УДК 512.544

П. М. Гудивок, д-р физ.-мат. наук,
Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко, кандидаты физ.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп

Изучается связь между p-группами Черникова и целочисленными p-адическими представлениями конечных p-групп. Приводится описание с точностью до изоморфизма некоторых классов p-групп Черникова.

Вивчається зв'язок між p-групами Чернікова і цілочисловими p-адичними зображеннями скінченних p-груп. Описуються з точністю до ізоморфізму деякі класи p-груп Чернікова.

Пусть G — черниковская p-группа, т. е. группа, являющаяся расширением прямой суммы конечного числа квазициклических p-групп с помощью конечной p-группы. Свойства p-групп Черникова достаточно хорошо изучены [1—5]. Основной вклад в исследование этих групп внесли С. Н. Черников и его ученики (см. [1]).

Настоящая работа посвящена описанию с точностью до изоморфизма расширений полных абелевых p-групп с условием минимальности с помощью циклических p-групп. Излагаемый здесь подход к изучению p-групп Черникова основан на использовании теории целочисленных p-адических представлений конечных групп [6].

Пусть $M = T^{(s)}$ — внешняя прямая сумма s экземпляров квазициклической p-группы T, т. е.

$$M = T^{(s)} = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_s, \tag{1}$$

где $M_i = T$, $i = 1, 2, \dots, s$. Известно [2], что группа $\operatorname{Aut} T^{(s)}$ изоморфна полной линейной группе $GL(s, \mathbb{Z}_p)$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Отсюда и из теории расширений групп [2] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью конечной группы H определяется некоторым матричным представлением Γ степени s группы H над кольцом $\mathbb{Z}_p$ и некоторой системой факторов $\{m_{a,b} \mid a, b \in H\}$, $m_{a,b} \in M$.

Отметим, что если $A = \| \alpha_{ij} \| \in GL(s, \mathbb{Z}_p)$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, и $m = (m_1, \dots, m_s)$, $m_i \in M_i = T$; $i = 1, \dots, s$, то

$$A(m) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1s} \\ . & . & . \\ \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{s} \alpha_{1j}(m_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} \alpha_{sj}(m_j) \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_{ij}(m_j)$—элемент группы M_i, определяемый следующим образом. Пусть

$$\alpha_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} p + \dots + b_{ij}^{(r)} p^r + \dots, \quad 0 \leqslant b_{ij}^{(r)} < p,$$
$$m_j = c_0^{(j)} a_0 + c_1^{(j)} a_1 + \dots + c_{t_j}^{(j)} a_{t_j}, \quad 0 \leqslant c_l^{(j)} < p,$$

где $\{a_n\}$ — образующие элементы группы $M_j = T$ и $pa_0 = 0$, $pa_n = a_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\alpha_{ij}(m_j) = \Big(\sum_{r=0}^{t_j} b_{ij}^{(r)} p^r \Big) \Big(\sum_{n=0}^{t_j} c_n^{(j)} a_n \Big).$$

Следовательно, всякому матричному $\mathbb{Z}_p$-представлению Γ степени s группы H соответствует по крайней мере одно расширение группы M с помощью группы H — полупрямое произведение $M \leftthreetimes H$.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h, $h \geqslant 1$, и $\Gamma : a \to \Gamma_a$ — матричное $\mathbb{Z}_p$-представление степени s группы H. Из [7] вытекает, что всякое расширение группы M с помощью группы H задается таким представлением Γ и таким элементом $m_0 \in M$, что $\Gamma_a(m_0) = m_0$. Обозначим такое расширение $G(M, H, \Gamma, m_0)$ либо $G(\Gamma, m_0)$. Очевидно, M будет H-модулем ($am = \Gamma_a(m)$, $m \in M$) и $g_a^{p^h} = m_0$, $g_a^{-r} m g_a^r = \Gamma_a^r(m)$ ($m \in M$, r — целое число), где g_a — представитель смежного класса группы $G(\Gamma, m_0)$ по подгруппе M, соответствующий элементу a. $\mathbb{Z}_p$-представления Γ и Δ степени s группы H называются обобщенно эквивалентными, если существуют такая матрица $C \in GL(s, \mathbb{Z}_p)$ и такое натуральное число r, не делящееся на p, что $C\Gamma_a C^{-1} = \Delta_a^r$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{Z}_p$-представления Γ и Δ группы $H = \langle a \rangle$ обобщенно эквивалентны, т. е. $C\Gamma_a C^{-1} = \Delta_a^r$, $(r, p) = 1$. Тогда группы $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Delta^r, C(m_0))$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть g_a и $\bar{g}_a$ — представители смежных классов соответственно групп $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Delta^r, C(m_0))$ по подгруппе M, соответствующие элементу $a \in H$. Искомый изоморфизм $\psi : G(M, H, \Gamma, m_0) \to G(M, H, \Delta^r, C(m_0))$ строим следующим образом: $\psi(g_a^i m) = \bar{g}_a^i C(m)$, $m \in M$, $0 \leqslant i < p^h$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a$, то группы $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Gamma, C(m_0))$ изоморфны.*

Лемма 2. *Из изоморфизма групп $G_1 = G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G_2 = G(M, H, \Delta, m_0')$ следует обобщенная эквивалентность представлений Γ и Δ.*

Доказательство. Пусть ψ — изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2 и g_a ($\bar{g}_a$) — представитель смежного класса группы G_1 (соответственно G_2) по подгруппе M, соответствующий элементу $a \in H$. Очевидно, $\psi(M) = M$ и $\psi(g_a) = \bar{g}_a^r m_1$ ($m_1 \in M$, $(r, p) = 1$). Обозначим через C ограничение ψ на M. Можно считать, что $C \in GL(s, \mathbb{Z}_p)$. Тогда для любого $m \in M$ имеем

$$\Delta_a^r(C(m)) = \bar{g}_a^{-r} C(m) \bar{g}_a^r = (\bar{g}_a^r m_1)^{-1} C(m) \bar{g}_a^r m_1 = \psi(g_a)^{-1} \psi(m) \psi(g_a) =$$
$$= \psi(g_a^{-1} m g_a) = C(g_a^{-1} m g_a) = C\Gamma_a(m).$$

Следовательно, $\Delta_a^r C = C\Gamma_a$. Лемма доказана.

