УДК 512.54

В. Н. Ремесленников, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т информ. технологий и прикл. математики СО АН России, Омск)

$\exists$-свободные группы как группы с функцией длины

Доказано, что на любой конечнопорожденной группе G существует функция длины со значениями в конечнопорожденной группе Λ, относительно которой G является Λ-свободной группой.

Доведено, що на кожній скінченнопородженій групі G існує функція довжини зі значеннями у скінченнопородженій групі Λ, відносно якої G є Λ-вільна група.

Понятие $\exists$-свободной группы введено в [1]. Основной проблемой при исследовании $\exists$-свободных групп является описание конечнопорожденных $\exists$-свободных групп на следующих языках: а) аппроксимаций; в) линейных групп; с) групп с функцией длины; д) свободных конструкций; е) локальное описание (т. е. на языке конечных подмоделей). Проблемы а), б) решены в [2]. В настоящей статье мы начинаем обсуждение проблемы с). Основным ее результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — конечнопорожденная $\exists$-свободная группа с системой порождающих из t элементов. Тогда существует пара (n, k), $n \leqslant 3t$, $n \geqslant k$, натуральных чисел таких, что на G существует $\Lambda_{n,k}$-значная функция длины, относительно которой G является $\Lambda_{n,k}$-свободной группой.*

Приведем схему доказательства теоремы. В п. 2 излагается конкретное вложение группы G, удовлетворяющей условиям теоремы в $SL_2(F)$, где F — поле, конечнопорожденное над Q. В п. 3 исследуется кольцо следов группы общих матриц, а в п. 4 строится специальное нормирование v для поля F. В п. 5 напоминается конструкция дерева X_v для $SL_2(F)$ по нормированию v. И наконец, в последнем пункте, используя результаты статьи Алперина—Басса [3], строим на G искомую функцию длины.

1. $\exists$-свободные группы [1]. Обозначим через $Th_\exists(G)$ $\exists$-фрагмент элементарной теории группы G, т. е. $Th_\exists(G)$ есть множество всех предложений групповой сигнатуры, истинных в G, кванторная приставка которых в предваренной нормальной форме содержит только кванторы существования. Пусть F_n — свободная группа ранга $n \geqslant 2$. Если F_1 и F_2 — свободные группы конечных рангов $\geqslant 2$, то $Th_\exists(F_1) = Th_\exists(F_2)$, так как в этом случае каждая из групп содержится в другой. Следовательно, можно говорить о $\exists$-теории $Th_\exists(F)$ неабелевой свободной группы.

Определение. *Группа G является $\exists$-свободной группой, если и только если $Th_\exists(G) = Th_\exists(F)$.*

2. Группа общих матриц. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 — алгебраически независимые элементы над полем $\mathbf{Q}$, $P = \mathbf{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — расширение $\mathbf{Q}$ с помощью этих элементов. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_1x_2 - 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 & y_1y_2 - 1 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix}$$

— пара матриц из $SL_2(P)$. Группу H_2, порожденную матрицами A, B, будем называть группой общих матриц. В п. 3 будет доказано, что группа H_2 является свободной группой ранга 2.

Пусть G — произвольная $\exists$-свободная группа. В [1] показано, что G является подгруппой подходящей ультрастепени группы H_2. Следовательно, существует ультрафильтр D такой, что $G \subset\to \tilde{H}_2$, где $\tilde{H}_2$ — ультрастепень H_2, по D. Пусть $\tilde{P}$, $SL_2(\tilde{P})$ — соответствующие ультрастепени P, $SL_2(P)$. В этом случае G является подгруппой $SL_2(\tilde{P})$; $\varphi: G \to SL_2(\tilde{P})$ — некоторое конкретное вложение G в группу матриц.

