\{s, t\} \subseteq \pi(G)$. Тогда и в каждой компоненте L_i, $1 \leq i \leq n$, группы G подгруппа $L_i \cap G_t$ нормализует неединичную s-подгруппу ($L_i \cap S \neq 1$).*

Доказательство. Пусть $L := L_1 \times \ldots \times L_{n-1}$, $M := L_n$. Предположим, что $L \cap S =: S_0 \neq 1$. Тогда $(S \rtimes G_t) \cap L = S_0 \rtimes L_t$. Поэтому к подгруппе $L \subset G$ можно применить предположение индукции и получить, что компонента L_1 удовлетворяет заключению леммы. Из изоморфизма компонент следует утверждение для всех L_i, $1 \leq i \leq n$.

Если $L \cap S = 1$, то пусть $\overline{G} := G/L \cong L_n = M$. В группе $\overline{G}$ есть подгруппа $\overline{S} \rtimes \overline{G}_t \cong S \rtimes M_t$, где $M_t = G_t \cap M$. Из изоморфизма компонент и строения группы G получаем противоречие с выбором $|S|$.

Лемма 1.17 доказана.

2. Основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть G — (v, s)-группа, $S = G_s$, $\mathfrak{X}^0$ и Σ^0 такие, как в определении* 1.1, $G = G_s \cdot L(G)$, $R(G) = 1$. *Пусть компоненты K группы $L(G)$ лежат во множестве* $\mathrm{Chev} \cup \mathrm{Spor} \cup \{A_n / n \geq 5,\ n \neq 3^a = 4k + 3\}$. *Тогда*:

(1) *если $K \in \mathrm{Chev}(r)^a$, s делит $|K|$, $s \neq r$ и $L^{(r)}$ — порождение всех компонент $K \subseteq L(G)$ таких, что $K \in \mathrm{Chev}(r)^a$, $T \in \mathfrak{X}^0$, $G_r \subseteq N_G(T)$, то $[T, L^{(r)}] = 1$, $T \lhd S$;*

(2) *если* $K \in \mathrm{Chev}(s)^a$, *s делит* $|K|$, $s = r$ *и* $L^{(t)}$ *— порождение всех компонент* $K \subseteq L(G)$, *для которых t является* m*-делителем,* $G_t \in \Sigma^0$, $T \in \mathfrak{X}^0$ *и* $G_t \subseteq N_G(T)$, *то* $[T, L^{(t)}] = 1$, $T \lhd S^g$ *для некоторых* $g \in G$;

(3) *если в* (1) *s не делит* $|K|$, *то имеет место то же утверждение*;

(4) *если* $K \in \mathrm{Spor}$, $T \in \mathfrak{X}^0$, $G_2 \in \Sigma^0$, $G_2 \subseteq N_G(T)$, $L^{(2)}$ *— порождение всех компонент* K *группы* $L(G)$ *с* $K \in \mathrm{Spor}$ (*s делит* $|K|$ *или s не делит* $|K|$), *то* $[L^{(2)}, T] = 1$, $T \lhd S^g$ *для некоторых* $g \in G$ (*при* $s = 3$ *пусть* $K \notin \{M_{11}, Ly\}$);

(5) *если* $K \in \{A_n / n \geq 5, n \neq 3^a = 4k + 3 \,\text{при}\, s = 3\} = \mathfrak{N}$, $L^{(2)}$ *— порождение всех компонент* $K \in \mathfrak{N}$, $T \in \mathfrak{X}^0$, $G_2 \in \Sigma^0$, $G_2 \subseteq N_G(T)$, *то* $[L^{(2)}, T] = 1$, $T \lhd S^g$ *для некоторых элементов* $g \in G$.