В расширении $G(M, H, \Gamma, m_0)$ рассмотрим подгруппу $A(\Gamma)$ группы M, определяемую следующим образом:

$$A(\Gamma) = \{x \in M \mid \Gamma_a(x) = x\}. \tag{3}$$

Пусть

$$B(\Gamma) = \{E + \Gamma_a + \Gamma_a^2 + \ldots + \Gamma_a^{p^h - 1})(m) \mid m \in M\}. \tag{4}$$

Очевидно, $B(\Gamma)$ — подгруппа группы $A(\Gamma)$. Фактор-группа $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ называется группой расширений группы M с помощью группы H, соответствующей представлению Γ.

Лемма 3. *Группы $G_1 = G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G_2 = G(M, H, \Gamma, m_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдется такая матрица $C \in GL(s, \mathbb{Z}_p)$ и такое натуральное число r, не делящееся на p, что $C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r$ и $m - C^{-1}(rm_1) \in B(\Gamma)$.*

Доказательство. Пусть f — изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2 и g_a ($\bar{g}_a$) — представитель смежного класса группы G_1 (соответственно G_2) по подгруппе $M = T^{(s)}$, соответствующий элементу a. Тогда $f(M) = M$ и $f(g_a) = \bar{g}_a^r m$, $m \in M$; $(r, p) = 1$. Обозначим через C ограничение f на M. Легко видеть, что $G_2 = G(M, H, \Gamma^r, rm_1)$. Следовательно, $f : G(M, H, \Gamma, m_0) \cong G(M, H, \Gamma^r, rm_1)$, причем в силу леммы 2

$C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r$ и f переводит друг в друга смежные классы групп G_1 и G_2 по подгруппе M, соответствующие одному и тому же элементу группы H. Так как $C^{-1}\Gamma_a^r C = \Gamma_a$, то по лемме 1 существует такой изоморфизм ψ группы $G_2 = G(M, H, \Gamma^r, rm_1)$ на группу $G_3 = G(M, H, \Gamma, C^{-1}(rm_1))$, что $\psi_M = C^{-1}$ (ψ_M — ограничение ψ на M) и ψ переводит друг в друга смежные классы групп G_2 и G_3 по подгруппе M, соответствующие одному и тому же элементу группы H. Отсюда следует, что расширения $G_1 = G(M, H, \Gamma, m_0)$ и G_3 эквивалентны. Значит, $m_0 - C^{-1}(rm_1) \in B(\Gamma)$.

Наоборот, если $C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r$ и $m - C^{-1}(rm_1) \in B(\Gamma)$, то расширения G_1 и G_3 эквивалентны и

$$G_3 \cong G_1 \cong G(M, H, \Gamma^r, rm_1) \cong G(M, H, \Gamma, m_1).$$

Лемма доказана.

Приведем необходимые для дальнейшего результаты из теории целочисленных p-адических представлений конечных p-групп.

Пусть $\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел. Будем говорить, что матричное $\mathbb{Z}_p$-представление Γ циклической p-группы $H = \langle a \rangle$ содержит d различных неприводимых компонент, если Γ $\mathbf{Q}_p$-эквивалентно представлению $\Gamma' = n_1\Delta_1 + \ldots + n_d\Delta_d$, $n_i \geqslant 1$; $i = 1, 2, \ldots, d$, где $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ — попарно неэквивалентные неприводимые $\mathbf{Q}_p$-представления группы H.

Л е м м а 4 [8]. *Пусть H — циклическая p-группа порядка p^h, $h \geqslant 1$. Число неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих d различных неприводимых компонент $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$, конечно тогда и только тогда, когда $d \leqslant 3$ и при $d = 3$ одно из представлений Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, является представлением первой степени.*

Л е м м а 5 [8 — 10]. *Пусть G — конечная p-группа. Число неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы G конечно тогда и только тогда, когда G — циклическая группа порядка p^r, $r \leqslant 2$.*

Отметим, что все неразложимые $\mathbb{Z}_p$-представления циклической p-группы порядка p^2 описаны в [8 — 11].

Будем говорить, что конечная группа G является дикой над кольцом $\mathbb{Z}_p$, если описание с точностью до $\mathbb{Z}_p$-эквивалентности матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы G включает задачу о паре матриц, т. е. задачу о классификации с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ (n— произвольное натуральное число).

Л е м м а 6 [12 — 14]. *Конечная p-группа G тогда и только тогда не является дикой над кольцом $\mathbb{Z}_p$, когда G — группа типа (2,2) либо циклическая группа порядка p^r ($r \leqslant 2$ при $p \neq 2$ и $r \leqslant 3$ при $p = 2$).*

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h, $h \geqslant 1$, и ε — первообразный корень степени p^{s_1} из 1, $0 \leqslant s_1 \leqslant h$. Обозначим через $\tilde{\varepsilon}$ матрицу, соответствующую оператору умножения на ε в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{k-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon]$ ($k = \varphi(p^{s_1})$, φ — функция Эйлера). Тогда произвольное неприводимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению вида $a \to \tilde{\varepsilon}$ ($0 \leqslant s_1 \leqslant h$). В силу [8] неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ с двумя неприводимыми компонентами $a \to \tilde{\varepsilon}$ и $a \to \tilde{\xi}$ (ξ — первообразный корень степени p^{s_2} из 1, $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant h$) $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению вида

$$a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta\rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\langle\delta\rangle$ — матрица над $\mathbb{Z}_p$, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta \in \mathbb{Z}_p[\xi]$ в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\xi]$ ($n = \varphi(p^{s_2})$).