Предположим теперь, что G является конечнопорожденной $\exists$-свободной группой и пусть $g_1, \ldots, g_k$ — некоторая система ее порождающих. Обозначим $g_1^\varphi = A_1, \ldots, g_k^\varphi = A_k$ и присоединим к полю $\mathbf{Q}$ элементы матриц $A_1, \ldots, A_k$. Так как матрицы $A_i \in SL_2(\tilde{P})$, $i = 1, \ldots, k$, то достаточно присоединить к $\mathbf{Q}$ не более $3k$ элементов из $\tilde{P}$. Полученное поле обозначим буквой F. Ясно, что $G \subset\to SL_2(F)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — $\exists$-свободная группа, допускающая систему из k порождающих. Тогда:*

1) *G является подгруппой $SL_2(F)$, где степень трансцендентности F над $\mathbf{Q}$ не более чем $3k$;*

2) *поле F является подполем $\tilde{P}$ (ультрастепени P), а G — подгруппой $\tilde{H}_2$ (ультрастепени H_2).*

3. Следы матриц. Для матрицы X через $\operatorname{tr} X$ обозначим ее след. Тогда для матрицы X из SL_2 по теореме Гамильтона — Кэли

$$X^2 = (\operatorname{tr} X) X - E. \tag{1}$$

Кроме того, для любых матриц X, Y из SL_2

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX), \tag{2}$$

$$\operatorname{tr} X = \operatorname{tr} X^{-1}, \quad \operatorname{tr}(XYX^{-1}) = \operatorname{tr} Y. \tag{3}$$

Пусть теперь A, B — матрицы из п. 2 и H_2 — группа общих матриц, порожденная ими. Обозначим

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^{-1} = x, \quad \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} B^{-1} = y, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = z.$$

Тогда $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $z = x_1x_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + y_1y_2 - 2$. Нетрудно доказываются с помощью (1) — (3) равенства

$$\begin{gathered} \operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A)^2 - 2 = x^2 - 2, \\ \operatorname{tr} B^2 = y^2 - 2, \quad \operatorname{tr}(AB)^2 = z^2 - 2, \end{gathered} \tag{4}$$

$$A^{-1} = xE - A, \quad B^{-1} = yE - B, \tag{5}$$

$$A^{-1}B = xB - AB, \quad BA^{-1} = xB - BA, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} ABA = zA - B^{-1} = zA + B - yE, \quad ABA^{-1} = xAB - ABA = \\ = xAB - zA - B + yE, \end{gathered} \tag{7}$$

$$ABA^{-1}B^{-1} = yzA - zAB + 2yB - B^2 - y^2E. \tag{8}$$

Обозначим через T_2 алгебру (над $\mathbf{Q}$) следов для группы H_2, т. е. T_2 — алгебра, порожденная следами всех матриц из H_2. С помощью равенств (1)—(8) нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Алгебра следов T_2 для группы H_2 порождается элементами x, y, z. Кроме того, элементы x, y, z алгебраически независимы над $\mathbf{Q}$.*

Введем некоторые определения и обозначения. Пусть $w = w(A, B)$ — редуцированное слово от A, B; $|w|$ — обычная длина слова w. Будем писать $w = u \circ v$, если $w = uv$ и $|w| = |u| + |v|$. Здесь u, v, w — слова от A, B. Гиперболическая длина $\|w\|$ для слова w равна длине циклически редуцированного слова для w. Например, если $w = A^{-1}BA$, то $|w| = 3$, $\|w\| = 1$.

Наконец, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$ — многочлен от нескольких переменных, то его общая степень (ст.) $f(x)$ есть степень $f(x)$ по совокупности всех переменных.

Теорема 2. *Пусть w — произвольное слово от матриц A, B. Тогда ст. ($\operatorname{tr} w$) как многочлена от букв x_1, x_2, y_1, y_2 равна гиперболической длине w, т. е. ст. ($\operatorname{tr} w$) $= \|w\|$. В частности, группа H_2 является свободной со свободными порождающими A, B.*

Доказательство теоремы проведем индукцией по обычной длине $|w|$, используя равенства (1)—(8) и их очевидные следствия для следов.