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G, $M_j \subseteq \subseteq L(G) = \times_{j=1}^{x} M_j$, $M_j = M = K_1 \times \ldots \times K_l$, $K_m \cong K_1 = K$ для всех $m = \overline{1, l}$. Пусть $p_i = h$, $G_h \in \Sigma^0$, $T^{(i)} = T \in \mathfrak{X}^0$, $G_h \subseteq N_G(T)$ и, так как $T_0 = T$ в лемме 1.4, имеем $G_h \cap M = M_h \subseteq N_G(T)$. По леммам 1.17 и 1.6(ii) $T \cap M = 1$. Итак,

$$T \cap M = 1, \qquad T \cap K = 1. \tag{2.1}$$

Пусть $L^{(h)}$ — порождение всех компонент K из $L(G)$, для которых $K \cap G_h \neq 1$. Из (2.1) и леммы 1.4 теперь следует, что

$$K \lhd TM, \qquad K \lhd TL^{(h)}. \tag{2.2}$$

Так как $K \lhd \lhd G$, то

$$G_h \cap K = K_h \subseteq N_G(T). \tag{2.3}$$

Из (2.2), (2.3) и леммы Фраттини [4] (теорема I.7.8) следует, что

$$[K_h^g, T] = 1, \quad g \in K. \tag{2.4}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи.

1. $K \in \mathrm{Chev}(r)^a$, $h = r = r_i$, s делит $|K|$, $s \neq r = t$. По теореме 4.254 [5] $K \cap T = 1$ (в противном случае $(K_r \leftthreetimes T) \cap K = K_r \leftthreetimes (T \cap K)$). Поэтому в этом случае (2.1)–(2.4) имеют место. Пусть $1 \neq y \in T$ и $[y, K] \neq 1$. По лемме 1.13 элемент y индуцирует автоморфизм β порядка s. По [6] ((9–1))

$$\beta \in \big\{\mathrm{Outdiag}(K), \Phi_K, \Gamma_K, \Gamma\Phi_K\big\}. \tag{2.5}$$

Не нарушая общности, по (2.4) имеем $K_h \subseteq C_K(\beta)$. Но по леммам 1.7 и 1.10 $[y, K] \neq 1$ не может иметь места. Поэтому

$$[y, K] = 1 = [T, K] = [T, M] = [T, L^{(h)}] \tag{2.6}$$

вследствие произвольного выбора y в T и $K \subseteq L^{(h)}$.

Из $L^{(h)} \lhd G$ и $T = C_{G_s^g}(L^{(h)}) \lhd G_s^g$ следует, что

$$T \lhd G_s^g \quad \text{для некоторых элементов} \quad g \in G. \tag{2.7}$$

2. $K \in \mathrm{Chev}(r)^a$, $h \neq r = s$, s делит $|K|$, $h = t - m$-делитель группы K.

По лемме 1.6(i) K_h не может нормализовать r-подгруппы группы K. Поэтому, как и в случае 1, $K \cap T = 1$, (2.1) – (2.4) имеют место в случае 2.

Предположим, что при выполнении (2.4) $[T, K] \neq 1$. Из (2.5) и (2.4) следует, что $K_h \subseteq \subseteq C_K(\beta)$. Но по леммам 1.8, 1.9 $\beta \notin \{\mathrm{Outdiag}(K),\ \Phi_L,\ \Gamma\Phi_L\}$. По лемме 1.10 $\beta \notin \Gamma_K$. Поэтому и в случае 2 имеем утверждения (2.6) и (2.7), только в этом случае $L^{(h)}$ — порождение всех компонент K группы G с $K \in \mathrm{Chev}(s)$ и m-делителем t.

3. $K \in \mathrm{Chev}(r)^a$, $h = r$, s не делит $|K|$. Из леммы 1.4 следует, что имеют место и в этом случае пункты (2.1) – (2.6), $[T, L^{(h)}] = 1$, где $L^{(h)}$ определяется, как и в (2.6). Так же, как и в случае (2.7), показывается, что $T \lhd G_s^g$ для некоторых элементов $g \in G$.

Отметим, что ниже в случае 5 T — наибольшая s-подгруппа в G, которую нормализует $G_2 \in \Sigma^0$, а $L^{(h)} = L^{(2)}$ $(h = 2)$.

