УДК 519.7

Б. Н. Пшеничный, чл.-корр. АН Украины
(Ин-т кибернетики АН Украины, Киев)

Необходимые условия экстремума, штрафные функции и регулярность

Формулируются общие условия регулярности точки относительно системы нелинейных уравнений. Показано, что если выполнены условия регулярности, то общая задача математического программирования может быть сведена к минимизации негладкой штрафной функции и необходимые условия экстремума могут быть сформулированы в наиболее общей форме.

Сформульовані загальні умови регулярності точки відносно системи нелінійних рівнянь Якщо ці умови задовольняються, то загальна задача математичного програмування може бути зведена до задачі мінімізації недиференційованої штрафної функції, що дає змогу формулювати необхідні умови екстремуму в найбільш загальній формі.

Цель настоящей статьи — показать, что три указанных в названии понятия в условиях общих оптимизационных задач тесно связаны между собой. Каждое из этих понятий исследовалось в многочисленных работах, где также устанавливались различные соотношения между ними. Здесь мы приведем, по-видимому, наиболее общие формулировки и покажем, что при наличии регулярности необходимые условия экстремума в форме правила множителей Лагранжа всегда выполняются. Особо необходимо отметить, что для наиболее полного описания точки экстремума в задачах с негладкими ограничениями условия оптимальности надо формулировать не в виде одного правила множителей, а в виде целого семейства таких правил. Только это позволяет избежать ситуации, когда необходимые условия выполняются в точках, которые заведомо не могут быть оптимальными.

1. Основные обозначения. В дальнейшем под X будем понимать банахово пространство, сопряженное к которому обозначим через X^*. При этом для $x \in X$, $x^* \in X^*$ через $\langle x, x^* \rangle$ обозначено значение линейного непрерывного функционала x^* на элементе x. С целью упрощения изло-

жения все рассматриваемые далее функции будем предполагать удовлетворяющими локальному условию Липшица.

Если $A, B \subseteq X$, то

$$\rho_A(x) = \inf_y \{\| y - x \| : y \in A\},$$

$$\rho(B, A) = \sup_x \{\rho_A(x) : x \in B\},$$

$$\Delta(A, B) = \max\{\rho(B, A), \rho(A, B)\}.$$

Для данной функции f положим $f^+ = f$, $f^- = -f$ и

$$\mathcal{D}f(x, \bar{x}) = \lim_{\bar{y} \to \bar{x}} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda\bar{y}) - f(x)}{\lambda},$$

$$\mathcal{D}^0 f(x, \bar{x}) = \lim_{y \to x} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(y + \lambda\bar{x}) - f(y)}{\lambda}.$$

Известно, что функция $\mathcal{D}^0 f$ характеризуется следующими свойствами: она выпукла, положительно однородна по $\bar{x}$ и $\mathcal{D}^0 f(x, \bar{x}) \leqslant L \|\bar{x}\|$, где L — локальная константа Липшица.

Если $M \subseteq X$ и $x \in M$, то положим

$$T_M^0(x) = \{\bar{x} : \mathcal{D}^0 \rho_M(x, \bar{x}) \leqslant 0\}.$$

В силу свойства операции $\mathcal{D}^0$ $T_M^0(x)$ — выпуклый замкнутый конус. Приведенные свойства операции D^0 изучались во многих работах. Впервые в широкое употребление ее ввел Ф. Кларк (см., в частности, [1]).

Будем называть направление $\bar{x}$ касательным к M в точке x, если $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \dfrac{\rho_M(x + \lambda\bar{x})}{\lambda} = 0$. Очевидно, что конус $T_M^0(x)$ состоит из касательных направлений.

Выпуклый конус $T_M(x)$ будем называть касательным конусом к M в точке $x \in M$, если он состоит из касательных направлений.

2. Верхние выпуклые аппроксимации (в. в. а.).