Если $|w| = 1, 2$, то, используя (4), (6), убеждаемся, что теорема в этом случае верна. Пусть для всех элементов длины $\leqslant t$, $t \geqslant 2$, теорема доказана и пусть $|w| = t + 1$, $w = v \bigcirc C$, где $C \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$. В силу симметрии между элементами A, A^{-1}, B, B^{-1}, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $C = A$. Если теперь $v = A^{-1} \bigcirc v_1$, то $w = A^{-1} v_1 A$ и $\operatorname{tr} w = \operatorname{tr} v_1$, $\| w \| = \| v_1 \|$ и теорема доказана для w. Поэтому далее будем предполагать, что $|w| = \|w\|$. Предположим, что $w \bigcirc C^2 \bigcirc v$, тогда в силу равенства (1) $w = (\operatorname{tr} C)\, u \bigcirc C \bigcirc v - uv$. Так как $\| u \bigcirc C \bigcirc v \| = | u \bigcirc C \bigcirc v | = t$, $\| uv \| < t$, то ст. $\operatorname{tr} w =$ ст. $((\operatorname{tr} C)\, u \bigcirc C \bigcirc v) = t + 1$ и теорема доказана в этом случае. Остается рассмотреть оставшиеся случаи. Пусть

$$w = B^{\varepsilon_1} A^{\eta_1} B^{\varepsilon_2} A^{\eta_2} \ldots B^{\varepsilon_s} A^{\eta_s}, \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1, \\ -1 \end{cases} \quad \varepsilon_i, \eta_j = \begin{cases} 1, \\ -1 \end{cases} \quad i \geqslant 2, \quad j \geqslant 1.$$

Если $\varepsilon_1 = 0$, то циклическая перестановка слогов w и равенство (2) сводят ситуацию к рассмотренному выше случаю. Поэтому будем считать, что $\varepsilon_1 \neq 0$. Так как $|w| \geqslant 3$, то положим $v = B^{\varepsilon_1} A^{\eta_1} \ldots B^{\varepsilon_{s-1}}$, $u = A^{\eta_{s-1}} B^{\varepsilon_s} A^{\eta_s}$. Тогда $w = v \bigcirc u$ и разберем все ситуации, связанные с выбором знаков показателей в слове u: 1) $u = ABA$; 2) $u = AB^{-1}A$; 3) $u = A^{+1}BA^{-1}$; 4) $u = A^{-1}B^{-1}A^{-1}$; 5) $u = ABA^{-1}$; 6) $u = A^{-1}BA$; 7) $u = AB^{-1}A^{-1}$; 8) $u = A^{-1}B^{-1}A$. Будем говорить, что u — «хороший» слог в w, если u имеет вид $1 - 4$, u — «плохой» слог, если он имеет вид 5—8. Случаи $1 - 4$ доказываются одинаково.

Для примера разберем случай 1. В силу равенства (7) $w = zv \circ A + vB - yv$. Отсюда

$$\text{ст. } \operatorname{tr} w = \text{ст. } \operatorname{tr}(zv \bigcirc A) = \text{ст. } z + \text{ст. } \operatorname{tr}(v \bigcirc A) = 2 + \| v \bigcirc A \| =$$
$$= 2 + (t - 1) = t + 1.$$

Далее, если в слове w есть «хороший» слог длины 3 (напомним, что буквы A и B симметричны), т. е. $w = v \circ u \circ v_1$, то переходя к слову $w_1 = v_1 \circ v \circ u$ и замечая, что по равенству (2) $\operatorname{tr} w = \operatorname{tr} w_1$, мы переходим к рассмотренному выше случаю.