4. $K \in \mathrm{Spor} \setminus \{M_{11}, Ly\}$, s делит $|K|$. По теореме 3 [10] можно считать, что (2.1) имеет место и в этом случае. Поэтому (2.2) – (2.4) также имеют место. Если $[T, K] \neq 1$, то в T найдется элемент, который индуцирует автоморфизм порядка $s > 2$. Это невозможно по теореме 240 [5]. Отсюда следует, что и в этом случае имеют место утверждения (2.6) и (2.7).

5. $K \in \mathrm{Spor}$, s не делит $|K|$. Так же, как и в случае 4, доказываются утверждения (2.6) и (2.7).

В случаях 6 и 7 $T \in \mathfrak{X}^0$, $G_h = G_2 \in \Sigma^0$, $L^{(h)}$ — порождение всех компонент группы G из множества A_n, $n \neq 4k + 3 = 3^a$ $(h = 2)$.

6. $K \in A_n$, $n \geq 5$, $n \neq 4k + 3 = 3^a$, s делит $|K|$. По теореме 2 [10] $T \cap K_2 = 1$. Поэтому пункты (2.2) – (2.4) выполняются и в этом случае.

Если $[K_2, T] = 1$, но $[K, T] \neq 1$, то в T найдется элемент y, индуцирующий автоморфизм порядка $s > 2$ группы G. Но это невозможно в силу теоремы 4.239 [5]. Поэтому и в этом случае имеют место утверждения (2.6) и (2.7).

7. $K \in A_n$, $n \geq 5$, $n \neq 4k + 3 = 3^a$, $(s, |K|) = 1$. Этот случай исключается, как и случай 6, дословным повторением рассуждений.

Теорема 2.1 доказана.

Для некоторых приложений удобно использовать другой вариант теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* G — (v, s)*-группа*, $G_s = S$, $\mathfrak{X}$ *и* Σ *такие, как в лемме* 1.3, $G = = G_s L(G)$, $R(G) = 1$. *Компоненты* K *группы* G *являются известными простыми группами. Тогда имеют место утверждения* (1) – (5), *как в теореме* 2.1, *с заменой* $\mathfrak{X}^0$ *на* $\mathfrak{X}$, Σ^0 *на* Σ *и* $T \lhd S$ *на* $T \lhd S^g$.

Доказательство. Все рассуждения из доказательства теоремы 2.1 не зависят от замены $\mathfrak{X}^0$ и Σ^0 на $\mathfrak{X}$ и Σ. Дословное их повторение и доказывает теорему.

В силу леммы 1.3 имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.3. *Пусть* G — (v, s)*-группа*, $G_s = S$, $\mathfrak{X}^0$ *и* Σ^0 *такие, как в определении* 1.1, $\mathfrak{X}$ *и* Σ *такие, как в лемме* 1.3, $G = G_s \cdot L(G)$, $Z(L(G)) = 1$. *Компоненты группы* G *изоморфны группам из множеств* Spor (*при* $s = 3$ $\mathrm{Spor} \setminus \{M_{11}, Ly\}$), Chev^a, $\{A_n(n \neq 4k+3 = 3^a$ *при* $s = = 3)\}$.

Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $\bigcap_{i=1}^{m} T^{(i)} = D \neq 1$, *где* $T^{(i)} \in \mathfrak{X}^0$ $(T^{(i)} \in \mathfrak{X})$ *для всех* $i = \overline{1, m}$, $G_{p_i} \in \Sigma^0$ $(G_{p_i} \in \Sigma)$ *для* $i = \overline{1, n}$.

(2) *Пусть* $1 \neq B$ — s*-группа*, $[B, G_{p_i}] = A^{(i)}$ — s*-подгруппа группы* G *для всех* $G_{p_i} \in \Sigma^0$ $(G_{p_i} \in \Sigma)$, $i = \overline{1, n}$.

