

СПІВІСНУВАННЯ ЦИКЛІВ НЕПЕРЕРВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРЯМОЇ У СЕБЕ

Our main result can be formulated as follows: Consider the set of natural numbers in which the following relation is introduced: n_1 precedes n_2 ($n_1 \preceq n_2$) if, for any continuous mappings of the real line into itself, the existence of a cycle of order n_2 follows from the existence of a cycle of order n_1 . The following theorem is true:

Theorem. *The introduced relation transforms the set of natural numbers into an ordered set with the following ordering:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 3 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec \dots \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Основний результат цього дослідження можна сформулювати так. Розглянемо множину натуральних чисел, у якій введено відношення: n_1 передуює n_2 ($n_1 \preceq n_2$), якщо для будь-яких неперервних відображень дійсної прямої у себе існування циклу порядку n_2 випливає з існування циклу порядку n_1 . Справедлива така теорема.

Теорема. *Уведене відношення перетворює множину натуральних чисел на впорядковану множину, до того ж упорядковану в такий спосіб:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 3 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec \dots \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Усяка неперервна функція дійсної змінної $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, породжує неперервне перетворення T прямої у себе: $x \rightarrow f(x)$. Властивості перетворення T визначаються в основному структурою множини нерухомих точок перетворення T .

Нагадаємо, що точку α називають нерухомою точкою порядку k перетворення T , якщо $T^k \alpha = \alpha$, $T^j \alpha \neq \alpha$, $1 \leq j < k$. Точки $T\alpha, T^2\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha$ також є нерухомими порядку k і разом із точкою α складають цикл порядку k .

У цій роботі досліджується питання про залежність між існуванням циклів різних порядків.

Основний результат цієї роботи може бути сформульований у такій формі. Розглянемо множину натуральних чисел, у якій введено відношення: n_1 передуює n_2 ($n_1 \prec n_2$), якщо для всякого неперервного перетворення прямої у себе існування циклу порядку n_1 тягне за собою існування циклу порядку n_2 . Таке відношення, вочевидь, має властивості рефлексивності й транзитивності, а отже, множина натуральних чисел із цим відношенням є квазівпорядкованою множиною¹. Далі доведемо таку теорему.

Теорема. *Уведене відношення перетворює множину натуральних чисел на впорядковану множину, до того ж упорядковану в такий спосіб:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 3 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec \dots \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1. \quad (*)$$

Термінологією впорядкованих множин далі ми користуватися не будемо. Доведення теорем по суті спираються тільки на теорему Больцано–Коші про проміжне значення.

З неперервності перетворення T одразу випливає, що якщо у перетворення T існує цикл порядку $k > 1$, то перетворення T має і нерухому точку першого порядку.

¹Г. Биркгоф, *Теория структур*, Гостехиздат, Москва (1952), с. 16–21.

Теорема 1. Якщо перетворення T має цикл порядку $k > 2$, то воно має і цикл другого порядку².

Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — точки циклу, причому $T\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $T\alpha_k = \alpha_1$. Нехай $\alpha_1 < \alpha_i$ ($i \neq 1$), $\alpha_r > \alpha_i$ ($i \neq r$). Розглянемо інтервал (α_1, α_{r-1}) (вважаємо, що $r > 2$; якщо $r = 2$, то слід узяти інтервал (α_k, α_r)). Залежно від того, існують на (α_1, α_{r-1}) нерухомі точки першого порядку чи ні, через β позначимо або найближчу до α_{r-1} нерухому точку першого порядку, або точку α_1 (найближча до α_{r-1} точка, якщо на (α_1, α_{r-1}) є нерухомі точки першого порядку, існує завдяки неперервності T). Оскільки $T\alpha_{r-1} = \alpha_r > \alpha_{r-1}$, то $Tx > x$ для $x \in (\beta, \alpha_{r-1}]$. Якщо β — нерухома точка першого порядку, то, як неважко бачити, для будь-якого цілого $j > 0$ знайдеться такий окіл точки β , що для всякого $x > \beta$ із цього околу $T^j x > x$. Якщо $\beta = \alpha_1$, то при $0 < j < k$ $T^j \beta = \alpha_{j+1} > \alpha_1 = \beta$. З іншого боку, $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. Отже, на інтервалі (β, α_{r-1}) внаслідок неперервності перетворення T існує точка γ така, що $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$. Оскільки $T\gamma \neq \gamma$, то γ — нерухома точка порядку l , де $1 < l \leq k - r + 2 < k$. А оскільки завжди існує нерухома точка порядку меншого за k , але більшого за одиницю, то завжди існує і нерухома точка другого порядку.

Формулюванню та доведенню наступних тверджень передують такі досить тривіальні леми, доведення яких наводимо лише для повноти.

Лема 1. Якщо $T^p \alpha = \alpha$ і точка α є нерухомою точкою порядку k перетворення T , то p кратне k .

Справді, якщо α — нерухома точка порядку k , то $T^k \alpha = \alpha$, $T^j \alpha \neq \alpha$, $j < k$. Нехай $p = ks + r$, $r < k$. Якщо припустити, що $r \neq 0$, то $T^r \alpha \neq \alpha$ і $T^p \alpha = T^r \underbrace{T^k \dots T^k}_{s \text{ разів}} \alpha \neq \alpha$.