Остается рассмотреть случай, когда в w нет «хороших» слогов. В силу симметрии можно считать, что слово w начинается слогом BA, т. е. $w = BA \circ v$. Так как в w нет «хороших» слогов, остальные показатели ε_2, η_2, ..., ..., ε_s, η_s определяются однозначно, причем в зависимости от длины w возникают два случая: 9) $w = (BAB^{-1}A^{-1})^m$, $m \geqslant 1$, 10) $w = (BAB^{-1}A^{-1})^m \times \times BA$, $m \geqslant 1$.

Подслучай 9.1) $w = BAB^{-1}A^{-1}$. Тогда в силу равенства (3) $\operatorname{tr} w = \operatorname{tr} w^{-1} = \operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1}$. В силу равенства (8)

$$\text{ст. } \operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = \text{ст. }(xyz - z^2) = \text{ст. } z + \text{ст. }(xy - z) = 2 + 2 = 4.$$

Подслучай 9.2) $w = (BAB^{-1}A^{-1})^m$, $m > 1$. С помощью равенства (1) доказываем, что $\operatorname{tr}(BAB^{-1}A^{-1})^m = m \operatorname{tr}(BAB^{-1}A^{-1}) = 4m = |w| = \|w\|$ и, наконец, рассмотрим случай 10. Доказательство проведем индукцией по m. Если $m = 1$, то $BAB^{-1}A^{-1}BA$ — циклическая перестановка $(BA)^2 B^{-1}A^{-1}$, а потому согласно равенству (1) $(BA)^2 B^{-1}A^{-1} = (\operatorname{tr} BA)\, BAB^{-1}A^{-1} - B^{-1}A^{-1}$. Отсюда следует, что ст. $\operatorname{tr}(BAB^{-1}A^{-1}BA) =$ ст. $z +$ ст. $\operatorname{tr}(B^{-1}A^{-1}BA) = 2 + 4 = 6 = \|w\|$. Если $m > 1$, то $(BAB^{-1}A^{-1})^m BA \sim (BA)^2 B^{-1}A^{-1}(BAB^{-1}A^{-1})^{m-1}$. Согласно равенству (1)

$$(BA)^2 B^{-1}A^{-1}(BAB^{-1}A^{-1})^{m-1} = (\operatorname{tr} BA)(BAB^{-1}A^{-1})^m - B^{-1}A^{-1} \times$$
$$\times (BAB^{-1}A^{-1})^{m-1}.$$

Следовательно, ст. $\operatorname{tr} w =$ ст. $z +$ ст. $\operatorname{tr}(BAB^{-1}A^{-1})^m = 2 + 4m = |w| = \|w\|$. Теорема доказана.

4. $\Lambda_{n,k}$-группы и нормирования. Пусть (n, k) — пара натуральных чисел, причем $n \geqslant k$. Тогда под $\Lambda_{n,k}$ будем понимать некоторую упорядоченную абелеву группу такую, что $\Lambda_{n,k}$ есть прямая сумма n копий Z, а полный ряд выпуклых подгрупп $\Lambda_{n,k}$ содержит k нетривиальных членов. Так как факторы этого ряда есть подгруппы $\mathbb{R}^+$ (аддитивной группы поля действительных чисел с естественным порядком), то ясно, что $k \leqslant n$. В силу этого определения $\Lambda_{n,1}$ — архимедовы упорядоченные группы, а потому по теореме Гельдера [4] их можно рассматривать как подгруппы $\mathbb{R}^+$. Если $k > 1$, то $\Lambda_{n,k}$ — неархимедовы упорядоченные группы. Особую роль при исследовании $\exists$-свободных групп играют группы $\Lambda_{n,n}$ $(k = n)$.

Непосредственно из определений вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для каждого натурального числа n существует с точностью до изоморфизма единственная упорядоченная группа $\Lambda_{n,n}$ $n \geqslant 1$.*

Если $k < n$, то существует континуальное множество попарно неизоморфных упорядоченных групп вида $\Lambda_{n,k}$ [2, 5]. Группы вида $\Lambda_{n,k}$ возникают при изучении нормирований полей конечнопорожденных над $\mathbf{Q}$.