(3) *Пусть* $x \neq 1$ — s-*элемент группы* G *и* $\langle x, G_{p_i}\rangle = Y^{(i)}$ — s-*разрешимая группа* $Y^{(i)} = Y_s^{(i)} \cdot Y_{s'}^{(i)}$ *для всех* $G_{p_i} \in \Sigma^0$ $(G_{p_i} \in \Sigma)$, $i = \overline{1,n}$. *Если для каждого элемента* $y \in Y_{s'}^{(i)}$ *последовательность* $x^{(n)} \cdot y$ *содержит* s-*элемент для некоторого целого числа* n (*зависящего от* y), *то* $y \in O_s(G)$.

Тогда $D \subseteq O_s(G)$, $B \subseteq O_s(G)$, $x \in O_s(G)$ *соответственно.*

Доказательство. (1). Так как $L(G)$ — произведение всех возможных подгрупп $L^{(t_i)}$, $i = \overline{1,n}$ (см. (2.6)), то $[D, L(G)] = 1$, $C_G(L(G)) = O_s(G)$.

(2). По лемме III.1.6 [4] $A^{(i)} \lhd \langle B, G_{p_i}\rangle = B^{(i)}$, поэтому $B^{(i)}/A^{(i)} = \overline{B} \times \overline{G}_{p_i}$, где $\overline{B} = BA^{(i)}/A^{(i)}$, $\overline{G}_{p_i} = G_{p_i}A^{(i)}/A^{(i)}$. Но это означает, что $B^{(i)} = G_{p_i} \leftthreetimes BA^{(i)}$. Из групп $BA^{(i)}$ можно образовать множество $\mathfrak{X}^0$ $(\mathfrak{X})$ для групп множества Σ^0 (Σ). Так как $B \subseteq \bigcap_{i=1}^m B^{(i)}$, $m \leq n$, то утверждение следует из пункта (1).

(3). Пусть $G_t \in \Sigma^0$ $(G_t \in \Sigma)$, а $Y^{(t)} = \langle x, G_t\rangle$. По лемме 1.16 $x \in O_p(Y^{(y)}) = Q^{(t)}$. Поэтому для групп $Q^{(t)}$ можно образовать множество $\mathfrak{X}^0$ (множество $\mathfrak{X}$) для групп из множества Σ^0 (Σ). Так как $1 \neq x \in \bigcap Q^{(t)} = D$, когда G_t пробегает все множество Σ^0 (Σ), то по пункту (1) $x \in D \subseteq O_s(G)$.

Теорема 2.3 доказана.

Теорема 2.4. *Пусть* G — (v,s)-*группа*, $G_s = S$, $\mathfrak{X}$ *и* Σ *такие, как в лемме* 1.3. *Пусть* $Z(L(G)) = 1$, $G = S \cdot L(G)$ *и компоненты* K *группы* G *те же, что и в условии теоремы* 2.3. *Предположим, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $C^{(i)} = G_G(T^{(i)})$, $i = \overline{1,m}$, — s-*замкнутая группа*;

(2) $C_S(T^{(i)}) \subseteq T^{(i)}$, $i = \overline{1,m}$;

(3) $Z(S)$ — *циклическая группа*;

(4) $C_G(x)$ — s-*замкнутая группа для любого элемента* x *порядка* s *из* $Z(S)$;

(5) $L(G)$ *имеет компоненты только лиева типа одной и той же характеристики*;

(6) s *не делит* $|L(G)|$;

(7) $L(G)$ *имеет компоненты только из множеств* $\{A_n/n \geq 5$ *при* $s = 3$, $n \neq 3^a = 4k+3\}$ *и* Spor $(\mathrm{Spor}\setminus\{M_{11}, Ly\}$ *при* $s = 3)$.

Тогда $D = \bigcap_{i=1}^m T^{(i)} = D \neq 1$, $[D, L(G)] = 1$.

Доказательство. (1). Рассмотрим группу $T^{(i)} \leftthreetimes G_{p_i}$. Пусть $T^{(i)} = T$, $G_{p_i} = P$. Поскольку T — P-инвариантная группа, то и $C^{(i)} = C$ — P-инвариантная группа. Поэтому группа CP существует, $C_s \operatorname{char} C \lhd PC$ влечет P-инвариантность s-группы C_s. Но тогда $Z(S) = D \subset C_s = C_s^{(i)}$. Так как i пробегает значения $i = \overline{1,m}$ и $D \subseteq \bigcap_{i=1}^m C_s^{(i)}$, то утверждение следует из теоремы 2.3(1).