Определение 1. *Функция $h(\bar{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией f в точке x, если она положительно однородна, выпукла, замкнута и*

$$h(\bar{x}) \geqslant \mathcal{D}f(x, \bar{x}) \quad \forall \bar{x}.$$

Множество

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle \bar{x}, x^* \rangle \leqslant h(\bar{x})\}$$

называется субдифференциалом f в точке x.

Из выпуклого анализа [2] известно, что при сделанных предположениях $\partial f(x) \neq \varnothing$ и

$$h(\bar{x}) = \max_{x^*} \{\langle \bar{x}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}.$$

Необходимо отметить, что в. в. а. определена неоднозначно, и поэтому желательно строить возможно более полные семейства в. в. а для функции f в данной точке x. Это позволяет сформулировать наиболее полные необходимые условия экстремума.

Так как очевидно $\mathcal{D}^0 f(x, \bar{x}) \geqslant \mathcal{D}f(x, \bar{x})$, то $\mathcal{D}^0 f(x, \bar{x})$ всегда является в. в. а. Соответствующий ей субдифференциал обозначается через $\partial^0 f(x)$. При этом элементарно проверяется, что $\mathcal{D}^0 f^-(x, \bar{x}) = \mathcal{D}^0 f(x, -\bar{x})$ и поэтому $\partial^0 f^-(x) = -\partial^0 f(x)$. Для произвольных субдифференциалов это соотношение не верно.

Класс функций, допускающих верхние выпуклые аппроксимации, очень широк. Со способами вычисления в. в. а. можно подробнее познакомиться в книге [2]. Отметим также, что квазидифференцируемые функции, изучаемые в [3], также имеют в. в. а., легко вычисляемые по их суб- и супердифференциалам [3].

Для иллюстрации приведем следующую легко доказываемую теорему.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывная выпуклая функция. Тогда*

$$\mathcal{D}f(x, \bar{x}) = f'(x, \bar{x}) \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda \bar{x}) - f(x)}{\lambda}$$

является в.в.а., а соответствующий субдифференциал ∂f совпадает с субдифференциалом $\partial^0 f$ и с обычным субдифференциалом выпуклой функции.

В то же время

$$\mathcal{D}f^-(x, \bar{x}) = -f'(x, \bar{x}) \leqslant \langle \bar{x}, -x^* \rangle$$

для любого элемента $x^* \in \partial f(x)$, и поэтому $-x^*$ является субдифференциалом $f^- = -f$ при любом выборе $x^* \in \partial f(x)$.

Эта теорема демонстрирует характерную особенность. Субдифференциал Кларка $\partial^0 f^-$ определен однозначно и равен $-\partial^0 f(x)$. В то же время при использовании в. в. а. получаем целое семейство субдифференциалов.

3. Штрафные функции. Пусть теперь $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — локально липшицевы функции, а M — произвольное множество.

Рассмотрим задачу $P(0)$: найти

$$V(0) = \inf_x \{f_0(x) : f_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m},\ x \in M\}.$$

Тот факт, что рассматриваются лишь ограничения типа неравенства, не снижает общности, так как ограничение $f(x) = 0$ эквивалентно двум неравенствам $f(x) \leqslant 0$, $-f(x) \leqslant 0$, чем мы в дальнейшем воспользуемся.

Пусть

$$V(y) = \inf_x \{f_0(x) : f_i(x) \leqslant y_i,\ i = \overline{1, m},\ x \in M\},$$

$$F(x) = \max\{0, f_1(x), \ldots, f_m(x)\},$$

$$\Phi_N(x) = f_0(x) + NF(x).$$

Очевидна следующая цепочка равенств:

$$\inf_{x \in M} \Phi_N(x) = \inf_{x, \lambda} \{f_0(x) + N\lambda : 0 \leqslant \lambda,\ f_1(x) \leqslant \lambda, \ldots, f_m(x) \leqslant \lambda,\ x \in M\} =$$

$$= \inf_{\lambda \geqslant 0} [V(\lambda \mathbf{1}) + N\lambda], \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \in R^m. \tag{1}$$