Пусть Λ — упорядоченная абелева группа. Пусть F — поле и $F^* = F \setminus \{0\}$ — его мультипликативная группа. Λ- нормирование F по определению есть сюръективный гомоморфизм $v : F^* \to \Lambda$ такой, что полагая $v(0) = \infty$, имеем $v(a + b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$ для всех $a, b \in F$.

Множество $A = \{a \in F \;\; v(a) \geqslant 0\}$ является подкольцом F. Оно называется кольцом нормирования, в нем есть единственный максимальный идеал $M = \{a \in F \;\; v(a) > 0\}$. Идеалы A линейно упорядочены по включению, причем $J \subset J_1$, тогда и только тогда, когда $v(J) \subset v(J_1)$.

Предположим теперь, что поле F конечнопорождено над $\mathbf{Q}$ и $s(F)$ — степень трансцендентности F над $\mathbf{Q}$. Предположим также, что нормирование v тривиально на $\mathbf{Q}$, т. е. $v(a) = 0$, $a \in \mathbf{Q}$. Тогда из результатов § 8, 10 гл. 5 книги [6] следует такая теорема.

Теорема 3. *Пусть v — произвольное нормирование конечнопорожденного поля F и v— тривиально на $\mathbf{Q}$. Пусть Γ— группа значений v. Тогда Γ — свободная абелева группа, причем ранг $\Gamma \leqslant s(F)$, так что группа Γ является группой типа $\Lambda_{n,k}$, где $n \leqslant s(F)$.*

Порождающими алгебры следов T_2 группы общих матриц H_2 являются элементы $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $z = x_1x_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + y_1y_2 - 2$. Ясно, что алгебра T_2 содержится в кольце многочленов $\mathbf{Q}[x_1, x_2, y_1, y_2]$. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — многочлен из $\mathbf{Q}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ общей степени m. Положим $v_1(f(X)) = -m$. Ясно, что v_1 является нормированием кольца $\mathbf{Q}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, причем группа значений v_1 есть $\mathbb{Z}$. Продолжим нормирование v_1 до нормирования v поля P (см. п. 2).

Лемма 3. *Существует нормирование $v : P \to \mathbb{Z}$ со следующими свойствами:*

1) $v|_{\mathbf{Q}}$ — *есть тривиальное нормирование;*

2) *если $1 \neq w \in H_2$, то $v(\operatorname{tr} w) < 0$, где H_2 — группа общих матриц из п. 2.*

Доказательство свойства 1 очевидно по построению v, а свойство 2 следует из теоремы 2 и построения v.

5. Построение дерева по нормированию. В этом пункте изложена известная конструкция (см., например, [3, 7]). Пусть F — поле, Λ — упорядоченная абелева группа, $v : F \to \Lambda$ — нормирование F, A — кольцо нормирования v. Пусть V — линейное пространство над F размерности 2; $V = F^2$. Под A-решеткой $L \subset V$ понимаем множество векторов вида $Ae_1 + Ae_2$, где e_1, e_2 — базис V. Обозначим $L = \langle e_1, e_2 \rangle$, если e_1, e_2 — A-базис для $\overline{L}$. Если L' — другая такая решетка, обозначим $L \sim L'$, если $L' = aL$ для некоторого $a \in F^*$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Пусть $\overline{L}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий решетку L. Пусть L, L_1 — решетки в V. Верны следующие утверждения:

а) существует A-базис e, f из L и элементы $a, b \in F^*$ такие, что $L_1 = \langle ae, bf \rangle$;

в) пусть $v(b) \leqslant v(a)$, т. е. $a = bc$, $c \in A$. Тогда $L_1 = bL_1'$, где $L_1' = \langle ce, t\rangle \subset L$ и $L/L_1' \cong A/cA$ — циклический модуль.