(2) следует из (1), так как по условию $Z(S) = D \subset T^{(i)}$, $i = \overline{1,m}$.

(3). По теореме 2.2 можно считать, что $T^{(i)} \lhd G_s$ для всех $i = \overline{1,m}$. Но тогда единственная подгруппа D порядка s из $Z(S)$ лежит в $\bigcap_{i=1}^m T^{(i)}$ и утверждение следует из теоремы 2.3(1).

(4). Так как $T^{(i)} \lhd S$ по теореме 2.2, то $T^{(i)} \cap Z(S) = Q^{(i)} \neq 1$. Тогда по условию $C_G(T^{(i)}) \subseteq C_G(Q^{(i)})$ и утверждение получаем по пункту (1).

(5) следует из теорем 2.2 и 2.3(1)–(3).

(6) следует из теорем 2.2 и 2.1(3).

(7) следует из теорем 2.2 и 2.1(4), (5).

Теорема 2.4 доказана.

3. К проблеме С. А. Чунихина. В 1930 году С. А. Чунихин [19] выдвинул гипотезу: пусть G — неабелева группа, $x \neq 1 \neq y$ — два ее элемента и $\big(|G\colon C_G(x)|, |G\colon C_G(y)|\big) = 1$, тогда G — не простая группа. (В частности, $C_G(y)C_G(x) = C_G(x)C_G(y)$.) Справедливость гипотезы доказал Л. С. Казарин в [20]. Можно обобщить гипотезу С. А. Чунихина следующим образом: пусть G — неабелева группа, x и y — два ее различных pd-элемента, $p > 2$ и $\big(|G\colon C_G(x)|, |G\colon C_G(y)|\big) = p^x$, $x \geq 0$, тогда G — не простая группа. (В частности, не требуется перестановочности подгрупп $C_G(x)$ и $C_G(y)$.)

В самом деле, в группе G имеются циклические подгруппы $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$, которые имеют циклические силовские p-подгруппы $\langle x_1\rangle$ и $\langle y_1\rangle$. Тогда подгруппу $\langle y_1\rangle$ централизует подгруппа $C_G(y)$, а подгруппу $\langle x_1\rangle$ — подгруппа $C_G(x)$. Из определения p'-экстремальной пары подгрупп группы G (определение 1.3) следует, что подгруппы $C_G(y)$ и $C_G(x)$ являются p'-экстремальной парой подгрупп группы G $\big((|G\colon C_G(x)|, |G\colon C_G(y)|) = p^x,\ x \geq 0\big)$. Случай с $x > 0$ дает нам отличие от случая $x = 1$ в гипотезе С. А. Чунихина из [19].

Следующая теорема показывает, что обобщенная гипотеза С. А. Чунихина правильна.

Из лемм 1.14 и 1.2 следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть G — конечная группа, которая имеет p'-экстремальную пару подгрупп, $p > 2$. Тогда G — не простая группа.*

Доказательство. Если G имеет p'-экстремальную пару подгрупп, то она является (v,p)-группой, $p > 2$. Тогда из лемм 1.14 и 1.2 следует утверждение, так как группы A_n, $5 \leq n \leq 26$, не являются (v,p)-группами, что проверяется непосредственно.

Теорема 3.1 доказана.

4. О (v,s)-группах G с $R(G) \neq 1$.

Теорема 4.1. *Пусть G — конечная (v,s)-группа, композиционные факторы которой являются группами из множеств* Spor, Chev, $\{A_n,\ n \neq 4k+3 = 3^a$ *при* $s = 3\}$. *Пусть $R(G) \neq 1$ и выполняются остальные условия теоремы* 2.4. *Тогда s делит $|R(G)|$.*

Доказательство. Используем индукцию по порядку группы G. Пусть $G_s = S$, $\mathfrak{X}$, Σ, как в лемме 1.3.