Отсюда следует, что если нижняя грань в правой части (1) достигается только при $\lambda = 0$, т. е.

$$V(\lambda \mathbf{1}) - V(0) > -N\lambda, \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

то

$$V(0) = \inf_x \{\Phi_N(x) : x \in M\}. \tag{3}$$

Таким образом, если (2) выполнено, то нижняя грань в задаче $P(0)$ совпадает с нижней гранью $\Phi_N(x)$ при $x \in M$. Покажем, что справедлив более сильный факт, а именно, точки, в которых достигается минимум в задаче $P(0)$, и точки минимума $\Phi_N(x)$, совпадают.

Теорема 2. *Пусть*

$$\inf_{\lambda > 0} \frac{V(\lambda \mathbf{1}) - V(0)}{\lambda} = -L > -\infty, \tag{4}$$

и $N > L$. Тогда точки минимума задачи $P(0)$ и задачи $\inf_x \{\Phi_N(x) : x \in M\}$ совпадают.

Замечание. Так как $V(\lambda\mathbf{1})$, — очевидно, убывающая функция λ, то $L \geqslant 0$.

Доказательство. Из (4) следует $V(\lambda\mathbf{1}) + N\lambda > V(0)$ при $\lambda > 0$. Пусть $x_0 \in M$ и $\Phi_N(x_0) = \inf_x \{\Phi_N(x) : x \in M\}$. Далее,

$$\inf_x \{f_0(x) + NF(x) : x \in M\} \leqslant \inf_x \{f_0(x) : f_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m},\ x \in M\},$$

т. е.

$$V(0) \geqslant \inf_x \{\Phi_N(x) : x \in M\}. \tag{5}$$

Покажем, что $F(x_0) = 0$. Допустим противное, т. е. допустим, что $\lambda_0 = F(x_0) > 0$. Имеем

$$f_0(x_0) + NF(x_0) = \min_x \{f_0(x) + NF(x) : x \in M\} \leqslant$$
$$\leqslant \min_x \{f_0(x) + NF(x) : x \in M,\ F(x) \leqslant \lambda_0\} \leqslant$$
$$\leqslant \min_x \{f_0(x) + N\lambda_0 : x \in M,\ F(x) \leqslant \lambda_0\} = V(\lambda_0\mathbf{1}) + N\lambda_0.$$

С другой стороны,

$$f_0(x_0) + NF(x_0) = f_0(x_0) + N\lambda_0 \geqslant$$
$$\geqslant \min \{f_0(x) + N\lambda_0 : x \in M,\ F(x) \leqslant \lambda_0\} \geqslant V(\lambda_0\mathbf{1}) + N\lambda_0.$$

Таким образом,

$$f_0(x_0) + NF(x_0) = V(\lambda_0\mathbf{1}) + N\lambda_0.$$

Отсюда, из (4), (5) и того, что $N > L$, получаем

$$V(0) \geqslant f_0(x_0) + NF(x_0) = V(\lambda_0\mathbf{1}) + N\lambda_0 > V(0),$$

так как $\lambda_0 = F(x_0) > 0$. Итак, $F(x_0) = 0$, откуда следует, что точка $x_0 \in M$ удовлетворяет всем ограничениям задачи $P(0)$. Поэтому $f_0(x_0) \geqslant V(0)$. Но согласно (5)

$$V(0) \geqslant f_0(x_0) + NF(x_0) = f_0(x_0).$$

Таким образом, $f_0(x_0) = V(0)$, т. е. x_0 — решение задачи $P(0)$. Обратно, пусть x_0 — решение задачи $P(0)$. Тогда

$$f_0(x_0) + NF(x_0) = f_0(x_0) = V(0) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} [V(\lambda\mathbf{1}) + N\lambda] = \inf_x \{\Phi_N(x) : x \in M\},$$

т. е. минимизирует $\Phi_N(x)$ на M.

