УДК 519.44/47

Б. И. Мищенко, канд. физ.-мат. наук (Киев)

Локально ступенчатые группы с дополняемыми бесконечными непримарными подгруппами

Продолжаются начатые по предложению С. Н. Черникова исследования бесконечных групп с некоторыми системами дополняемых бесконечных подгрупп.

Доказано, что бесконечная локально ступенчатая непримарная группа с дополняемыми бесконечными непримарными подгруппами локально конечна, разрешима и в ней тогда и только тогда имеют дополнения все непримарные подгруппы, когда она — нечерниковская.

Продовжуються розпочаті за пропозицією С. М. Чернікова дослідження нескінченних груп з деякими системами нескінченних підгруп, що мають доповнення.

Доведено, що нескінченна локально ступінчаста непримарна група, всі нескінченні непримарні підгрупи якої мають доповнення, локально скінченна і розв'язна; в ній тоді і лише тоді мають доповнення всі непримарні підгрупи, коли вона — нечерніковська.

В 50-х годах Н. В. Черниковой были описаны произвольные (как конечные, так и бесконечные) группы, в которых дополняемы все подгруппы. Такие группы получили название вполне факторизуемых [1]. Они оказались периодическими разрешимыми, ступени разрешимости не больше 2, а порядки их элементов свободны от квадратов [2, с. 333].

Дальнейшие исследования показали (см. [2], гл. 7, 8), что существование в группе обширной системы дополняемых подгрупп позволяет достаточно детально выяснить ее строение. Так, в работах [3, 4] описано строение групп, у которых дополняемы все непримарные подгруппы. Такие группы были названы непримарно факторизуемыми, а короче — нпф-группами. Локально конечные нпф-группы оказались разрешимыми, ступени разрешимости не больше 3 [4, с. 125, 130], а черниковские нпф-группы — конечными. Черниковскими группами называются конечные расширения прямых произведений конечного числа (в частности, и равного нулю) квазициклических групп [2, с. 29].

В настоящей работе, как и ранее [5], бесконечную непримарную группу, в которой дополняемы все бесконечные непримарные подгруппы, будем называть НПФ-группой. Очевидно, каждую бесконечную непримарную группу, не содержащую бесконечных непримарных подгрупп, следует считать НПФ-группой. Напомним, что под непримарной группой понимается как периодическая группа, не являющаяся p-группой, так и группа, содержащая элементы бесконечных порядков.

Нетрудно проверить, что каждая бесконечная непримарная подгруппа и фактор-группа НПФ-группы сама является НПФ-группой (см. лемму 2 из [6]).

Поскольку в бесконечной циклической группе не имеют дополнений ее истинные (бесконечные) подгруппы, то произвольная НПФ-группа периодическая.

Замечание 1. Непримарная фактор-группа произвольной НПФ-группы по бесконечному нормальному делителю является непримарно факторизуемой группой (см. лемму 3 из [6]).

Замечание 2. Фактор-группа произвольной НПФ-группы по бесконечному непримарному нормальному делителю — вполне факторизуема [6, предложение 5].

В настоящей статье НПФ-группы исследуются при дополнительном условии локальной ступенчатости, исключающем из рассмотрения так называемые бесконечные группы Шмидта — бесконечные неабелевы группы, все собственные подгруппы которых конечны [2, с. 369]. Напомним, что группа называется локально ступенчатой, если каждая ее отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса [2, с. 236]. Класс локально ступенчатых групп достаточно широк, в него, например, входят локально конечные, локально разрешимые, финитно аппроксимируемые группы, а также группы, имеющие нормальную систему с конечными факторами.

На простых примерах черниковских НПФ-групп нетрудно убедиться, что из предположения о дополняемости в группе бесконечных непримарных подгрупп, вообще говоря, не следует дополняемость в ней всех непримарных подгрупп. Например, в группе $G = P \times S$, где P — квазициклическая 2-группа, а S — симметрическая группа 4-й степени, дополнением для любой бесконечной непримарной подгруппы будет некоторая подгруппа силовской 2-подгруппы симметрической группы. Следовательно, G — НПФ-группа. Однако, в этой группе недополняемы ее конечные непримарные подгруппы порядка 24×2^n, $n \geqslant 1$, так как группа G, очевидно, не содержит подгрупп конечного индекса большего 24. Заметим, что группа S — непримарно факторизуема.

Теорема. *Бесконечная локально ступенчатая непримарная группа G с дополняемыми бесконечными непримарными подгруппами локально конечна и разрешима; при этом в G тогда и только тогда дополняемы все непримарные подгруппы, когда она нечерниковская.*

Доказательство. В работе [5] установлено, что произвольная локально конечная НПФ-группа разрешима и она тогда и только тогда непримарно факторизуема, когда группа нечерниковская. В связи с этим здесь достаточно доказать локальную конечность произвольной локально ступенчатой НПФ-группы.