Если s не делит $|R(G)|$, то группа $\overline{G} = G/R(G)$ удовлетворяет условию теоремы. По определению подгруппы $R(G)$ следует, что $R(\overline{G}) = \overline{1}$. Группа $\overline{G}_s L(\overline{G})$ удовлетворяет условию теоремы 2.4, так как $L(\overline{G}) \cap \overline{G}_t = L(\overline{G})_t$ для всех $G_t \in \Sigma$. Но тогда по теореме 2.4 $C_{\overline{G}}(L(\overline{G}))$ содержит s-подгруппу $\overline{D} \neq \overline{1}$. Но тогда по предложению 1.27 [5] $L(\overline{G}) \neq F^*(\overline{G}) = F(\overline{G})\cdot L(\overline{G})$, т. е. $F(\overline{G}) \neq \overline{1}$. Поскольку $F(\overline{G})$ — нормальная разрешимая подгруппа группы $\overline{G}$, то получили противоречие с $R(\overline{G}) = \overline{1}$.

Поэтому предположение, что s не делит $|R(G)|$, ошибочно.

Теорема 4.1 доказана.

Литература

1. В. Н. Тютянов, Л. А. Шеметков, *Тройные факторизации в конечных группах*, Докл. НАН Беларуси, **46**, № 4, 52 – 55 (2002).
2. Э. М. Пальчик, *О свойствах некоторых простых делителей порядков минизотропных торов конечных групп лиева типа*, Весцi НАН Беларусi, сер. фiз.-мат. навук, № 4, 66 – 71 (2012).
3. Э. М. Пальчик, *Конечные простые группы с факторизацией $G = G_\pi B$, $2 \notin \pi$*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **20**, № 2, 242 – 249 (2014).
4. B. Huppert, *Endliche Gruppen, I*, Springer-Verlag, Berlin (1982).
5. Д. Горенстейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, Мир, Москва (1985).

6. D. Gorenstein, R. Lyons, *The local structure of the finite groups of characteristic 2 type*, Mem. Amer. Math. Soc., **42**, № 276, 1 – 731 (1983).
7. D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Math. Surveys and Monogr., **40**, № 3 (1998).
8. R. Wilson, *The finite simple groups*, Springer-Verlag, London (2009).
9. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, London (1985).
10. А. С. Кондратьев, В. Д. Мазуров, *2-Сигнализаторы конечных простых групп*, Алгебра и логика, **42**, № 5, 594 – 623 (2003).
11. J. G. Bercovich, *On p-group of finite symmetric and alternaiting group*, Contemp. Math., № 93, 67 – 76 (1989).
12. G. Glauberman, *Factorizations in local subgroups of finite groups*, Regional Conf. Series Math., № 33 (1977).
13. B. Huppert, N. Blackburn, *Finite groups, III*, Heidelberg, Berlin etc. (1982).
14. Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, *Теоремы силовского типа*, Успехи мат. наук, **66**, № 5(401), 3 – 46 (2011).
15. Z. Arad, E. Fisman, *On finite factorizable groups*, J. Algebra, **86**, № 2, 522 – 548 (1984).
16. C. H. Li, X. Li, *On permutation groups of degree a product of two prime-powers*, Commun. Algebra, **42**, 4722 – 4743 (2014).
17. J. C. Lennox, E. Stewart, S. E. Stonehewer, *Subnormal subgroups of groups*, Clarendon Press, Oxford (1987).
18. R. Baer, *Kriterien für die Zugehörigkeit von Elementen zu $O_w(G)$*, Math. Z., № 152, 207 – 222 (1977).
19. S. Tchounikhin, *Symplicite du groupe finiles orders de ces classes d'elements conjgues*, C. r. Acad. Sci., **191**, 397 – 399 (1930).
20. Л. С. Казарин, *О проблеме С. А. Чунихина*, Исследования по теории групп, УНЦ АН СССР, Свердловск (1984), с. 81 – 99.

Получено 28.03.19,
после доработки — 09.01.20