Л е м м а 7 [8]. *Пусть $H = \langle a \rangle$—циклическая группа порядка p^h, $h \geqslant 2$, и Δ_i, $i = 1, 2, 3$, — неприводимые $\mathbb{Z}_p$-представления вида Δ_1: $a \to 1$; Δ_2:*

$a\to\tilde{\varepsilon}$; Δ_3: $a\to\tilde{\xi}$ $(\xi^{p^{s_2}}=\varepsilon^{p^{s_1}}=1,\ 0<s_1<s_2\leqslant h)$. *Неразложимые $\mathbb{Z}_p$-представления группы H с неприводимыми компонентами из множества $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ с точностью до эквивалентности исчерпываются следующими представлениями:*

$$\Gamma_1\colon a\to 1,\quad \Gamma_2\colon a\to\tilde{\varepsilon},\quad \Gamma_3\colon a\to\tilde{\xi},$$

$$\Gamma_4\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Gamma_5\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \langle 1\rangle\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Gamma_6^{(j)}\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \langle t^j\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon}\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_7^{(j)}\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \langle t^j\rangle & 0\\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Gamma_8^{(j)}\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \langle t^j\rangle & \langle 1\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_9\colon a\to\begin{pmatrix}\tilde{\xi} & 0 & \langle 1\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Gamma_{10}^{(i)}\colon a\to\begin{Vmatrix}\tilde{\xi} & \langle t^i\rangle & 0 & \langle 1\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

где $t=\xi-1$; $j=0,1,\ldots,\varphi(p^{s_1})-1$; $i=1,2,\ldots,\varphi(p^{s_1})-1$, *причем* $\Gamma_{10}^{(i)}$ *отсутствует, если* $p^{s_1}=2$ *(см. обозначения* (5)).

Следствие 2 [8—11]. *Пусть* $H=\langle a\rangle$ — *циклическая группа порядка* p^2 *и* $s_1=1$, $s_2=2$. *Тогда представлениями* $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_5$, $\Gamma_6^{(j)}$, $\Gamma_7^{(j)}$, $\Gamma_8^{(j)}$, Γ_9, $\Gamma_{10}^{(i)}$, $j=0,1,\ldots,p-2$; $i=1,\ldots,p-2$, *исчерпываются все неэквивалентные неразложимые* $\mathbb{Z}_p$-*представления группы* H.

Теорема 1. *Описание всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p-группы M с условием минимальности с помощью циклической группы* $H=\langle a\rangle$ *порядка* p^h, $h>3$, *включает задачу о паре матриц.*

Доказательство. Пусть ε_i — первообразный корень степени p^i из 1, $i=1,2,3,4$, E — единичная матрица порядка d (d — произвольное натуральное число) и $\tilde{\varepsilon}_i^{(d)}=\tilde{\varepsilon}_i\otimes E$ — тензорное произведение матриц $\tilde{\varepsilon}_i$ и E. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$-представления $\Gamma(A,B)$ группы $H=\langle a\rangle$ следующего вида:

$$a\to\Gamma_a(A,B)=\begin{Vmatrix}\tilde{\varepsilon}_4^{(d)} & 0 & 0 & \langle E\rangle & \langle A\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon}_3^{(d)} & 0 & \langle E\rangle & \langle B\rangle\\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_2^{(d)} & \langle E\rangle & \langle E\rangle\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_1^{(d)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & E\end{Vmatrix},$$

где $A=\|\alpha_{ij}\|$ и $B=\|\beta_{ij}\|$ — произвольные $d\times d$-матрицы над кольцом $\mathbb{Z}_p$, $\langle A\rangle=\|\langle\alpha_{ij}\rangle\|$ (см. обозначения (5)).

Пусть группы $G(M,H,\Gamma(A,B),0)$ и $G(M,H,\Gamma(A',B'),0)$ изоморфны. Тогда в силу леммы 2 представления $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ будут обобщенно эквивалентны, т. е. существует такая обратимая матрица C над кольцом $\mathbb{Z}_p$, что

$$C\Gamma_a(A,B)C^{-1}=\Gamma_a(A',B')^r, \tag{6}$$

где $(r,p)=1$. Используя [8], можно показать, что найдется такая обратимая матрица C_1 над $\mathbb{Z}_p$, что

$$C_1\Gamma_a(A',B')^rC_1^{-1}=\Gamma_a(A_1,B_1), \tag{7}$$

где A_1 и B_1 — матрицы порядка d над $\mathbb{Z}_p$. Из (6) и (7) получаем $C_2\Gamma_a(A, B)C_2^{-1} = \Gamma_a(A_1, B_1)$, где $C_2 = C_1C$. Отсюда и из [12] вытекает, что существует такая обратимая матрица C_3 над кольцом $K_p = \mathbb{Z}_p[\varepsilon_4]$, что

$$C_3AC_3^{-1} \equiv A_1 \pmod{t_4K_p}, \quad C_3BC_3^{-1} \equiv B_1 \pmod{t_4K_p},$$

где $t_4 = \varepsilon_4 - 1$.

Значит, описание всех неизоморфных расширений вида $G(M, H, \Gamma(A, B), 0)$ включает задачу о паре матриц. Теорема доказана.

Учитывая леммы 4—6 и теорему 1, в дальнейшем ограничимся описанием с точностью до изоморфизма некоторых классов расширений группы M с помощью циклической p-группы $H = \langle a \rangle$ порядка p^h, $h \geqslant 1$.

Лемма 8. *Пусть $G_1 = G(M, H, \Gamma, m_0)$. Группа $B(\Gamma)$ является нулевой тогда и только тогда, когда среди неприводимых компонент представления Γ нет единичного представления.*

Доказательство. Пусть среди неприводимых компонент $\mathbb{Z}_p$-представления Γ группы $H = \langle a \rangle$ нет единичного представления. Тогда очевидно

$$E + \Gamma_a + \Gamma_a^2 + \ldots + \Gamma_a^{p^h-1} = 0,$$

где E — единичная матрица. Отсюда следует, что $B(\Gamma) = 0$ (см. (4)).