Условие (4) имеет глобальный характер, так как при больших λ оно учитывает поведение функций f на бесконечности. В то же время вывод необходимых условий экстремума основан на локальном рассмотрении. Поэтому необходимо ввести некоторые дополнительные понятия.

Пусть в дальнейшем x_0 обозначает точку локального минимума в задаче $P(0)$, а Ω — некоторая окрестность x_0.

Определение. *Точка x_0 локального минимума в задаче $P(0)$ регулярна, если существует такая ее окрестность Ω, что*

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{V_\Omega(\lambda\mathbf{1}) - V_\Omega(0)}{\lambda} > -\infty, \tag{6}$$

$$V_\Omega(0) = V(0), \tag{7}$$

где

$$V_\Omega(y) = \inf_x \{f_0(x) : f_i(x) \leqslant y_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x \in M \cap \Omega\}.$$

Напомним, что по определению локального минимума окрестность Ω, удовлетворяющая (7), существует всегда.

Т е о р е м а 3. *Если точка x_0 регулярна, то при достаточно большом числе $N > 0$ она является точкой минимума функции $\Phi_N(x)$ на множестве $M \cap \Omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (6) существует такое число $\lambda_0 > 0$, что

$$\frac{V_\Omega(\lambda 1) - V_\Omega(0)}{\lambda} \geqslant -L, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_0.$$

Далее, пусть $\alpha = \inf_x \{f_0(x) : x \in \Omega\}$; α — конечно, так как f_0 удовлетворяет локальному условию Липшица. Тогда

$$\frac{V_\Omega(\lambda 1) - V_\Omega(0)}{\lambda} \geqslant \frac{\alpha - V_\Omega(0)}{\lambda_0}, \qquad \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Положим теперь

$$N > \max\left\{L, \ \frac{V_\Omega(0) - \alpha}{\lambda_0}\right\}.$$

Тогда

$$\frac{V_\Omega(\lambda 1) - V_\Omega(0)}{\lambda} > -N$$

при всех $\lambda > 0$, и теорема 3 следует из теоремы 2.

Значение теоремы 3 состоит в том, что при условии регулярности она сводит построение необходимых условий локального минимума в задаче $P(0)$ к выводу необходимых условий функции $\Phi_N(x)$ на множество $M \cap \Omega$.

4. Р е г у л я р н о с т ь. Пусть X, Y — пространства Банаха, $M \subseteq X$, $x \in M$ и оператор $\mathcal{F}$ отображает некоторую окрестность x в Y, причем $\mathcal{F}(x) = 0$.

О п р е д е л е н и е. *Точка x называется $(\mathcal{F}, M)$-регулярной, если существует такая ее окрестность Ω и число $N > 0$, что*

$$\rho_{\mathcal{D}_0}(y) \leqslant N \|\mathcal{F}(y)\| \qquad \forall\, y \in M \cap \Omega,$$

$$\mathcal{D}_0 = \{y \in M \cap \Omega : \mathcal{F}(y) = 0\}.$$

Понятие регулярности тесно связано с построением касательных многообразий и теоремами о неявных функциях. Обзор этих результатов можно найти в [4]. Приведем для иллюстрации два результата. Первый из них представляет собой теорему Люстерника [4], а второй получен в [5].

Т е о р е м а 4. а). *Пусть оператор $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируем по Фреше в окрестности точки x и $\mathcal{F}'(x) X = Y$. Тогда точка x $(\mathcal{F}, X)$-регулярна.*

б). Пусть Y конечномерно, $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируем в окрестности точки x и $\mathcal{F}'(x) T_M^0(x) = Y$.

Тогда точка x $(\mathcal{F}, M)$-регулярна.

Исследование $(\mathcal{F}, M)$-регулярности в общем случае представляет собой трудную задачу, важную для многих областей математики. Свяжем теперь понятие регулярности решения x_0 задачи $P(0)$ и введенное понятие $(\mathcal{F}, M)$-регулярности.