Напомним определение Λ-дерева. Λ-метрическое пространство есть множество X с «Λ-метрикой» $d : X \times X \rightarrow$, удовлетворяющей аксиомам: $d(x, y) = d(y, x) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$, если и только если $x = y$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Непустое Λ-метрическое пространство X называется Λ-деревом, если:

1) для $x, y \in X$ существует единственная геодезическая, соединяющая x с y, обозначим ее $[x, y]$;

2) для $x, y, z \in X$, $[x, y] \cap [x, z] = [x, u]$ для некоторого $u \in X$;

3) для $x, y, z \in X$, если $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$, то $[x, y] \cup [y, z] = [x, z]$.

Пусть X (X_v) — множество всех классов эквивалентности A-решеток пространства F^2. Определим на X структуру Λ-метрического пространства, относительно которого X будет Λ-деревом. Положим $d(L, L_1) = v(c)$, где c — элемент из п. в). Если $L \sim L'$, $L_1 \sim L_1'$, то проверяется, что $d(L, L_1) = d(L', L_1')$. Поэтому полагаем $d(\bar{L}, \bar{L}_1) = d(L, L_1) = v(c)$. Доказывается, что множество X относительно Λ-метрики d является Λ-деревом. Если $g \in GL_2(F)$, то g естественным образом действует на X, причем $d(\bar{L}, \bar{L}_1) = d(g\bar{L}, g\bar{L}_1)$, где $g\bar{L}$ — образ $\bar{L}$ при действии g. Приведем результат из [3], который нам понадобится в дальнейшем.

Метрическое пространство (X, d) есть Λ-дерево, на котором группа $GL_2(F)$ действует изометриями. Элемент g из $GL_2(F)$ действует на X без неподвижных точек тогда и только тогда, когда $2v(\operatorname{tr} g) < v(\operatorname{Det} g)$; если $g \in SL_2(F)$, то он действует без неподвижных точек тогда и только тогда, когда $v(\operatorname{tr} g) < 0$.

6. Группы с функциями длины. Пусть Λ — упорядоченная абелева группа, $\Lambda+$ — полугруппа ее положительных элементов, G — группа.

Определение. *Под (Λ-значной) линдовой функцией длины на G понимаем функцию $p : G \rightarrow \Lambda^+$, удовлетворяющую следующим условиям (в дальнейшем мы положим $d(x, y) = \frac{1}{2}(p(x) + p(y) - p(x^{-1}y)$ для $x, y \in G$):*

$$L0 : p(1) = 0,$$

$$L1 : p(x) = p(x^{-1}) \text{ для всех } x \in G.$$

$$L2 : \text{для всех } x, y, z \in G, \text{ если } d(x, z) > d(x, y), \text{ то } d(x, y) = d(y, z),$$

$$L3 : d(x, y) \in \Lambda.$$

Если p удовлетворяет добавочной аксиоме $LF : p(x^2) > p(x)$ при $x \neq 1$, то p будем называть Λ-свободной функцией длины, а группу G — Λ-свободной группой.

Впервые определение функции длины было дано Линдоном [8], а определение Λ-свободной группы на эквивалентном языке групп, действующих на деревьях,— Бассом [9].

Пусть группа G действует на дереве $\langle X, d\rangle$ изометриями. Выберем $x_0 \in X$ и определим $p : G \rightarrow \Lambda$, положив $p(g) = d(gx_0, x_0)$. Легко проверяется, что полученная функция является линдовой функцией длины.

Доказательство основной теоремы. По теореме 1 группа G определяет поле F такое, что $G \hookrightarrow SL_2(F)$, G — подгруппа $\tilde{H}_2$, степень трансцендентности $s(F) \leqslant 3t$.