Рассмотрим далее случай, когда среди неприводимых компонент представления Γ группы $H = \langle a \rangle$ есть единичное представление. Очевидно, можно считать, что представление Γ имеет вид

$$a \to \begin{pmatrix} \Gamma'_a & A \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

где E_1 — единичная матрица и среди неприводимых компонент $\mathbb{Z}_p$-представления Γ': $a \to \Gamma'_a$ группы $H = \langle a \rangle$ нет единичного представления. Отсюда легко следует, что в этом случае $B(\Gamma) \neq 0$. Лемма доказана.

Отметим, что расширение $G(M, H, \Gamma, m_0)$ расщепляемо тогда и только тогда, когда $A(\Gamma) = B(\Gamma)$.

Из теории расширений абелевых групп следует [15], что если $\mathbb{Z}$-представление Γ разложимо, т. е. $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_r$ (Γ_i — некоторое $\mathbb{Z}$-представление группы H; $i = 1, \ldots, r$), то

$$A(\Gamma)/B(\Gamma) \cong A(\Gamma_1)/B(\Gamma_1) \dotplus \ldots \dotplus A(\Gamma_r)/B(\Gamma_r). \tag{8}$$

Следовательно, описание группы $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ сводится к случаю, когда Γ — неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H.

Пусть $k = \varphi(p^{s_1})$,

$$\mathfrak{N} = \{\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_7^{(0)}, \Gamma_{10}^{(i)} \mid i = 1, 2, \ldots, k-1\}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{M} = \{\Gamma_d, \Gamma_r^{(j)}, \Gamma_9, \Gamma_{10}^{(i)} \mid d = 1, \ldots, 5; \quad r = 6, 7, 8; \quad j = 0, 1, \ldots, k-1;$$
$$i = 1, \ldots, k-1\} \tag{10}$$

(см. обозначения в лемме 7).

Опишем с точностью до изоморфизма все расширения $G(M, H, \Gamma, m_0)$, если $\Gamma \in \mathfrak{M}$. Пусть $\Phi_{p^r}(x)$ — полином деления круга порядка p^r и

$$\Phi_{p^{s_1}}(x) = -\alpha_1 - \alpha_2 x - \ldots - \alpha_k x^{k-1} + x^k \quad (\alpha_i \in \{0; -1\}, \quad k = \varphi(p^{s_1})),$$

$$\Phi_{p^{s_2}}(x) = -\beta_1 - \beta_2 x - \ldots - \beta_n x^{n-1} + x^n \quad (\beta_i \in \{0, -1\}, \quad n = \varphi(p^{s_2})).$$

Тогда

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_k \end{pmatrix}; \qquad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \beta_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Л е м м а 9. *Если* $\Gamma \in \mathfrak{R}$, *то расширение* $G(M, H, \Gamma, m_0)$ *расщепляемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma = \Gamma_4$. В силу (3)

$$A(\Gamma_4) = \{x \in M = T^{(k+1)} \mid \Gamma_4(a)(x) = x\},$$

где $x = (u_1, \dots, u_{k+1})$ $(u_i \in T;\ i = 1, 2, \dots, k+1)$.

Обозначим $x_1 = (u_1, \dots, u_k)$, $x_2 = u_{k+1}$. Пусть $x = (x_1, x_2) \in A(\Gamma_4)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(см. обозначения (2)). Отсюда получаем $\tilde{\varepsilon} x_1 + \langle 1 \rangle x_2 = x_1$. Следовательно,

$$u_j = (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) u_k + p u_k, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad x_2 = p u_k.$$

Значит, $A(\Gamma_4) \cong T$. Из (4) легко следует, что $B(\Gamma_4) = A(\Gamma_4)$, т. е. расширение $G(M, H, \Gamma_4, m_0)$ расщепляемо.

Пусть, далее, $\Gamma = \Gamma_{10}^{(i)}$, $L_i = \Gamma_{10}^{(i)}(a)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $t = \xi - 1$, $t^i = \gamma_0^{(i)} + \gamma_1^{(i)}\xi + \dots + \gamma_{n-1}^{(i)}\xi^{n-1}$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}_p$; $i = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда

$$\langle t^i \rangle = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_0^{(i)} \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_1^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{n-1}^{(i)} \end{vmatrix}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{12}$$

Пусть $x \in A(\Gamma_{10}^{(i)})$. Представим x в виде $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_1 = (y_1, \dots, y_n)$, $x_2 = (u_1, \dots, u_k)$, $y_i \in T$, $u_r \in T$, $x_3 \in T$, $x_4 \in T$. Тогда $L_i(x) = x$. Отсюда следует

$$\tilde{\xi} x_1 + \langle t^i \rangle x_2 + \langle 1 \rangle x_3 = x_1, \tag{13}$$

$$\tilde{\varepsilon} x_2 + \langle 1 \rangle x_4 = x_2. \tag{14}$$

Из (14) находим

$$u_j = (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) u_k + p u_k, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad x_4 = p u_k.$$

Далее из (13) следует

$$y_j = (\beta_1 + \dots + \beta_j) y_n + (\gamma_0^{(i)} + \dots + \gamma_{j-1}^{(i)}) u_k + p y_n,$$
$$j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_3 = p y_n.$$

Таким образом, $A(\Gamma_{10}^{(i)}) \cong T \dotplus T$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Нетрудно показать, что

$$E + L_i + L_i^2 + \dots + L_i^{p^h - 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & p^h E_2 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица и E_2 — единичная матрица второго порядка. Поэтому $B(\Gamma_{10}^{(i)}) = T \dotplus T$. Значит, $A(\Gamma_{10}^{(i)}) = B(\Gamma_{10}^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Следовательно, расширение $G(M, H, \Gamma_{10}^{(i)}, m_0)$ расщепляемо. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* Γ *является* $\mathbb{Z}_p$*-представлением группы* $H = \langle a \rangle$ *вида* $\Gamma = n_1\Gamma'_1 + \dots + n_r\Gamma'_r$, $n_i \geqslant 1$, *где* $\Gamma'_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, \dots, r$. *Тогда расширение* $G(M, H, \Gamma, m_0)$ *расщепляемо.*

Справедливость утверждения вытекает из формулы (8) и леммы 9.

