УДК 519.852.2

Н. Н. Астафьев, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики и механики УрО АН России, Екатеринбург)

Связь свойств квазифинитности и регулярности в задачах полубесконечного линейного программирования

Обобщается прием, предложенный С. Н. Черниковым, сводящий неоднородные системы к однородным, и примененный им, в частности, для рассмотрения класса финитно-определенных задач. Обобщение состоит в модификации этого приема для более широкого класса задач — квазифинитных,— включающего случаи нерегулярных задач.

Узагальнюється спосіб, запропонований С. М. Черніковим, що зводить неоднорідні системи до однорідних, і застосований ним, зокрема, для розгляду класу фінітно-означених задач. Узагальнення заключається в модифікації цього способу для більш широкого класу задач — квазіфінітних, що містить випадки нерегулярних задач.

Рассмотрим задачу полубесконечного линейного программирования (ПЛП) над $x \in R^n$:

$$L_A : \inf\{(a_0, x) \mid (a, x) \leqslant b \quad (\forall\ [a;\ b] \in A)\} = v_A,$$

где A — произвольное множество из R^{n+1}.

Выпишем систему ограничений задачи L_A —

$$(a, x) \leqslant b \quad (\forall\ [a;\ b] \in A). \tag{1}$$

Определение [1]. *Совместную систему* (1) *называют финитно-определенной, если каждое линейное неравенство* $(c,\ x) \leqslant d$, *являющееся ее следствием* (*т. е. не нерушаемое ее решениями*), *является следствием некоторой* (*своей*) *конечной подсистемы из* (1). *Задачу* L_A *называют финитно-определенной* (*или Фаркаша—Минковского*), *если ее система ограничений финитно определена.*

Выпишем согласно [1] для (1) соответствующую ей систему (однородных линейных неравенств):

$$(a, x) - bt \leqslant 0 \ \ (\forall\ [a;\ b] \in A), \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Приведем факты из [1], важные для дальнейшего изложения.

Утверждение 1 (лемма 7.1 [1]). *Линейное неравенство* $(c,\ x) \leqslant d$ *тогда и только тогда является следствием совместной системы* (1), *когда неравенство* $(c,\ x) - dt \leqslant 0$ *является следствием соответствующей ей системы* (2).

Утверждение 2 (компиляция теорем 7.3, 7.4 [1]). *Совместная система* (1) *тогда и только тогда финитно определена, когда таковой является соответствующая ей система* (2).

В работах С. Н. Черникова понятие неравенства-следствия и прием сведения неоднородных систем (1) к однородным (2) (утверждение 1) являются базовыми и в его монографии [1] на их основе получены теоремы Минковского—Фаркаша, Фань-Цзи, Бержа, альтернативные теоремы и теоремы двойственности линейного программирования (конечномерные случаи). Им были выделены финитно-определенные системы из класса бесконечных систем и на них продемонстрирована эффективность этого подхода (сформулированы аналоги названных выше теорем —теоремы 7.3, 7.4, следствия 7.1—6.4, теорема 7.13, гл. VII [1]). Предложенный С. Н. Черниковым подход получил высокую оценку в многочисленных публикациях, в том числе и зарубежных. Как показал С. Н. Черников [1], для финитно-определенных задач справедлив аналог теоремы двойственности для конечного случая (т. е. для них отсутствует ситуация разрыва в двойственности — ситуация нерегулярной задачи).

В данной работе вводится расширение класса финитно-определенных задач (квазифинитные задачи), модифицируется изложенный выше подход для класса квазифинитных задач, включающий и некоторые нерегулярные задачи ПЛП. Интерес же к нерегулярным задачам ПЛП продиктован как практикой, так и вычислительными аспектами решаемых задач.

В соответствии с [1] сконструируем сопряженный конус для системы (1):

$$K_1 = \operatorname{cone}\{[a;\ b] \in A,\ [0;\ 1] \in R^{n+1}\},$$

совпадающий с сопряженным конусом однородной системы (2), соответствующей системе (1). Наряду с системой (2) рассмотрим ее подсистему

$$(a,\ x) - bt \leqslant 0 \quad (\forall\ [a;\ b] \in A), \tag{3}$$

и ее сопряженный конус $K_3 = \operatorname{cone}\{[a;\ b] \in A\}$.

С. Н. Черников доказал следующее утверждение.

Утверждение 3 (теорема 7.4 [1]). *Совместная система* (1) *тогда и только тогда финитно определена, когда* $K_1 = \overline{K}_1$ *(здесь* $\overline{K}_1$ *— топологическое замыкание для* K_1).

Утверждение 4. *Для совместной системы* (1) *из* $K_3 = \overline{K_3}$ *следует* $K_1 = \overline{K}_1$.

