УДК 519.41/47

$\boxed{\text{С. Н. Черников}}$, чл.-корр. АН Украины,
Н. С. Черников, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Критерий дополняемости периодической почти разрешимой подгруппы в содержащей ее группе

Доказывается, что если у периодической почти разрешимой (более широко, — периодической W_0-) подгруппы H группы G каждая примарная силовская подгруппа имеет дополнение в G и при этом H не более чем счетна и множество $\pi(H)$ конечно, то сама подгруппа H имеет дополнение в G.

Доводиться, що коли у періодичної майже розв'язної (більш широко, — періодичної W_0-) підгрупи H групи G кожна примарна силовська підгрупа має доповнення в G та при цьому H не більш ніж зліченна і множина $\pi(H)$ скінченна, то сама підгрупа H має доповнення в G.

С. Н. Черниковым было установлено, что если у подгруппы H группы G все силовские примарные подгруппы дополняемы в G, а сама H является почти абелевой группой с условием минимальности (иначе,— черниковской группой), то она дополняема в G (см. [1]). (Напомним, что подгруппа H произвольной группы G дополняема в ней, если в G найдется подгруппа D, для которой $G = HD$ и $H \cap D = 1$; любая такая подгруппа D называется дополнением к H в G.) Позднее им же были установлены следующие существенно более общие результаты (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть не более чем счетная периодическая почти разрешимая группа H является подгруппой некоторой группы G. Если все силовские примарные подгруппы группы H дополняемы в G и при этом множество $\pi(H)$ конечно, то в G дополняема и сама подгруппа H.*

Теорема 2. *Пусть не более чем счетная периодическая подгруппа H некоторой группы G содержит подгруппу конечного индекса, обладающую конечным нормальным рядом с локально нильпотентными факторами. Если все силовские примарные подгруппы группы H дополняемы в G и при этом множество $\pi(H)$ конечно, то в G дополняема и сама подгруппа H.*

В настоящей работе нормальные ряды и системы группы понимаются в классическом смысле, как, например, в [3—5]. Совокупность всех простых делителей порядков элементов произвольной группы H в настоящей работе, как обычно, обозначается через $\pi(H)$. В теоремах 1 и 2 конечность $\pi(H)$ существенна ввиду известного примера Ю. М. Горчакова — примера группы G (мощности континуума) с недополняемым (счетным) периодическим абелевым ($2'$-)коммутантом, все силовские примарные подгруппы которого дополняемы в G и имеют простые порядки (и фактор-группа по которому — элементарная 2-группа) (см., например, [6], гл. III, пример 3.9).

В связи с теоремами 1 и 2 отметим также, что в приведенном результате из [1] подгруппа H не более чем счетна и множество $\pi(H)$ конечно.

Доказательства теорем 1 и 2 С. Н. Черниковым не были опубликованы. В оставшихся после его смерти записках обнаружены лишь черновые их наброски. В процессе оформления полных доказательств теорем 1 и 2 второй из авторов настоящей статьи, основываясь на иных чем у С. Н. Черникова подходах, получил результат, обобщающий эти теоремы. Прежде чем его сформулировать, напомним, что группа, обладающая возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными и конечными факторами, называется $\mathfrak{W}_0$-группой [5]. Из известной леммы О. Ю. Шмидта (см., например, [4, с. 337]) вытекает, что периодические $\mathfrak{W}_0$-группы локально конечны. Напомним также, что для простого p силовская p-подгруппа P не более чем счетной локально конечной группы G называется проекционной в ней, если найдется возрастающая цепочка конечных подгрупп $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \subseteq \ldots$ группы G такая, что $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ и при каждом i пересечение $P \cap G_i$ — силовская p-подгруппа в G_i [7]. Группа G обладает проекционными силовскими p-подгруппами и любая такая p-подгруппа содержит сопряженную с любой конечной p-подгруппой группы G [7].

Теорема 3. *Пусть не более чем счетная периодическая $\mathfrak{W}_0$-группа H является подгруппой некоторой группы G. Если все проекционные силовские примарные подгруппы группы H дополняемы в G и при этом множество $\pi(H)$ конечно, то в G дополняема и сама подгруппа H.*

Доказательству теоремы 3 предпошлем следующие леммы и предложения.