Л е м м а 10. *Для представлений из множества* $\mathfrak{M}$ *обобщенная эквивалентность совпадает с обычной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно показать, что каждое представление $\Gamma : a \to \Gamma(a)$ из множества $\mathfrak{M}$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению $\Gamma^{(r)}: a \to \Gamma(a)^r$, где $(r, p) = 1$. Это утверждение легко проверяется, если $\Gamma \in \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_9\}$.

Пусть $\Gamma = \Gamma_6^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Обозначим $\Gamma_6^{(j)} = \Gamma_j'$ и $\overline{\Gamma}_j': a \to \overline{\Gamma}_j'(a) = \| \alpha_{il}^{(j)} + p\mathbb{Z}_p \|$, где $\Gamma_j'(a) = \| \alpha_{il}^{(j)} \|$, $\alpha_{il}^{(j)} \in \mathbb{Z}_p$. Как известно [16], представление $\overline{\Gamma}_j'$ группы $H = \langle a \rangle$ эквивалентно над полем $\overline{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ представлению

$$a \to \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & V_{s-j} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $s = k + n$ и V_j — жорданова клетка порядка j с единицами по главной диагонали. Очевидно, что представление $\overline{\Gamma}_j'^{(r)}$ группы $H = \langle a \rangle$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению (15), если $(r, p) = 1$. Значит, представления $\overline{\Gamma}_j'$ и $\overline{\Gamma}_j'^{(r)}$, $(r, p) = 1$, группы $H = \langle a \rangle$ $\overline{\mathbb{Z}}_p$-эквивалентны. Отсюда и из (15) легко следует, что представление $(\Gamma_j')^{r(r)}$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению Γ_j', $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть Γ и Γ' — представления группы $H = \langle a \rangle$ одной и той же степени с неразложимыми компонентами из множества $\mathfrak{M}$. Из лемм 2 и 10 вытекает, что расширения $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Gamma', m_0')$ не изоморфны, если представления Γ и Γ' не эквивалентны над Z_p.

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $G(\Gamma, m_0) = G(M, H, \Gamma, m_0)$.

Теорема 2. *Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h, $h \geqslant 1$, и M — полная абелева p-группа с условием минимальности. Все неизоморфные нерасщепляемые расширения группы M с помощью группы H, соответствующие представлениям из множества $\mathfrak{M}$, исчерпываются следующими группами:*

$$G(\Gamma_2, m_2),\ m_2 = (\alpha_1 a_0, (\alpha_1 + \alpha_2)\, a_0, \ldots, (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})\, a_0, a_0),$$

$$G(\Gamma_3, m_3),\ m_3 = (\beta_1 a_0, (\beta_1 + \beta_2)\, a_0, \ldots, (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})\, a_0, a_0),$$

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4),\ m_4 = (a_0 + \beta_1 a_1, a_0 + (\beta_1 + \beta_2)\, a_1, \ldots$$
$$\ldots, a_0 + (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})\, a_1, a_1, m_2),$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_5),\ m_5 = (m_3, 0, \ldots, 0), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}),\ \ m_6^{(j)} = (\gamma_0^{(j)} a_0, (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)})\, a_0, \ldots, (\gamma_0^{(j)} + \ldots + \gamma_{n-2}^{(j)})\, a_0, 0, m_2),$$
$$j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$G(\Gamma_7^{(j)}, m_7), \quad m_7 = (m_3, 0, \ldots, 0), \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$G(\Gamma_8^{(0)}, m_8),\ m_8 = (0, \ldots, 0, m_2, -a_0),$$

$$G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)}),\ m_8^{(j)} = (m_6^{(j)}, 0), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$G(\Gamma_9, m_9),\ m_9 = (m_3, 0, \ldots, 0),$$

где $\{a_r\}$ — образующие элементы группы T $(pa_0 = 0,\ \ pa_r = a_{r-1};\ r = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд наиболее типичных случаев. Пусть $\Gamma = \Gamma_2$ и $x = (u_1, \ldots, u_k) \in A(\Gamma_2)$ $(u_i \in T,\ i = 1, 2, \ldots, k)$, т. е. $\tilde{\varepsilon} x = x$. Отсюда и из (11) получаем

$$u_i = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_i)\, u_k, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad pu_k = 0. \tag{16}$$

Следовательно, $A(\Gamma_2)$ — группа порядка p. В силу леммы 8 $B(\Gamma_2) = 0$. Пусть $u_k = \lambda a_0$, $0 < \lambda < p$, и $C = \lambda^{-1} E$ (E — единичная матрица порядка k). Из следствия 1 вытекает, что группа $G(\Gamma_2, x)$ изоморфна группе $G(\Gamma_2, m_2)$, где $m_2 = (\alpha_1 a_0, (\alpha_1 + \alpha_2)\, a_0, \ldots, (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})\, a_0, a_0)$.

Пусть далее $\Gamma = \Gamma_6^{(j)}$, $0 \leqslant j < k$. Ввиду леммы 8 $B(\Gamma_6^{(j)}) = 0$. Найдем $A(\Gamma_6^{(j)})$. Пусть $x \in A(\Gamma_6^{(j)})$. Представим x в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 = (y_1, \dots, y_n)$ и $x_2 = (u_1, \dots, u_k)$, $y_i \in T$, $u_r \in T$. Тогда $\Gamma_a(x) = x$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle t^j \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\tilde{\xi} x_1 + \langle t^j \rangle x_2 = x_1, \tag{17}$$

$$\tilde{\varepsilon} x_2 = x_2. \tag{18}$$

Из (16) и (18) находим

$$x_2 = (\alpha_1 u_k, (\alpha_1 + \alpha_2) u_k, \dots, (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) u_k, u_k), \tag{19}$$

где $pu_k = 0$.