Т е о р е м а 5. *Если точка x_0 $(\mathcal{F}, M)$-регулярна, где отображение $\mathcal{F} : X \to R^n$ задается формулой*

$$\mathcal{F}(x) = \max\{0, f_1(x), \ldots, f_m(x)\},$$

то x_0 есть регулярное решение задачи $P(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного. Допустим, что x_0 не является регулярным решением задачи $P(0)$, т. е. для как угодно малой окрестности Ω точки x_0

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{V_\Omega(\lambda 1) - V_\Omega(0)}{\lambda} = -\infty.$$

Если $N > 0$ фиксировано, то существует такое малое $\lambda > 0$, что

$$V_\Omega(\lambda 1) - Y_\Omega(0) \leqslant -N\lambda.$$

Выберем $y \in M \cap \Omega$, $\mathcal{F}(y) \leqslant \lambda$ так, что $f_0(y) - V_\Omega(\lambda 1) \leqslant \lambda^2$. Тогда

$$f_0(y) - \lambda^2 - V_\Omega(0) \leqslant -N\lambda, \tag{8}$$

и

$$f_0(x) \geqslant V_\Omega(0) \geqslant f_0(y) - \lambda^2 + N\lambda$$

для любой точки x из множества

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in M \cap \Omega : \mathcal{F}(x) = 0\}.$$

Поэтому

$$L_0 \| y - x \| \geqslant f_0(x) - f_0(y) \geqslant \lambda N - \lambda^2,$$

где L_0 — константа Липшица для f_0 в окрестности Ω. Отсюда получаем

$$\rho_{\mathcal{D}_0}(y) \geqslant \left(\frac{N}{L_0} - \lambda\right)\lambda.$$

Если λ выбрано настолько малым, что $N - \lambda \geqslant 0,5\ NL_0^{-1}$, то окончательно получаем

$$\rho_{\mathcal{D}_0}(y) \geqslant 0,5NL_0^{-1}\lambda \geqslant 0,5NL_0^{-1}\mathcal{F}(y), \tag{9}$$

так как y выбрано так, что $y \in M \cap \Omega$, $\mathcal{F}(y) \leqslant \lambda$. Далее, в силу (8)

$$f_0(y) \leqslant V_\Omega(0) - \lambda(N - \lambda) < V_\Omega(0),$$

так что y не может принадлежать $\mathcal{D}_0$ и поэтому $\mathcal{F}(y) > 0$.

Таким образом, в силу произвольной малости окрестности Ω и произвольности выбора N (9) противоречит определению $(\mathcal{F}, M)$-регулярности точки x_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Если точка локального минимума x_0 в задаче $P(0)$ $(\mathcal{F}, M)$-регулярна, то существует такая ее окрестность Ω, что для всех достаточно больших N x_0 есть точка минимума $\Phi_N(x)$ на множестве $M \cap \Omega$.*

5. Необходимые условия минимума. Пусть, как и ранее, x_0 — решение задачи $P(0)$.

Теорема 6. *Пусть $h_i(\bar{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$,— верхние выпуклые аппроксимации для f_i в точке x_0, а $T_M(x_0)$ — выпуклый касательный конус к M в этой точке. Предположим, что* $\operatorname{dom} h_i = X$, *и точка x_0 $(\mathcal{F}, M)$-регулярна. Тогда существуют такие не все равные нулю числа $\lambda_i \geqslant 0$, что $\lambda_0 = 1$ и*

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{x} \in T_M(x_0), \tag{10}$$

$$\lambda_i f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0)\right) \cap T_M^*(x_0) \neq \varnothing, \tag{11}$$

где $\partial f_i(x_0)$ — субдифференциалы, соответствующие h_i, а $T_M^*(x_0)$ — конус, сопряженный к $T_M(x_0)$.

Доказательство. Соотношение (11) сразу следует из (10) в силу известных результатов выпуклого анализа. Поэтому сосредоточим внимание на неравенстве (10). Так как точка x_0 $(\mathcal{F}, M)$-регулярна, то (см. следствие) существует такая ее окрестность Ω, что x_0 есть точка минимума $\Phi_N(x)$ на $M \cap \Omega$. Поскольку x_0 является внутренней точкой для Ω, то $T_M(x_0)$ является одновременно касательным конусом к $M \cap \Omega$.