Лемма 1. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее подгруппы такие, что $A \cap B = 1$ и для любого $p \in \pi(A)$ произвольный p-элемент подгруппы B сопряжен в G с подходящим элементом подгруппы A. Тогда $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$.*

Доказательство. Действительно, пусть p — произвольное простое число из $\pi(A)$ и g — p-элемент из B; $g^h \in A$ и $h = ba$, $b \in B$, $a \in A$. Тогда $g^b \in A^{a^{-1}} \cap B = A \cap B = 1$ и, значит, $g = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $G = A_1A_2 \ldots A_n$ — группа, A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,— ее периодические подгруппы такие, что $(A_1 \ldots A_{i-1})\, A_i = A_i\,(A_1 \ldots A_{i-1})$, $\pi(A_1 \ldots A_{i-1}) \cap \pi(A_i) = \varnothing$, $i = 2, \ldots, n$, и подгруппа $A_1 \ldots A_{n-1}$ — периодическая. Для подгруппы H группы G выполняются соотношения*

$$H = (H \cap A_1)\,(H \cap A_2) \ldots (H \cap A_n), \quad H \cap A_1 \ldots A_i = (H \cap A_1 \ldots A_{i-1})\,(H \cap A_i),$$
$$((H \cap A_1) \ldots (H \cap A_{i-1}))\,(H \cap A_i) = (H \cap A_i)\,((H \cap A_1) \ldots (H \cap A_{i-1})), \quad i = 2, \ldots, n \tag{1}$$

в каждом из случаев: 1) *H входит в некоторую нормальную систему группы G*; 2) *H является пересечением таких подгрупп K группы G, для каждой из которых $K = (K \cap A_1)(K \cap A_2) \ldots (K \cap A_n)$ и $((K \cap A_1) \ldots (K \cap A_{i-1}))(K \cap A_i) = (K \cap A_i)((K \cap A_1) \ldots (K \cap A_{i-1})$, $i = 2, \ldots, n$*; 3) *$H = H_1H_2 \ldots H_n$ для некоторых непустых множеств элементов $H_i \subseteq H \cap A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В последнем случае $H_i = H \cap A_i$.*

Доказательство. Действительно, в случаях 1 и 2 соотношения (1) выполняются ввиду лемм 3. 1 [8] и 4 [9] соответственно. В случае 3 в силу леммы 5 [9] $H_n = H \cap A_n$ и $H_1 \ldots H_{n-1} = H \cap A_1 \ldots A_{n-1}$, $H_{n-1} = H \cap A_{n-1}$ и $H_1 \ldots H_{n-2} = H \cap A_1 \ldots A_{n-2}$, если $n > 2$, и т. д. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G и A_i — те же, что и в лемме 2; F, H и K — подгруппы группы G, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $K \subseteq N_G(F)$ и $F \cap K \subseteq H$; 2) найдутся непустые множества элементов $F_i \subseteq F \cap A_i$ и $K_i \subseteq K \cap A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для которых $F = F_1F_2 \ldots F_n$ и $FK = FK_1K_2 \ldots K_n$; 3) H — пересечение некоторых подгрупп группы F, входящих в ее нормальные системы, и пусть $L = \bigcap_{g \in K} H^g$, $D = LK$.*

Тогда

$$D = (D \cap A_1)(D \cap A_2) \ldots (D \cap A_n),\ D \cap A_1 \ldots A_i = (D \cap A_1 \ldots A_{i-1})(D \cap A_i),$$

$$((D \cap A_1) \ldots (D \cap A_{i-1}))(D \cap A_i) = (D \cap A_i)((D \cap A_1) \ldots (D \cap A_{i-1})),$$

$$D \cap A_i = (L \cap A_i) K_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В случае, когда $H \neq F$, D — истинная подгруппа группы FK.