В силу (17) и (11)

$$y_i = (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)} + \dots + \gamma_{i-1}^{(j)}) u_k + (\beta_1 + \dots + \beta_i) y_n - py_n +$$
$$+ (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)} + \dots + \gamma_{n-1}^{(j)}) u_k = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{20}$$

Пусть $j = 0$. Тогда из (19) и (20) получаем $u_k = py_n$ и $p^2 y_n = 0$. Значит, $A(\Gamma_6^{(0)})$—циклическая группа порядка p^2. Отсюда и из следствия 1 легко следует, что могут быть только такие неизоморфные нерасщепляемые расширения группы M с помощью группы H, соответствующие представлению $\Gamma_6^{(0)}$:

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4),\ m_4 = (a_0 + \beta_1 a_1, \dots, a_0 + (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) a_1, a_1, m_2),$$

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_5),\ m_5 = (\beta_1 a_0, (\beta_1 + \beta_2) a_0, \dots, (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) a_0, a_0, 0, \dots, 0).$$

Покажем, что группы $G(\Gamma_6^{(0)}, m_4)$ и $G(\Gamma_6^{(0)}, m_5)$ неизоморфны. Пусть $G(\Gamma_6^{(0)}, m_4) \cong G(\Gamma_6^{(0)}, m_5)$. Тогда в силу леммы 3 существуют такие матрица $C \in GL(n+k, \mathbb{Z}_p)$ и натуральное число r, не делящееся на p, что $C^{-1}\Gamma_6^{(0)}(a) C = (\Gamma_6^{(0)}(a))^r$ и $C(rm_4) = m_5$. Очевидно, матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 \end{pmatrix},$$

где $C_1 \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ и $C_3 \in GL(k, \mathbb{Z}_p)$. Тогда из $C(rm_4) = m_5$ получаем $rC_3 m_2 = 0$, т. е. $C_3 \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p}$. Полученное противоречие показывает, что группы $G(\Gamma_6^{(0)}, m_4)$ и $G(\Gamma_6^{(0)}, m_5)$ неизоморфны.

Пусть далее $j > 0$ и $j < k$. Тогда $\gamma_0^{(j)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(j)} = 0$. Отсюда и из (19) и (20) получаем $pu_k = 0$ и $py_n = 0$. Следовательно, $A(\Gamma_6^{(j)})$ — абелева группа типа (p, p). Ввиду следствия 1 группа $G(\Gamma_6^{(j)}, m_0)$ изоморфна одной из таких групп:

$$G(\Gamma_6^{(j)}, 0), \quad G(\Gamma_6^{(j)}, m_5), \quad G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}(\lambda)),$$

где $m_6^{(j)}(\lambda) = ((\gamma_0^{(j)} + \beta_1\lambda) a_0, \dots, (\gamma_0^{(j)} + \dots + \gamma_{n-2}^{(j)}) a_0 + (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) \times \lambda a_0, \lambda a_0, m_2)$, $0 \leqslant \lambda < p$.

Аналогично случаю $j = 0$ доказывается, что группы $G(\Gamma_6^{(j)}, m_5)$ и $G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}(\lambda))$ неизоморфны $(1 \leqslant j < k)$.

Покажем, что группы $G(\Gamma_6^{(j)}, m_6(0))$ и $G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}(\lambda))$ изоморфны $(1 \leqslant j < k;\ 0 \leqslant \lambda < p)$. Воспользуемся следствием 1. Пусть $A_j = \Gamma_6^{(j)}(a)$ и C — такая обратимая матрица над $\mathbb{Z}_p$, что

$$CA_j = A_j C, \quad 1 \leqslant j < k. \tag{21}$$

Отсюда следует

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 \end{pmatrix},$$

где $C_1 \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Положим $C_3 = E$ (E — единичная матрица порядка k). Тогда из (21) получаем

$$\tilde{\xi} C_1 = C_1 \tilde{\xi}, \tag{22}$$

$$\tilde{\xi} C_2 + \langle t^j \rangle = C_1 \langle t^j \rangle + C_2 \tilde{\varepsilon}. \tag{23}$$

Столбцы матриц C_1 и C_2 будем рассматривать как элементы кольца $\mathbb{Z}_p[\xi]$. Значит, $C_1 = (b_1, \dots, b_n)$, $C_2 = (v_1, \dots, v_k)$, где $b_i \in \mathbb{Z}_p[\xi]$, $i = 1, \dots$ $\dots, n$, $v_r \in \mathbb{Z}_p[\xi]$, $r = 1, 2, \dots, k$. Из (22) вытекает

$$C_1 = (b_1, \xi b_1, \dots, \xi^{k-1} b_1). \tag{24}$$

Очевидно, $C_1 \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ тогда и только тогда, когда $b_1 \in \mathbb{Z}_p[\xi]^*$ (R^* — мультипликативная группа кольца R с единицей). Из (23) и (24) получаем

$$v_i = v_1 \xi^{i-1},\ i = 2, 3, \dots, k,\ b_1 = 1 + v_1 \theta t^{k-j},$$

где

$$\Phi_{p^{s_1}}(\xi) = \theta t^k, \quad \theta \in \mathbb{Z}_p[\xi]^*. \tag{25}$$

Положим

$$v_1 = \lambda \xi^{n-k}. \tag{26}$$

Тогда

$$b_1 = 1 + \lambda \theta \xi^{n-k} t^{k-j}. \tag{27}$$

В силу следствия 1 осталось показать, что $C(m_6^{(j)}(0)) = m_6^{(j)}(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda < p$, т. е. проверить справедливость равенства

$$C_1 \tilde{m}_6^{(j)}(0) + C_2 m_2 = \tilde{m}^{(j)}(\lambda), \tag{28}$$

где $m_6^{(j)}(\lambda) = (\tilde{m}_6^{(j)}(\lambda), m_2)$, $\tilde{m}_6^{(j)}(\lambda) = ((\gamma_0^{(j)} + \beta_1 \lambda) a_0, \dots, (\gamma_0^{(j)} + \dots + \gamma_{n-2}^{(j)}) \times$ $\times a_0 + (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) \lambda a_0, \lambda a_0)$.