Обозначим

$$\varphi_0(x) = f_0(x),$$

$$\varphi_i(x) = f_0(x) + Nf_i(x), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда из того, что x_0 минимизирует $\Phi_N(x)$ на $M \cap \Omega$, следует, что точка x_0, $\xi_0 = f_0(x_0)$ является решением задачи

$$\min_{x,\xi} \{\xi : \varphi_i(x) - \xi \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in M \cap \Omega\}. \tag{12}$$

Очевидно, что функции $h_0(\bar{x}) - \bar{\xi}$, $h_0(\bar{x}) + Nh_i(\bar{x}) - \bar{\xi}$ являются в. в. а. для $\varphi_0(x) - \xi$ и $\varphi_i(\bar{x}) - \xi$, $i = 1, \ldots, m$, в точке x_0.

Воспользуемся теперь известным результатом о необходимых условиях минимума для задачи (12) (см. [6], теорема 4.1, [7]): существуют такие не все равные нулю числа $\lambda_i \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$, что

$$\gamma\bar{\xi} + \lambda_0 (h_0(\bar{x}) - \bar{\xi}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (h_0(\bar{x}) + Nh_i(\bar{x}) - \bar{\xi}) \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\bar{x} \in T_M(x_0), \quad \bar{\xi} \in R^1,$$

$$\lambda_i (\varphi_i(x_0) - \xi_0) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Так как $\xi_0 = f_0(x_0)$, то из второго из этих соотношений непосредственно вытекает

$$\lambda_i N f_i(x_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Перепишем первое из этих соотношений в виде

$$\left(\gamma - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\right)\bar{\xi} + \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i\right) h_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i N h_i(\bar{x}) \geqslant 0,$$

$$\bar{x} \in T_M(x_0), \qquad \bar{\xi} \in R^1.$$

Так как $\bar{\xi}$ — произвольно, то неравенство выполняется, лишь если $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = \gamma$, и при этом $\gamma > 0$, так как если $\gamma = 0$, то и все $\lambda_i = 0$ в силу их неотрицательности. Не ограничивая общности можно считать, что $\gamma = 1$. Тогда окончательно получаем

$$h_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i N h_i(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{x} \in T_M(x_0).$$

Если переобозначить $\lambda_i N$ снова через λ_i, то учитывая (14), получаем (10).

Доказанная теорема показывает, что предположение регулярности снимает все проблемы при выводе необходимых условий экстремума.

В частности, без каких-либо дополнительных усилий можно учитывать произвольное число ограничений типа равенства, если каждое из них заменить на два неравенства, как отмечалось выше. Приведем соответствующий результат.

Т е о р е м а 7. *Пусть x_0 — решение задачи*

$$\min \{f_0(x) : f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ f_i(x) = 0, \ i = m+1, \ldots, k, \ x \in M\}.$$

Положим

$$\mathcal{F}_0(x) = \max \{f_1(x), \ldots, f_m(x), \ |f_{m+1}(x)|, \ldots, |f_k(x)|\}.$$

Если точка x_0 $(\mathcal{F}_0, M)$-регулярна, то существуют такие числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, m$, λ_i^+, $\lambda_i^- \geqslant 0$, $i = m+1, \ldots, k$, $\lambda_0 = 1$, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x}) + \sum_{i=m+1}^{k} (\lambda_i^+ h_i^+(\bar{x}) + \lambda_i^- h_i^-(\bar{x})) \geqslant 0, \qquad \bar{x} \in T_M(x_0),$$

$$\lambda_i f_i(x_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь h_i, h_i^+, h_i^- — в. в. а. для f_i, f_i^+, f_i^- в точке x_0, и предполагается, *что* $\operatorname{dom} h_i$, $\operatorname{dom} h_i^+$, $\operatorname{dom} h_i^-$ *совпадает с* X. *Кроме того,*

$$\left[\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0) + \sum_{i=m+1}^{k} (\lambda_i^+ \partial f_i^+(x_0) + \lambda_i^- \partial f_i^-(x_0))\right] \cap T_M^*(x_0) \neq \varnothing.$$

