УДК 519.54

А. Ю. Ольшанский, д-р физ.-мат. наук (Моск. ун-т)

Вложение периодических групп в простые периодические группы

Доказано, что всякая периодическая группа изоморфна подгруппе некоторой простой периодической группы.

Доведено, що будь-яка періодична група ізоморфна підгрупі деякої простої періодичної групи.

Отмечая как стандартный факт вложимость всякой локально конечной группы в простую локально конечную группу, Р. Филлипс поднимает естественный вопрос, любая ли периодическая группа содержится в некоторой простой периодической группе в качестве подгруппы ([1], вопрос 11.106). Ответ положителен.

Т е о р е м а. *Всякая периодическая группа H изоморфно вложима в некоторую простую периодическую группу G.*

Для обоснования видоизменим доказательство из статьи [2], используемое ниже наряду с комбинаторно-геометрическими соображениями из [3]. Дополнительные трудности, обусловленные инволюциями группы H, обходятся, как и в [2], с помощью одного рассуждения, характерного для гиперболических групп, а также за счет плохо контролируемого роста показателей налагаемых соотношений. Например, группа G может не быть π-группой для данного множества простых чисел π, если H — π-группа, и вопрос о вложимости в простую π-группу остается пока открытым.

1. З а д а н и е г р у п п ы G. Пусть по определению $G(0) = G_1 * G_2$ — свободное произведение, в котором $G_1 \cong H \neq \{1\}$, а G_2 — циклическая группа порядка большего, чем 2.

Определения соизмеримых слов в ранге $i \geqslant 0$ над алфавитом $\mathcal{A}^1 = G_1 * G_2$, простых в ранге $i - 1$ слов (а среди них — специальных периодов рангов $i > 0$) и соотношений первого типа такие же, как и в [2], однако требование, чтобы позказатель n_A был больше номера слова A, снимается, ибо нумерация невозможна при несчетной группе H. Вместо этого для каждого конечного подмножества $S \subset \mathcal{A}^1$ такого, что $S \supset G_2$, выбирается некоторая нумерация $f_S(w) \in N$, т. е. f_S нумерует все слова w в алфавите S.

Определим по индукции вставку T ранга $i > 0$. Именно, обозначим через T первое слово относительно некоторого порядка f_S со следующими свойствами (если такое T найдется):

1) существует хотя бы один специальный период A ранга i, для множества букв $\operatorname{supp} A$, используемых в нормальной записи которого, справедливо равенство $G_2 \cup \operatorname{supp} A = S$;

2) $|T| < i$;

3) T не является вставкой какого-либо ранга $j < i$.

Наконец, для каждой вставки T ранга i и каждого периода A из п. 1 определения вставки введем соотношение ранга i второго типа:

$$aA^nTA^{n+1}T \dots A^{n+h-2}TA^{\tilde{n}} = 1, \tag{1}$$

где $\tilde{n} = n_A - \sum_{j=0}^{n+h-2} (n+j)$ и a — начальная буква в записи слова T. Группа $G(i)$ задается так же, как в [2].

2. Дополнительная лемма. Рассматривая диаграммы над свободными произведениями и соответствующие им карты, необходимо принять во внимание замечания и уточнения, сделанные в п. 2 статьи [2] перед леммой 1, которая формулируется теперь следующим образом.

Лемма 1. *Пусть Δ — приведенная дисковая диаграмма ранга i с контуром $p_1q_1p_2q_2$, где q_1 и q_2 — гладкие участки рангов k и l, причем $k \leqslant l$ и $\max(|p_1|, |p_2|) < \alpha k$. Тогда всякая первичная вершина o пути q_1 может быть соединена с некоторой первичной вершиной пути q_2 таким путем $x = x(o)$ длины меньшей k/γ, что множество меток $\varphi(x(o))$ (для всех $o \in q_1$) содержит менее $f(k) = 2^{k/\gamma}$ различных слов.*

Доказательство. Повторив доказательство леммы 1 из [2] (в котором, однако, нужно устранить опечатку, заменив ссылку на лемму 17.5 ссылкой на лемму 22.5), получим путь x, для которого $|x| < k/\gamma$. По построению путь x разлагается в произведение $x'x''$, где x' — подпуть в q_1, а путь x'' равен произведению $s_1^2 u_1 s_2^1$ (обозначения рис. 62 [3]), где s_1^2 и s_2^1 разрезают поддиаграммы примыканий Γ_1 и Γ_2 некоторой клетки Π к q_1 и к q_2, а u_1 — подпуть контура клетки Π. При этом степени примыканий клетки Π с помощью Γ_1 и Γ_2 не меньше $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$.

Оценим числом $a(k)$ возможностей меток контуров клеток Π, которые могут иметь степени примыкания $\geqslant \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ к гладкому участку q_1 ранга k в некоторой приведенной диаграмме ранга $\leqslant i$. Пусть $y_1z_1y_2z_2 = \partial(\Pi, \Gamma, q_1)$. Тогда $|z_2| < (1+\gamma)k$ по условию $S3$ (см. [3], теорема 20.4), а значит, для слова $\varphi(z_2)$ меньше $(1+\gamma)k^2$ возможностей.