Доказательство. Используя лемму 2 и учитывая очевидные соотношения $F \cap K \subseteq L$ и $K_j \subseteq N_G(L \cap A_1 \ldots A_i)$, $j \leqslant i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$D = LK = L((F \cap K) K_1 \ldots K_n) = LK_1 \ldots K_n = K_1 \ldots K_{n-1} L K_n =$$
$$= K_1 \ldots K_{n-1}(L \cap A_1 \ldots A_{n-1})(L \cap A_n) K_n =$$
$$= (K_1 \ldots K_{n-1}(L \cap A_1 \ldots A_{n-1}))((L \cap A_n) K_n),$$
$$D \cap A_1 \ldots A_{n-1} = K_1 \ldots K_{n-1}(L \cap A_1 \ldots A_{n-1}),\ D \cap A_n = (L \cap A_n) K_n;$$
$$D \cap A_1 \ldots A_{n-1} = K_1 \ldots K_{n-2}(L \cap A_1 \ldots A_{n-1}) K_{n-1} =$$
$$= (K_1 \ldots K_{n-2}(L \cap A_1 \ldots A_{n-2}))((L \cap A_{n-1}) K_{n-1}),$$
$$D \cap A_1 \ldots A_{n-2} = K_1 \ldots K_{n-2}(L \cap A_1 \ldots A_{n-2}),\quad D \cap A_{n-1} = (L \cap A_{n-1}) K_{n-1},$$

если $n > 2$, и т. д.

Далее, если $D = FK$, то $F = L(F \cap K) = L \subseteq H$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G и A_i — те же, что и в лемме 2, F — инвариантная в G подгруппа, φ — гомоморфизм G на фактор-группу G/F и K — подгруппа из G. Тогда если $K^\varphi = K_1K_2 \ldots K_n$ для некоторых непустых множеств элементов $K_i \subseteq K^\varphi \cap A_i^\varphi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$FK = (FK \cap A_1)(FK \cap A_2) \ldots (FK \cap A_n),$$
$$FK \cap A_1 \ldots A_i = (FK \cap A_1 \ldots A_{i-1})(FK \cap A_i),$$
$$((FK \cap A_1) \ldots (FK \cap A_{i-1}))(FK \cap A_i) =$$
$$= (FK \cap A_i)((FK \cap A_1) \ldots (FK \cap A_{i-1})),\quad i = 2, \ldots, n.$$

Лемма 4 вытекает из лемм 3 и 2.

Следствие. *Пусть G и A_i — те же, что и в лемме 2, φ — некоторый гомоморфизм группы G, M — непустое множество ее элементов, H и F — пересечения всех таких подгрупп K групп G и G^φ, для каждой из которых*

$$M \subseteq K = (K \cap A_1)(K \cap A_2) \ldots (K \cap A_n),$$
$$M^\varphi \subseteq K = (K \cap A_1^\varphi)(K \cap A_2^\varphi) \ldots (K \cap A_n^\varphi)$$

соответственно. Тогда $H^\varphi = F$.

Следствие непосредственно вытекает из леммы 4.

Лемма 5. *Пусть G, A_i, F и K — те же, что и в лемме 3, H — пересечение всех содержащих K подгрупп вида $D = (D \cap A_1)(D \cap A_2) \ldots (D \cap A_n)$ группы FK. Тогда если группа $F \cap K$ конечнопорождена и отлична от единицы, то подгруппа $F \cap H$ в произвольной своей нормальной системе имеет предшествующий член.*

Доказательство. Учитывая лемму 2, можно считать, что $H = FK$. Пусть $F \cap K$ имеет конечную систему порождающих M и $F \cap K \neq 1$.

В произвольной нормальной системе подгруппы F ни один отличный от нее член не содержит $F \cap K$ ввиду леммы 3. Но тогда в силу конечности M теоретико-множественное объединение всех таких членов не содержит M. Это объединение и F образуют в системе скачок. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G, A_i, F и K — те же, что и в лемме 3, N — инвариантная в FK подгруппа из F такая, что $\pi(F/N) \subseteq \pi(A_j)$ для некоторого j. Тогда*