Действительно, $K_3 = \overline{K}_3$ означает финитную определенность системы (3) и потому, очевидно, системы (2), откуда согласно утверждению 3 вытекает $K_1 = \overline{K}_1$.

Приведем пример, в котором система (1) — финитно определена, а система (3) не является таковой: $\left\{x \leqslant -\frac{1}{k},\ k = 1, 2, \ldots\right\}$. Эта система, очевидно, финитно определена, а соответствующая ей система вида (3) $\left\{x + \frac{1}{k}\, t \leqslant 0\ (k = 1, 2, \ldots)\right\}$, как легко видеть, не финитно определена. Например, неравенство $x \leqslant 0$ является ее следствием, но не является следствием никакой ее конечной подсистемы.

Лемма 1. *Если для системы* (1) *конус* K_3 *замкнут, а конус* K_1 *не замкнут, то система* (1) *содержит конечную несовместную подсистему.*

Доказательство. Несовместность системы (1) следует непосредственно из утверждения 4. Тогда неравенство $t \leqslant 0$ является следствием системы (3) (этот прием заимствован из [1, с. 122]) и потому согласно обобщенной лемме Минковского—Фаркаша [1] в силу $K_3 = \overline{K}_3$ получаем

$$R^{n+1} \ni [0;\ -1] = \sum_{i=1}^{n+2} \gamma_i\, [a_i;\ b_i], \quad \gamma_i \geqslant 0\ \ [a_i;\ b_i] \in A.$$

Последнее означает, что неравенство $t \leqslant 0$ является следствием подсистемы $\{(a_i,\ x) \leqslant b_i t\ \ (i \in \overline{1,\ n+2})\}$, откуда следует, что подсистема $\{(a_i,\ x) \leqslant b_i\ \ (i \in \overline{1,\ n+2})\}$ — несовместна.

Приведем пример, иллюстрирующий ситуацию леммы 1: $\left\{\frac{1}{k}\, x_1 + \frac{1}{k^2}\, x_2 \leqslant -1\ (k = 1, 2, \ldots),\ 0x_1 + 0x_2 \leqslant -1\right\}$. Это несовместная система, для которой конус $K_3 = \operatorname{cone}\{[0.\ 0,\ -1],\ \ [1/k,\ 1/k^2,\ -1]\ (k = 1, 2, \ldots)\}$ замкнут, а конус $K_1 = \operatorname{cone}\{[0, 0, 1],\ [0, 0, -1],\ [1/k,\ 1/k^2,\ -1]\ (k = 1, 2, \ldots)\}$ — не замкнут.

Система (2) наследует свойство финитной определенности для (1), а система (3) не наследует это свойство.

Ниже определяется класс задач ПЛП, обобщающий класс финитно-определенных задач, для которого переход к системе ограничений вида (3) не выводит за этот класс.

Определение. *Пусть в задаче* L_A *значение* v_A *конечно и* $\|[a; b]\| = 1$ $(\forall [a; b] \in A)$. *Если при этом существуют* $[a_i; b_i] \in \overline{A}$, $i \in \overline{1, s}$, *такие, что*

$$L'_A : v_A = \min\{(a_0, x) \mid (a_i, x) \leqslant b_i \ (i \in \overline{1, s})\}, \qquad (4)$$

то задачу L_A *назовем квазифинитной, а задачу (4)—предельной для* L_A.

Теорема 1. *Пусть в задаче* L_A *значение* v_A *конечно и* $\|[a; b]\| = 1$ $(\forall [a; b] \in A)$. *Тогда существуют такие* $[a_i; b_i] \in \overline{A}$, $i \in \overline{1, s}$, *что выполнено хотя бы одно из условий*:

1) L_A *квазифинитна*; (4) — *предельная задача*;

2) $\sum_{i=1}^{s} \gamma_i [a_i; b_i] = 0, \quad \sum_{i=1}^{s} \gamma_i = 1, \ \gamma_i \geqslant 0, \ i \in \overline{1, s}.$

Очевидно, что финитно-определенная задача L_A, в которой v_A конечно и $\|[a, b]\| = 1$, $\forall [a, b] \in A$, является квазифинитной.