Пусть

$$w_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi + \dots + (\alpha_1 + \dots \alpha_k)\xi^{k-1},$$

$$w_2 = \beta_1 + (\beta_1 + \beta_2)\xi + \dots + (\beta_1 + \dots + \beta_n)\xi^{n-1},$$

$$w^{(j)} = \gamma_0^{(j)} + (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)})\xi + \dots + (\gamma_0^{(j)} + \dots + \gamma_{n-2}^{(j)})\xi^{n-2},$$

$$j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Очевидно, $\tilde{m}_6^{(j)}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\tilde{m}_6^{(j)}(\lambda) = (w^{(j)} + \lambda w_2)(a_0).$$

Тогда равенство (28) можно переписать в виде

$$(b_1 w^{(j)} + v_1 w_1 - (w^{(j)} + \lambda w_2))(a_0) = 0. \tag{29}$$

Покажем, что

$$b_1 w^{(j)} + v_1 w_1 = w^{(j)} + \lambda w_2. \tag{30}$$

Легко проверить, что

$$w_1 t = \Phi_{p^{s_1}}(\xi) - p\xi^k,$$

$$w_2 t = -p\xi^n t w^{(j)} = -t^j.$$

Так как $p = \theta_1 t^n$, $\theta_1 \in \mathbb{Z}_p[\xi]^*$, то в силу (25)

$$w_1 = \theta t^{k-1} - \theta_1 \xi^k t^{n-1}, \tag{31}$$

$$w_2 = -\theta_1 \xi^n t^{n-1}, \quad w^{(j)} = -t^{j-1}.$$

Из (26), (27) и (31) получаем $b_1 w^{(j)} + v_1 w_1 = -(1 + \lambda\xi^{n-k}\theta t^{k-j})t^{j-1} + \lambda\xi^{n-k} \times$ $\times (\theta t^{k-1} - \theta_1\xi^k t^{n-1}) = -t^{j-1} - \lambda\theta_1\xi^n t^{n-1} = w^{(j)} + \lambda w_2$. Следовательно, справедливо равенство (30), а значит, и (29). Тем самым доказано, что группы $G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}(\lambda))$ и $G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}(0))$ изоморфны.

Наконец, рассмотрим случай $\Gamma = \Gamma_8^{(j)}$, $0 \leqslant j < k$. Найдем сначала $A(\Gamma_8^{(j)})$. Пусть $x \in A(\Gamma_8^{(j)})$. Запишем x в виде $x = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 = (y_1, \ldots, y_n)$, $x_2 = (u_1, \ldots, u_k)$ $(y_i \in T, \quad u_r \in T, \quad x_3 \in T)$. Из условия $\Gamma_8^{(j)}(a)x = x$ получаем $\varepsilon x_2 = x_2$, $\xi x_1 + \langle t^j \rangle x_2 + \langle 1 \rangle x_3 = x_1$. Отсюда следует

$$u_i = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_i) u_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \quad pu_k = 0,$$
$$y_r = (\beta_1 + \ldots + \beta_r) y_n + (\gamma_0^{(j)} + \ldots + \gamma_{r-1}^{(j)}) u_k + x_3, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$x_3 = py_n - (\gamma_0^{(j)} + \ldots + \gamma_{n-1}^{(j)}) u_k.$$

Таким образом, $A(\Gamma_8^{(j)}) \cong T \dot{+} C_p$, $j = 0, 1, \ldots, k$, где C_p — группа порядка p.

Очевидно, $B(\Gamma_8^{(j)}) \cong T$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Значит, $A(\Gamma_8^{(j)})/B(\Gamma_8^{(j)}) \cong$ $\cong C_p$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Теперь на основании следствия 1 нетрудно показать, что группа $G(\Gamma_8^{(j)}, m_0)$ изоморфна одной из таких групп: $G(\Gamma_8^{(j)}, 0)$, $G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)})$, где $m_8^{(0)} = (0, \ldots, 0, m_2, -a_0)$, $m_8^{(i)} = (m_6^{(i)}(0), 0)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично случаям Γ_2 и $\Gamma_8^{(j)}$; при этом существенно используется тот факт, что группа расширений $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ в этих случаях — циклическая группа порядка p. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h, $h \geqslant 1$ и $\Gamma = \Gamma_1' + \ldots + \Gamma_r'$, где $\Gamma_j' \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Произвольное расширение группы M с помощью группы H, соответствующее $\mathbb{Z}_p$-представлению Γ, расщепляемо тогда и только тогда, когда $\Gamma_j' \in \mathfrak{N}$, $j = 1, 2, \ldots, r$ (см. обозначения (9) и (10)).*

Справедливость следствия вытекает из формулы (8), леммы 9 и теоремы 2.

Замечание 2. Из следствий 2 и 5 нетрудно получить критерий расщепляемости произвольного расширения группы M с помощью циклической группы порядка p^h, $1 \leqslant h \leqslant 2$.

Замечание 3. Из леммы 9, теоремы 2 и формулы (8) вытекает описание всех неэквивалентных расширений группы M с помощью циклической p-группы порядка p^h, $1 \leqslant h \leqslant 2$.

Пусть Γ — произвольное $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ порядка p^h $(h \geqslant 1)$ и $\Gamma = \Gamma_1' + \ldots + \Gamma_r'$, где Γ_i' — некоторое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда в расширении $G(M, H, \Gamma, m)$ H-модуль M имеет вид $M = W_1 \dot{+} \ldots \dot{+} W_r$, где W_i — H-модуль, соответствующий Γ_i', $ax_i = \Gamma_i'(a)(x_i)$, $x_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, r$. Поэтому, учитывая формулу (8), расширение $G(\Gamma, m) = G(M, H, \Gamma, m)$ можно записывать также в виде

$$G(\Gamma_1' + \ldots + \Gamma_r', (m_1', \ldots, m_r')),$$

где $m_i' \in A(\Gamma_i') \subset W_i$, $\quad i = 1, \ldots, r$.