Проиллюстрируем применение этой теоремы на следующем примере. Пусть $f_0(x)$ — гладкая, а $f(x)$ — непрерывная выпуклая функция. Рассмотрим задачу $\min \{f_0(x) : f(x) = 0\}$, и пусть x_0 — ее решение. Если точка x_0 ($|f|$, X) — регулярна, то применима теорема 7. Далее, f_0 — гладкая функция, и поэтому $\partial f_0(x_0) = \{f_0'(x_0)\}$. Так как f — выпукла, то $\partial f^+(x_0) = \partial^0 f(x_0)$ — обычный субдифференциал выпуклой функции f. В то же время согласно теореме 1 — x^* является субдифференциалом $f^- = -f$ при любом выборе x^* из $\partial^0 f(x_0)$. Так как при применении теоремы 7 возможен выбор любых субдифференциалов и для $M = X$ $T_M(x_0) = X$, $T_M^*(x_0) = \{0\}$, то получаем следующий результат: для любого $x^* \in \partial^0 f(x_0)$ существуют такие числа $\lambda^+ \geqslant 0$, $\lambda^- \geqslant 0$, что $0 \in f_0'(x_0) + \lambda^+ \partial^0 f(x_0) - \lambda x^*$. Если ввести обозначение $\operatorname{con} M \equiv \{\lambda x : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$, то окончательно результат можно сформулировать в следующем виде: для любого $x^* \in \partial^0 f(x_0)$

$$(\operatorname{con} x^*) \cap (f_0'(x_0) + \operatorname{con} \partial^0 f(x_0)) \neq \varnothing. \tag{15}$$

Сравним формулу (15) с тем, что следует в этом случае из результатов работы [1]: существует $x^* \in \partial^0 f(x_0)$ и числа $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda \in R^1$, не равные одновременно нулю такие, что

$$\lambda_0 f_0'(x_0) + \lambda x^* = 0.$$

Ясно, что эти результаты сравнимы только если x_0 есть точка гладкости функции f. В остальных случаях утверждение (15) значительно сильнее.

6. Заключение. Полученные результаты показывают, что предположение о регулярности задачи позволяет строить необходимые условия экстремума первого порядка, существенно более содержательные в случае негладких данных, входящих в задачу, чем это позволяют делать утверждения, не использующие эти условия. Конечно, проверка условий регулярности является непростой задачей, как это показывает теорема 4, и требуются дальнейшие исследования этой проблемы. В то же время необходимые условия минимума, полученные без требования условий регулярности, именно для негладких задач (для исследования которых они предназначались), часто либо слишком слабы, либо вообще выполняются в точках, заведомо не являющихся точками минимума. Можно указать и другие примеры, подобные приведенному выше. Поэтому исследования, направленные на поиски разумного компромисса между проверкой условий регулярности и построением достаточно полных необходимых условий экстремума без предварительной полной проверки таких условий, представляют большой интерес.

1. *Clarke F. H.* A new approach to Lagrange multipliers // Math. Oper. Res.— 1976.— **1**, N 2.— P. 165—174.
2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
3. *Dem'yanov V. F., Rubinov A. M.* Quasidifferential calculus. Optimization software, Inc.— 1986.— 286 p.
4. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук.— 1980.— 35, № 5.— С. 11—46.
5. *Aubin J.-P., Fzankowska H.* On inverse function theorems for set-valued maps // IIASA.— 1984.— WP-84-68.— P. 1—21.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 142 с.
7. *Newstadt L.* Optimization: A theory of necessary conditions. — Princeton univ. press. — 1976.— 424 p.

Получено 14.09.90