Приведем пример не квазифинитной задачи:

$$L_A : \inf\left\{- x_2 \mid \pm x_1 + \frac{1}{k} x_2 \leqslant \frac{1}{k^2} \quad (k = 1, 2, \ldots)\right\} = v_A.$$

Очевидно, $v_A = 0$. Множество $\overline{A}$ содержит лишь два предельных вектора $[a_1; b_1] = [1, 0, 0]$, $[a_2; b_2] = [-1, 0, 0]$. Легко проверить, что $\min\left\{-x_2 \mid \pm x_1 + \frac{1}{k} x_2 \leqslant \frac{1}{k^2} \ (k \in \overline{1, s})\right\} < 0$ и $\inf\{- x_2 \mid - x_1 \leqslant 0, \ x_1 \leqslant 0\} = - \infty < v_A = 0$. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ получаем $\frac{1}{2}[a_1; b_1] + \frac{1}{2}[a_2; b_2] = 0$, т. е. выполнено условие 2 теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 при выполнении условия Слейтера* [*т. е.* $\exists\, p \in R^n$, $\varepsilon > 0 : (a, p) < b - \varepsilon$ $(\forall [a; b] \in A)$) *задача* L_A *является квазифинитной.*

Отметим также, что приведенная выше не квазифинитная задача L_A является регулярной (т. е. без разрыва в двойственности), а, например, задача $\inf\left\{x_2 \mid -\frac{1}{k} x_1 + x_2 \leqslant 0 \ (k = 1, 2. \ldots)\right\} = 0$ является квазифинитной, но не регулярной (т. е. с разрывом в двойственности).

Наряду с задачей L_A рассмотрим задачу

$$\overline{L}_A : \inf\{(a_0, x) - v_A t \mid (a, x) \leqslant bt \ (\forall [a; b] \in A)\} = \overline{v}_A.$$

Теорема 2. *Пусть значение* v_A *задачи* L_A *конечно. Тогда задача* $\overline{L}_A$ *имеет значение* $\overline{v}_A = 0$, *а задачи* L_A *и* $\overline{L}_A$ *квазифинитны только одновременно.*

Доказательство. Очевидно, что $\overline{v}_A \leqslant 0$. Предположим, что $\overline{v}_A < 0$. Тогда в силу однородности системы ограничений в задаче $\overline{L}_A$ следует $\overline{v}_A = -\infty$. Отсюда вытекает, что для любого $N > 0$ найдется допустимый вектор $[x_N, t_N]$, для которого $(a_0, x_N) \leqslant v_A t_N - N$. Рассмотрим случаи:

1. $t_N > 0$. Тогда $(a, x_N/t_N) \leqslant b$ $(\forall [a; b] \in A)$ и $(a_0, x_N/t_N) \leqslant v_A - N/t_N < v_A$, что противоречит смыслу значения v_A.

2. $t_N = 0$. Тогда $(a, x_N) \leqslant 0$ $(\forall [a; b] \in A]$, $(a_0, x_N) \leqslant - N < 0$. И потому, взяв произвольный допустимый вектор $\overline{x}$ задачи L_A, получим, что вектор $x_\alpha = \overline{x} + \alpha x_N$ допустим $\forall \alpha > 0$ в задаче L_A и $(a_0, x_\alpha) = (a_0, \overline{x}) + \alpha(a_0, x_N) \leqslant (a_0, \overline{x}) - \alpha N$, что противоречит конечности значения v_A.

3. $t_N < 0$. Тогда $(a, x_N/|t_N|) \leqslant -b$ $(\forall [a; b] \in A)$, $(a_0, x_N/|t_N|) \leqslant \leqslant v_A - N/|t_N|$. Пусть $\varepsilon > 0$ и x_ε — такой допустимый вектор в задаче L_A, для которого $(a_0, x_\varepsilon) < v_A + \varepsilon$. Отсюда для $\bar{x}_\varepsilon = x_N/|t_N| + x_\varepsilon$ следует $(a_0, \bar{x}_\varepsilon) = (a, x_N/|t_N|) + (a, x_\varepsilon) \leqslant -b + b = 0$ $(\forall [a; b] \in A)$, $(a_0, \bar{x}_\varepsilon) = (a_0, x_N/|t_N|) + (a_0, x_\varepsilon) < -v_A - N/|t_N| + v_A + \varepsilon = \varepsilon - N/|t_N|$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ можно выбрать его таким, что $(a, \bar{x}_\varepsilon) \leqslant 0$ $(\forall [a; b] \in A)$, $(a_0, \bar{x}_\varepsilon) < 0$, т. е. для $\bar{x}_\varepsilon$ получается та же ситуация, что и в рассмотренном случае 2, приводящая к противоречию со смыслом значения $\bar{v}_A$. Следовательно, $\bar{v}_A = 0$.

Отметим, что равенство $\bar{v}_A = 0$ можно легко получить и из обобщенной леммы Минковского — Фаркаша.