$NK = (NK \cap A_1)(NK \cap A_2) \dots (NK \cap A_n)$, $NK \cap A_1 \dots A_i = (NK \cap A_1 \dots A_{i-1})(NK \cap A_i)$, $((NK \cap A_1) \dots (NK \cap A_{i-1}))(NK \cap A_i) = (NK \cap A_1) \dots (NK \cap A_{i-1})$, $i = 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть φ — естественный гомоморфизм FK на FK/N. Так как $\pi(F^\varphi) \cap \pi((F \cap A_i)^\varphi) \subseteq \pi(A_j) \cap \pi(A_i) = \varnothing$, $i \neq j$ и $F^\varphi = (F \cap A_1)^\varphi (F \cap A_2)^\varphi \dots (F \cap A_n)^\varphi$, то $F^\varphi = (F \cap A_j)^\varphi$ и, значит, $K^\varphi \cap F^\varphi \subseteq K^\varphi \cap A_j^\varphi$. Но тогда $K^\varphi = (K \cap F)^\varphi (K \cap A_1)^\varphi \dots (K \cap A_n)^\varphi = (K^\varphi \cap F^\varphi)(K^\varphi \cap A_1^\varphi) \dots (K^\varphi \cap A_n^\varphi) = (K^\varphi \cap A_1^\varphi) \dots ((K^\varphi \cap F^\varphi)(K^\varphi \cap A_j^\varphi)) \dots (K^\varphi \cap A_n^\varphi) = (K^\varphi \cap A_1^\varphi) \dots (K^\varphi \cap A_j^\varphi) \dots (K^\varphi \cap A_n^\varphi)$. Отсюда с учетом леммы 4 следует справедливость леммы 6.

Предложение. *Пусть $G = A_1 A_2 \dots A_n$ — $\mathfrak{W}_0$-группа и A_i, $i = 1, 2, \dots, n$, — ее периодические подгруппы такие, что*

$$(A_1 \dots A_{i-1}) A_i = A_i (A_1 \dots A_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n, \quad \pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Тогда справедливы следующие утверждения: 1. *Группа G локально конечна и $\pi(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(A_i)$.* 2. *Все конечные подгруппы H группы G, для которых $H = (H \cap A_1)(H \cap A_2) \dots (H \cap A_n)$ и $((H \cap A_1) \dots (H \cap A_{i-1}))(H \cap A_i) = (H \cap A_i)((H \cap A_1) \dots (H \cap A_{i-1}))$, $i = 2, \dots, n$, образуют ее локальную систему.* 3. *Подгруппа $A_1 \dots A_k$, $k = 1, \dots, n-1$, — силовская π-подгруппа группы G для $\pi = \bigcup_{i=1}^{k} \pi(A_i)$, содержащая для каждого $p \in \pi$ сопряженную к произвольной конечной p-подгруппе группы G, а если последняя радикальна, — то и к произвольной ее конечной π-подгруппе. В случае, когда G не более чем счетна, подгруппа $A_1 \dots A_k$ для каждого $p \in \pi$ имеет проекционную силовскую p-подгруппу группы G.*

Напомним, что группа называется радикальной, если она обладает возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными факторами [5].

Доказательство. Из утверждения 1 предложения 2 [9] непосредственно вытекает, что группа G локально конечна и $\pi(A_1 \dots A_i) = \bigcup_{j=1}^{i} \pi(A_j)$, $i = 2, \dots, n$, и, вместе с этим, утверждение 1. Первую часть утверждения 3 легко доказать, используя теоремы Силова и Ф. Холла, а также утверждение 2. Если G не более чем счетна, то в предположении справедливости утверждения 2, как легко видеть, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ для некоторых конечных подгрупп $G_i \subseteq G_{i+1}$ и $G_i = (G_i \cap A_1 \dots A_k)(G_i \cap A_{k+1}) \dots (G_i \cap A_n)$. Тогда если P_1 — силовская p-подгруппа группы $G_1 \cap A_1 \dots A_k$, P_2 — группы $G_2 \cap A_1 \dots A_k$, содержащая P_1, P_3 — группы $G_3 \cap A_1 \dots A_k$, содержащая P_2, и т. д., то $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ — проекционная силовская p-подгруппа группы G. Доказательство утверждения 2 с учетом леммы 2 сводится к установлению конечности группы G в случае, когда некоторое конечное множество M ее элементов не содержится ни в какой собственной подгруппе D:

$$D = (D \cap A_1)(D \cap A_2) \dots (D \cap A_n) \tag{2}$$

группы G. Пусть G бесконечна и $\pi_i = \pi(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что она имеет возрастающий нормальный ряд с π_i- и с конечными факторами. Пусть F — минимальный член этого ряда с конечным индексом $|G : F|$, K —