По нормированию $v : \mathbf{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ из п. 4 построим нормирование $\tilde{v} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$, где $\tilde{\mathbb{Z}}$ — соответствующая ультрастепень $\mathbb{Z}$. В силу теоремы 2 и построению нормирования v следует, что для любого элемента $1 \neq \tilde{w} \in \tilde{H}_2$ $v(\operatorname{tr} \tilde{w}) < 0$. Пусть $v_2 = \tilde{v}|_F$. Тогда по теореме 3 существует пара чисел (n, k), $n \leqslant s(F) \leqslant 3t$, $n \geqslant k$, таких, что $v_2(F) = \Lambda_{n,k}$.

Используя нормирование v_2 поля F, построим дерево X $(= X_{v_2})$, на котором группа $SL_2(F)$ действует изометриями. Если $1 \neq g \in G$, то $v_2(\operatorname{tr}(g)) < 0$, а потому G действует на X без неподвижных точек. По действию G на X определим линдову функцию $p: G \to \Lambda_{n,k}$, $p(g) = d(gx_0, x_0)$, где x_0 — некоторая фиксированная точка из X.

Проверим, наконец, что p — $\Lambda_{n,k}$-свободная функция. Это следует из результатов статьи [3]. Если $g \in G$ и G действует на X, то гиперболическая длина $e: G \to \Lambda$ определяется формулой $e(g) = \min\limits_{x \in X} d(gx, x)$. Для $g \neq 1$ $v_2(\operatorname{tr} g) < 0$, а потому согласно следствию B5 из [3] $e(g) > 0$. По формуле 6.14 из [3] имеем

$$e(g) = \max(p(g^2) - p(g)).$$

Следовательно, $p(g^2) > p(g)$ и G — $\Lambda_{n,k}$-свободная группа. Теорема доказана.

7. Заключительные замечания. Ясно, что любая свободная группа F является $\mathbb{Z}$-свободной группой, т. е. на ней есть целочисленная функция длины. Если D — некоторый ультрафильтр, то группа $\tilde{F}$ (ультрастепень F по ультрафильтру D) является $\tilde{\mathbb{Z}}$-свободной группой. Так как любая $\exists$-свободная группа является подгруппой некоторой $\tilde{F}$, то G также является $\tilde{\mathbb{Z}}$-свободной группой. Содержание основной теоремы статьи в том, что если группа G конечнопорождена, то на G есть такая функция длины, что ее группа значений является конечнопорожденной. Ряд результатов (мы их не обсуждали в статье) говорят в пользу следующей гипотезы.

Гипотеза. Пусть G будет конечнопорожденной $\exists$-свободной группой. Тогда существует такое натуральное число n, что G является $\Lambda_{n,n}$-свободной группой.

Значение этой гипотезы в том, что результаты Басса [9] и М. Г. Лопаткова [10] позволяют описать $\Lambda_{n,n}$-свободные группы на языке свободных конструкций.

1. *Ремесленников В. Н.* $\exists$-свободные группы // Сиб. мат. журн.— 1989.— **30**, № 6.— С. 193—197.
2. *Зайцев М. И.* О совокупности упорядочений абелевой группы // Успехи мат. наук.— 1953.— 8, вып. 1.— С. 135—137.
3. *Alperin R., Bass H.* Length functions of group actions on Λ-trees. Combinatorial group theory and topology // Ann. Math. Stud.— 1987.— N 111.— P. 265—378.
4. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы.— М. : Мир, 1965.— 342 с.
5. *Trevisan G.* Classificazione dei simplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con generarori // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1953.— 22.— P. 143—156.
6. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Мир, 1971.— 707 с.
7. *Sezze J.-P.* Trees.— New Jork: Springer, 1980.— 142 p.
8. *Lyndon R. C.* Length functions in groups // Math. scand.— 1963.— **12**.— P. 209—234.
9. *Bass H.* Group Actions on Non-Archimedean Trees // Arboreal Goup Theory.— 1991.— P. 69—130.
10. *Лопатков М. Г.* Ступенчатые и архимедовы группы. — Омск, 1991.— 20 с.— (Препринт / ВЦ СО АН СССР; № 921).

Получено 03.10.91