Предположим, что L_A — квазифинитна и задача L'_A (4) — предельная для нее. Тогда согласно доказанному выше

$$\bar{v}'_A = \min\{(a_0, x) - v_A t \mid (a_i, x) \leqslant b_i t \ (i \in \overline{1, s})\} = 0, \tag{5}$$

т. е. задача (5) — предельная для $\bar{L}_A$, следовательно, $\bar{L}_A$—квазифинитна. Предположим, что $\bar{L}_A$ — квазифинитна и задача (5) — предельная для нее. Отсюда по лемме Минковского — Фаркаша (для конечных однородных систем) получаем соотношения

$$-[a_0; v_A] = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i [a_i; b_i], \quad \gamma_i \geqslant 0, \quad i \in \overline{1, s}.$$

Из них в силу совместности ограничений в задаче (4) и согласно теореме двойственности (конечный случай) заключаем, что задача (4) разрешима, пусть со значениями v'. Тогда в силу той же теоремы справедливы неравенства $v_A \geqslant v' = \max\left\{-\sum_{i=1}^{s} u_i b_i \,\|\, -a_0 = \sum_{i=1}^{s} u_i a_i, \ u_i \geqslant 0 \ (i \in \in \overline{1, s})\right\} \geqslant -\sum_{i=1}^{s} \gamma_i b_i = v_A$, или $v_A = v'$, т. е. задача (4) — предельная для L_A, следовательно, L_A — квазифинитна. Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 2 неправомерна замена свойства квазифинитности на финитную определенность.

Рассмотрим связь свойств квазифинитности и регулярности (т. е. отсутствие разрыва в двойственности). Для простоты изложения предположим, что в задаче L_A счетное число ограничений, т. е. $A = \{[a_i; b_i]\}_1^\infty$, и обозначим ее символом L_∞, а ее значение —символом v_∞. Пусть R_∞ — пространство числовых последовательностей, R'_∞ — его конечнопорожденное подпространство (т. е. $x = [x_1, x_2, \ldots] \in R_\infty$ содержит лишь конечное число ненулевых компонент x_k; для $a \in R_\infty$ и $x \in R'_\infty$ положим $(a, x) = \Sigma a_i x_i$ — суммирование по ненулевым компонентам x_i. Пусть в задаче L_∞ имеем $a_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда положим $a_{\cdot j} = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots] \in R_\infty$, $j \in \overline{1, n}$, $b = [b_1, b_2, \ldots] \in R_\infty$. Для L_∞ рассмотрим двойственную задачу над $y \in R'_\infty$ [2]:

$$L_\infty^* : \sup\{(-b, y) \mid (a_{\cdot j}, y) = -a_{0j} \ (j \in \overline{1, n}), \ y \geqslant 0\} = v_\infty^*.$$

Здесь $y \geqslant 0$ означает покомпонентные неравенства. Очевидно, что всегда $v_\infty^* \leqslant v_\infty$. Ситуацию $v_\infty^* < v_\infty < +\infty$ называют разрывом в двойственности, а задачу L_∞ — нерегулярной (в противном случае — регулярной). Легко убедиться, что задача

$$L_\infty : \min\left\{x_1 \,\middle|\, -x_1 + \frac{1}{k} x_2 \leqslant 0 \ (k = 1, 2, \ldots), \ -x_1 \leqslant 1\right\}$$

квазифинитна и нерегулярна: здесь $v_\infty = 0$, $v_\infty^* = -1$. Класс регулярных задач L_∞ может быть идентифицирован свойством: L_∞ допускает аппроксимацию своими конечными подзадачами, что доказывается на основе теоремы двойственности (конечный случай).

Для финитно-определенных задач, как показал С. Н. Черников [1], $v_\infty = v^*_\infty$, т. е. они регулярны.

Теорема 3. *Пусть значение v_∞ — конечно. Тогда если L_∞ не квазифинитна, то $\bar{L}_\infty$ нерегулярна (т. е. с разрывом в двойственности).*

Доказательство. Согласно теореме 2 имеем $\bar{v}_\infty = 0$. Положим

$$v_k = \inf\{(a_0, x) - v_\infty t \mid (a_i, x) \leqslant b_i t \ (i \in \overline{1, k})\}.$$

Очевидно, что либо $v_k = 0$, либо $v_k = -\infty$. Если предположить при некотором k_0 выполнение $v_{k_0} = 0$, то это означает финитную определенность задачи $\bar{L}_\infty$, а потому и квазифинитность ее, вопреки теореме 2, согласно которой $\bar{L}_\infty$ не квазифинитна. Следовательно, $v_k = -\infty \ \forall k = 1, 2, \ldots$, т. е. задача L_∞ не аппроксимируема своими конечными подзадачами, а потому и нерегулярна. Более того, с помощью теоремы двойственности (конечный случай) легко убедиться, что ограничения двойственной задачи $(\bar{L}_\infty)^*$ для $\bar{L}_\infty$ несовместны.

Отметим, что в условиях теоремы 3 задача L_∞ может быть и регулярной.

1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М. : Наука, 1986.— 488 с.
2. *Астафьев Н. Н.* Линейные неравенства и выпуклость.— М. : Наука, 1982.— 153 с.

Получено 14.12.90