Предположим противное. Пусть G — не локально конечная группа. Тогда она содержит бесконечные конечнопорожденные подгруппы. Пусть H — произвольная подгруппа такого рода. Тогда ввиду локальной ступенчатости группы G в H существует конечнопорожденная подгруппа отличного от единицы конечного индекса, а значит, и некоторый истинный нормальный делитель N конечного индекса. Если H/N — p-группа, то, очевидно, $H \neq H'$, если же H/N — не p-группа, то H/N — разрешима, ввиду замечания 1, а потому снова $H \neq H'$. Таким образом, в любом случае $H \neq H'$, причем фактор-группа H/H' конечна, так как она абелева, периодическая и конечнопорожденная. Отсюда следует, что коммутант H' группы H также конечнопорожден [7].

Пусть, далее, K — некоторая конечнопорожденная непримарная подгруппа, содержащая H. Если K — сама непримарная, то можно считать $K = H$, а если K — примарная, то ввиду непримарности группы G в ней существует такой элемент $g \in G$, что подгруппа $\langle H, g\rangle$ непримарна и можно считать $K = \langle H, g\rangle$.

По доказанному выше свойству произвольных бесконечных конечнопорожденных подгрупп группы G ряд последовательных коммутантов группы $K: K = K^{(0)} > K^{(1)} > K^{(2)} > K^{(3)} > K^{(4)} > K^{(5)}$ строго убывает и при этом все фактор-группы $K/K^{(n)}$ конечны и разрешимы, а каждая из подгрупп $K^{(n)}$ — бесконечна и конечнопорождена. Рассмотрим подгруппу $K^{(4)}$. Она не может быть непримарной, так как в противном случае в силу замечания 2 фактор-группа $K/K^{(4)}$ является вполне факторизуемой группой, а значит, не более, чем двуступенно разрешима. Это означает, что $K^{(2)} \leqslant K^{(4)}$, но это невозможно, ввиду доказанного строгого включения $K^{(2)} > K^{(4)}$. Следовательно, подгруппа $K^{(4)}$ — примарна. Тогда фактор-группа $K/K^{(4)}$ также примарна, так как в противном случае она в силу замечания 1 является конечной непримарно факторизуемой группой, а такие группы имеют ступень разрешимости не выше 3. Но тогда $K^{(3)} \leqslant K^{(4)}$, что также невозможно.

Таким образом, подгруппа $K^{(4)}$ и фактор-группа $K/K^{(4)}$ — обе примарные. Поскольку подгруппа K непримарна и периодическая, а $K^{(4)} \neq K^{(5)}$, то ввиду изоморфизма $K/K^{(4)} \cong K/K^{(5)}/K^{(4)}/K^{(5)}$ [7] справедливо равенство $|K/K^{(5)}| = |K/K^{(4)}|\,|K^{(4)}/K^{(5)}|$. Из него следует, что фактор-группа $K/K^{(5)}$ является непримарной группой. Однако, в таком случае она в силу замечания 1 — не более, чем трехступенно разрешима. Отсюда снова следует включение $K^{(3)} \leqslant K^{(5)}$, что невозможно.

Следовательно, сделанное относительно группы G предположение не верно. Группа G локально конечна. Теорема доказана.

Следствие 1. *Локально ступенчатая группа G, не содержащая бесконечных непримарных подгрупп (т. е. все собственные бесконечные подгруппы которой примарны), является либо примарной, либо черниковской группой.*

Доказательство. Если G — непримарная группа, то в соответствии с определением она является НПФ-группой и в силу доказанной выше теоремы G — локально конечна и разрешима. Очевидно, в группе G найдутся такие отличные от единицы два элемента g_1 и g_2, что $(|g_1|, |g_2|) = 1$. Подгруппа $K = \langle g_1, g_2\rangle$ конечна и если предположить, что G — нечерниковская группа, то тогда в силу леммы 5 из [8] в группе G существует такая подгруппа H, что $H = A \leftthreetimes K$, где A — бесконечная подгруппа из G. Заметим, что по крайней мере одна из подгрупп $H_i = A \leftthreetimes \langle g_i\rangle$, $i = 1, 2$, является истинной бесконечной и непримарной подгруппой группы G, так как, очевидно, $H_i \neq H$. Но это противоречит условиям доказываемого следствия. Таким образом, всякая непримарная группа G, удовлетворяющая условиям следствия, является черниковской группой. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если локально ступенчатая НПФ-группа G не содержит квазициклических подгрупп, то она непримарно факторизуема.*

С л е д с т в и е 3. *Если порядки элементов локально ступенчатой НПФ-группы G свободны от квадратов, то в группе дополняемы все непримарные подгруппы.*

Справедливость сформулированных утверждений вытекает непосредственно из доказанной теоремы ввиду того, что при заданных условиях НПФ-группа G не может быть черниковской.

1. *Черникова Н. В.* Вполне факторизуемые группы//Докл. АН СССР.— 1953.— **92**, № 5.— С. 877— 880.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Алексеева Э. С.* Конечные непримарно факторизуемые группы // Группы с системами дополняемых подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971.— С. 147—179.
4. *Алексеева Э. С.* Бесконечные непримарно факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975.— С. 123—140.
5. *Мищенко Б. И.* Локально конечные группы с дополняемыми бесконечными непримарными подгруппами.— Киев, 1983.— 21 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 83. 39).
6. *Мищенко Б. И.* Группы с некоторыми свойствами дополняемых бесконечных подгрупп // Исследования групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 59—66.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Получено 23.07.91