какая-нибудь конечная подгруппа группы G со свойствами: $M \subseteq K$ и $G = F(K \cap A_1)(K \cap A_2) \ldots (K \cap A_n)$. Так как, очевидно, $K \cap F \neq 1$, то ввиду леммы 5 F имеет предшествующий член R в ряде, образованном пересечениями с ней ряда группы G. Тогда индекс $|F : R|$ бесконечен и потому при $N = \bigcap_{g \in G} R^g$ $\pi(F/N) \subseteq \pi_j$ для некоторого j. Но $D = NK$ — подгруппа с соотношением (2) ввиду леммы 6 и $D \neq G$. Противоречие. Предложение доказано.

Для произвольного множества π простых чисел под π-замкнутой группой, как и в [9], будем понимать такую группу X, что для некоторой ее инвариантной подгруппы Y $\pi(Y) \subseteq \pi$ и $\pi(X/Y) \subseteq \pi'$. Предложение сохранит силу, если в нем требования принадлежности классу $\mathfrak{W}_0$-групп и радикальности заменить требованиями наличия у G возрастающего нормального ряда, произвольный фактор которого соответственно удовлетворяет одному из следующих условий: а) π_i-замкнут для всех π_i, за исключением, быть может, одного; б) конечен; или только удовлетворяет условию а). Только в его доказательстве ссылку на теорему Ф. Холла необходимо заменить ссылками на теорему Фейта—Томпсона и теорему Чунихина о сопряженности силовских π-подгрупп и силовских π'-подгрупп в конечной π-разрешимой группе (см., например, [10]).

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что G непримарна. Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, P_1 — проекционная силовская p_1-подгруппа группы $H = H_0$, G_1 — дополнение к P_1 в $G = G_0$ и $H_1 = H_0 \cap G_1$. Тогда H_1 — дополнение к P_1 в H_0, $\pi(H_1) = \{p_2, \ldots, p_n\}$ и H_1 содержит проекционную силовскую p_2-подгруппу P_2 группы H соответственно ввиду леммы 3.7 [3], леммы 1 и отмеченного выше результата из [7], предложения. Аналогично, пусть G_2 — дополнение к P_2 в G_1, и если $n > 2$, то $H_2 = H_1 \cap G_2$ и P_3 — проекционная силовская p_3-подгруппа H, содержащаяся в H_2, и т. д. Тогда G_1 — дополнение к H в G. Теорема доказана.

Примечание. В теореме 3 требование не более чем счетности подгруппы H можно заменить требованием не более чем счетности ее фактор-группы по локально нильпотентному радикалу или требованием почти локальной нормальности H. Если в теореме 3 подгруппа H бипримарна, то требование ее принадлежности к классу $\mathfrak{W}_0$-групп излишне.

1. *Черников С. Н.* Критерий дополняемости почти абелевой подгруппы с условием минимальности в содержащей ее группе // X Всесоюзн. симп. по теории групп : Тез. докл. (Гомель, 9—12 сент. 1986 г.).— Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986.— С. 256.
2. *Черников С. Н.* Критерий дополняемости периодической почти разрешимой подгруппы в содержащей ее группе // XIX Всесоюзн. алгебраич. конф.: Тез. докл. (Львов, 9—11 сент. 1987 г.).— Львов: Ин-т прикл. проблем механики и математики АН УССР, 1987.— Ч.1.— С. 308.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Курош А. Г.* Теория групп: 3-е изд., доп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
5. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.— 604 с.
6. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 120 с.
7. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— 9, № 5.— С. 575—611.
8. *Черников Н. С.* Факторизация линейных групп и групп, обладающих нормальной системой с линейными факторами // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 3.— С. 362—369.
9. *Черников Н. С.* Группы, факторизуемые перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков//Исследования групп с ограничениями для подгрупп.— К. : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 98—117.
10. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964.— 158 с.

Получено 25.02.92