Лемма 11. *Пусть Γ — произвольное $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ и $m \in A(\Gamma)$. Расширения $G(d\Gamma, \lambda_1 m, \ldots, \lambda_d m) = G_1$ и $G(d\Gamma, (m, 0, \ldots \ldots, 0)) = G_2$ изоморфны (d — произвольное натуральное число; $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p^*$, $i = 1, \ldots, d$).*

Доказательство. Пусть q — степень представления Γ, E — единичная матрица порядка q, $B_i = \Gamma(a)$, $i = 1, \ldots, d$, $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_d)$ и

$$C = \begin{vmatrix} \lambda_1^{-1}E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_1^{-1}E & \lambda_2^{-1}E & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{-1}E & 0 & \ldots & 0 & \lambda_d^{-1}E \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что $BC = CB$. В силу следствия 1 группы G_1 и G_2 будут изоморфными. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть* $\Gamma \in \mathfrak{M}$ *и* d — *произвольное натуральное число. Тогда группа* $G(d\Gamma, (m'_1, \dots, m'_d))$, $m'_i \in A(\Gamma)$, $i = 1, \dots, d$, *изоморфна группе* $G(d\Gamma, (m_0, 0, \dots, 0))$, $m_0 \in A(\Gamma)$.

Доказательство. Из теоремы 2 и леммы 11 легко следует справедливость предложения, если $\Gamma \neq \Gamma_6^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Пусть $\Gamma = \Gamma_6^{(j)}$, $0 \leqslant j < k$. Рассмотрим сначала случай $j = 0$. Достаточно показать, учитывая лемму 11, что

$$G(2\Gamma_6^{(0)}, (m_4, m_5)) \cong G(2\Gamma_6^{(0)}, (m_4, 0)). \tag{32}$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_6^{(0)}(a) & 0 \\ 0 & \Gamma_6^{(0)}(a) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -pE & E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка $n + k$. Легко проверить, что $CA = AC$ и

$$C\begin{pmatrix} m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из следствия 1 вытекает (32).

Осталось показать, что

$$G(2\Gamma_6^{(j)}, (m_6^{(j)}, m_5)) \cong G(2\Gamma_6^{(j)}, (m_6^{(j)}, 0)), \qquad j = 1, 2, \dots, k-1. \tag{33}$$

Пусть

$$B_j = \begin{pmatrix} \Gamma_6^{(j)}(a) & 0 \\ 0 & \Gamma_6^{(j)}(a) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответственно порядков n и k; $A_1 = (b_1, \xi b_1, \dots, \xi^{n-1} b_1)$, $b_1 = -\theta t^{k-j} \xi^{n-k}$, $A_2 = (v_1, \xi v_1, \dots, \xi^{k-1} v_1)$, $v_1 = -\xi^{n-k}$ (см. обозначения (25)). Легко проверить, что $B_j C = C B_j$ и

$$C\begin{pmatrix} m_6^{(j)} \\ m_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_6^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из следствия 1 получаем (33). Предложение доказано.

Замечание 4. Из предложения 1 следует, что описание неизоморфных расширений $G(d\Gamma, m)$ сводится к описанию неизоморфных расширений $G(\Gamma, m_0)$, которые приведены в теореме 2.

Предложение 2. *Пусть* $H = \langle a \rangle$ — *циклическая* p-*группа порядка* p^h, $h \geqslant 1$, *и* Γ — *вполне приводимое* $\mathbb{Z}_p$-*представление группы* H, *содержащее* d *различных неприводимых компонент* $\Delta_1, \dots, \Delta_d$. *Если среди представлений* Δ_i, $i = 1, 2, \dots, d$, *нет единичного представления, то число* r *неизоморфных расширений группы* M *с помощью группы* H, *соответствующих представлению* Γ, *равно* 2^d. *В противном случае* $r = 2^{d-1}$.

Справедливость предложения вытекает из леммы 3 и теоремы 2.

Пусть $H = \langle a \rangle$ — группа порядка p. Тогда все неразложимые $\mathbb{Z}_p$-представления группы H исчерпываются представлениями (см. лемму 7):

$$\Gamma'_1 : a \to \tilde{\varepsilon}; \quad \Gamma'_2 : a \to 1; \quad \Gamma'_3 : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon^p = 1$ и $\varepsilon \neq 1$.

Теорема 3. *Пусть* $H = \langle a \rangle$ — p-*группа порядка* p *и* $\Gamma = n_1\Gamma'_1 + n_2\Gamma'_2 + n_3\Gamma'_3$, $n_i \geqslant 0$; $i = 1, 2, 3$; $n_1 + n_2 + n_3 > 0$. *Если* $n_1 = 0$, *то расширение* $G(\Gamma, m_0)$ *расщепляемо. При* $n_1 > 0$ *существуют точно два неизо-*

морфных расширения $G(\Gamma, 0)$ *и* $G(n_1\Gamma'_1 + n_2\Gamma'_2 + n_3\Gamma'_3, (m_0, 0, \ldots, 0))$, *где* $m_0 = (-a_0, -2a_0, \ldots, -(p-2)\,a_0, a_0)$, $a_0 \in T$, $pa_0 = 0$.

Справедливость теоремы следует из теоремы 2, лемм 9 и 11.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups.— Berlin: Springer, 1972.— 464 p.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973.— 210 p.
5. *Hartley B.* A dual approach to Cernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1977.— P. 215—239.
6. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
7. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
8. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, № 4.— С. 875—910.
9. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР.— 1962.— **145**, № 6.— С. 1199—1201.
10. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers // Ann. Math.— 1962.— **76**.— P. 73—92;— 1963.— **77**.— P. 318—328.
11. *Ройтер А. В.* О представлениях группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1960.— № 19.— С. 65—74.
12. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1978.— **148**.— С. 96—105.
13. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР.— 1961.— **140**, № 5.— С. 1011—1014.
14. *Яковлев А. В.* Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— **28**.— С. 93—129.
15. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.
16. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об алгебрах модулярных и целочисленных представлений конечных групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, № 5.— С. 963—987.

Получено 15.01.92