Отметим, что при фиксированном слове $\varphi(z_2)$ определяющее слово, написанное на $\partial\Pi$, определено однозначно. Действительно, по леммам 26.5, 23.1, 23.20 и 21.4 из [3] число $j = r(\Gamma)$ меньше $r(\Pi) \leqslant k$, т. е. $\varphi(z_2) \overset{j}{=} \varphi(y_1z_1y_2)^{-1}$. Допустив слово $\varphi(\bar{z}_1)$ с аналогичным свойством, получим равенство $\varphi(\bar{y}_1^{-1}y_1z_1y_2\bar{y}_2^{-1}\bar{z}_1^{-1}) \overset{j}{=} 1$, где $j < r(\Pi)$. К приведенной диаграмме этого равенства, в зависимости от типов клеток Π и $\bar{\Pi}$, применим лемму 25.10 или лемму 26.1 из [3] в меньшем ранге (предварительно, как и в [2], применив лемму 22.5), в соответствии с которыми $\varphi(z_1)$ и $\varphi(\bar{z}_1)$ могут входить лишь в одно определяющее слово. Итак, $a(k) < (1+\gamma)k^2$.

Периметр клетки Π меньше $2,1\,k$ (см. неравенство (13) в § 17 [3]). Следовательно, число циклических подслов определяющего слова, написанного на $\partial\Pi$, читаемых между первичными вершинами, меньше $4,5\,k^2$. В итоге метка $\varphi(u_1)$ может принимать менее $(1+\gamma)k^2 \cdot 4,5\,k^2 < 5k$ значений. По лемме 26.4 и условию B6 из [3] $r(\Pi) \leqslant \iota|\partial\Pi| < 3\iota k < k$, и для меток каждого из путей s_1^2, s_2^1 число возможностей по предположению индукции менее $f(3\iota k)$. Отсюда число значений слов $\varphi(x'')$ можно ограничить величиной $f(3\iota k)^2 \cdot 5k^4$.

Заметим, наконец, что путь x' имеет длину, меньшую $2\gamma^{-1}\alpha k$ (см. в [3] леммы 17.3 и 22.4), т. е. число возможностей для $\varphi(x')$ меньше $2\gamma^{-1}\alpha k$. В результате имеем

$$2\gamma^{-1}\alpha k \cdot 5k^4 f(3\iota k)^2 < 2^{k/\gamma} = f(k).$$

3. Доказательство теоремы. В отличие от [2] положим теперь $\Omega_i = 3\gamma^{-1} i 2^{i/\gamma}$.

Формулировка леммы 2 не меняется по сравнению с [2]. При ее доказательстве обозначим через y путь, соединяющий фазовые вершины путей q_1 и q_2. Его можно записать в виде $y = xz$, где $x = x(o)$ — путь из леммы 1, а z — подпуть длины меньшей $|A|$ слова с A-периодической меткой, конец которого есть фазовая вершина на q_2, т. е. для z есть не больше $|A|$ возможностей. Учитывая лемму 1, имеем менее $\frac{1}{3}\gamma\Omega_{|A|}$ возможностей для меток путей $y = y(o)$ при разном выборе фазовых вершин o. После этого доказательство леммы 2 завершается, как и в [2], но с заменой в обозначениях x на y. Все изложенное в пп. 3, 4 [2] используется здесь без изменений, а формулировка леммы 7 [2] модифицируется: утверждается теперь, что множество специальных периодов всех рангов, в запись которых входят только заданные буквы $a_1, \ldots, a_s \in G_1 \setminus 1$ (где $s \geqslant 1$) и какие-то буквы из G_2, бесконечно. Изменение в доказательстве состоит в том, что после построения, как в [2], достаточно длинного периода A, в запись которого входят $a = a_s$ и $b, c \in G_2$, нужно затем заменить последовательно $s - 1$ первых вхождений буквы a в слово A на $a_1, \ldots, a_{s-1}$.

Завершается доказательство теоремы следующим образом. Периодичность группы $G = G(\infty)$ — прямого предела групп $G(i)$ — объясняется так же, как в [2], равно как и мономорфность естественных отображений групп G_1 и G_2 в G. Остается доказать, что G — простая группа, т. е. что нормальное замыкание $\langle T \rangle^G$ каждого неединичного в G слова T совпадает с G. Заменяя слово T сопряженным в $G(0)$, можно считать, что оно начинается с наперед заданной буквы $a \in \{\mathcal{A}^1\} \setminus 1$. Выберем конечное множество S, содержащее G_2 и все буквы из записи слова T. Множество специальных периодов с носителем S бесконечно по лемме 7. Поэтому по определению слов (1) среди них есть такое, в котором вставка некоторого ранга i совпадает с данным T, а буква a есть начальная буква в T. Как и в [2], отсюда следует, что $a \in \langle T \rangle^G$. В итоге $\mathcal{A}^1 \subset \langle T \rangle^G$, т. е. $G = \partial p\,\{\mathcal{A}^1\} = \langle T \rangle^G$.

1. *Коуровская* тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп / В. М. Копытов, В. Д. Мазуров, Н. С. Романовский и др.: 11-е изд.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990.— 126 с.
2. *Ольшанский А. Ю.* Вложение счетных периодических групп в простые 2-порожденные периодические группы // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 7, 8.— С. 980—986.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах.— М. : Наука, 1989.— 448 с.

Получено 30.10.91