Лема 2. Якщо для перетворення T α є нерухомою точкою порядку $k = 2^m l$, де l непарне, то для перетворення $S = T^{2^m}$ точка α є нерухомою точкою порядку

$$q = \begin{cases} 2^{n-m}l, & \text{якщо } n \geq m, \\ l, & \text{якщо } n \leq m. \end{cases}$$

Доведення. За лемою 1 $T^p \alpha = \alpha$ тільки при $p = ki$, $i = l, 2, \dots$. Припускаючи, що α є нерухомою точкою перетворення S , знайдемо її порядок q . У цьому випадку $S^q \alpha = \alpha$, $S^j \alpha \neq \alpha$, $1 \leq j < q$. Оскільки $S^q = T^{2^m q}$, то $S^q \alpha = \alpha$ тоді і тільки тоді, коли $2^m q = ki$, де i — натуральне число. Звідси $q = \frac{k}{2^m} i$. Найменше значення i , за якого права частина буде цілим числом, і відповідає шуканому значенню q . Справді, за цього значення q , як неважко бачити, $S^q \alpha = \alpha$, $S^j \alpha \neq \alpha$, коли $j < q$.

Якщо $k = 2^n l$, де l непарне, то $q = 2^{n-m} l i$. При $n \geq m$ $i = 1$ і, отже, $q = 2^{n-m} l$. При $n < m$ $i = 2^{m-n}$, тобто $q = l$.

Наслідок. За припущень леми 2, якщо $l > 1$, то нерухома точка α для перетворення S має порядок, вищий за другий.

Лема 3. Точка α є нерухомою точкою порядку 2^m перетворення T тоді і тільки тоді, коли $T^{2^m} \alpha = \alpha$, $T^{2^{m-1}} \alpha \neq \alpha$.

²Це твердження міститься в [1]. Тут наведено більш чітке його доведення.

Необхідність умов очевидна.

Достатність. Якщо $T^{2^m}\alpha = \alpha$, то α може бути нерухомою точкою порядку 2^j , $j = 0, 1, \dots, m$ (лема 1). Оскільки $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$, то і $T^{2^j}\alpha \neq \alpha$ за будь-якого $j < m - 1$, оскільки $T^{2^{m-1}} = \underbrace{T^{2^j} \dots T^{2^j}}_{2^{m-j-1} \text{ разів}} \dots$. Таким чином, α є нерухомою точкою порядку 2^m .

Теорема 2. *Якщо перетворення T має цикл порядку 2^n , $n > 1$, то перетворення T має цикли порядку 2^i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ³.*

Нехай α — нерухомою точка порядку 2^n . Покажемо, що T має нерухому точку порядку 2^m , $1 \leq m < n$.

Покладемо $T^{2^{n-1}} = S$. Згідно з лемою 2 точка α для перетворення S є нерухомою точкою порядку 2^{n-m+1} , тобто вищого за другий. За теоремою 1 для S існує нерухомою точка β другого порядку: $S^2\beta = \beta$, $S\beta \neq \beta$. Отже, $T^{2^m}\beta = \beta$, $T^{2^{m-1}}\beta \neq \beta$.

Аналогічно доводиться така теорема.

Теорема 3. *Якщо перетворення T має цикл порядку k , відмінного від степеня двійки, то у перетворення T є цикли порядку 2^i , $i = 1, 2, 3, \dots$.*

Нехай α — нерухомою точка порядку k . Покажемо, що у T існує нерухомою точка β порядку 2^m , де $m \geq 1$.

Покладемо $T^{2^{m-1}} = S$. За наслідком із леми 2 точка α є для перетворення S нерухомою точкою порядку, вищого за другий. Згідно з теоремою 1 для S існує нерухомою точка β другого порядку. Тож $S^2\beta = \beta$, $S\beta \neq \beta$, тобто $T^{2^m}\beta = \beta$, $T^{2^{m-1}}\beta \neq \beta$.

З теореми 3 випливає, що існують перетворення, які мають цикли як завгодно високого порядку, оскільки перетворення, яке має цикл заданого порядку, зокрема відмінного від степеня двійки, завжди легко побудувати.

Теорема 3 показує також, що достатньо функцію $f(x)$, яка задає перетворення T , зафіксувати у скінченному числі точок (що утворюють цикл), наприклад у трьох, і існуватиме нескінченно багато циклів незалежно від того, як ми мінятимемо (неперервним чином) значення $f(x)$ в інших точках прямої.

Розглянемо множину нерухомих точок, що утворюють один цикл. Нехай точки $\alpha_1, \alpha_2 = T\alpha_1, \dots, \alpha_k = T\alpha_{k-1}$ утворюють цикл k -го порядку. Розіб'ємо точки циклу на дві множини M_1 і M_2 такі, що $\alpha_i \in M_1$, якщо $\alpha_i < T\alpha_i$, та $\alpha_i \in M_2$, якщо $\alpha_i > T\alpha_i$. Нехай $\alpha^{M_1} = \max_{\alpha_i \in M_1} \alpha_i$, $\alpha_{M_2} = \min_{\alpha_i \in M_2} \alpha_i$. Можуть виникнути два випадки: або $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$, або $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$.

Лема 4. *Якщо $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$, то перетворення T має цикли будь-якого порядку.*

Виберемо з усіх точок, що належать M_1 і більші за α_{M_2} , ту, у якій значення функції $f(x)$, що задає перетворення T , є найбільшим. Позначимо її через β . Оскільки $T\alpha_{M_2} < \alpha_{M_2}$, $T\beta > \beta$, то множина всіх нерухомих точок першого порядку на інтервалі (α_{M_2}, β) є множиною непорожньою та замкненою (внаслідок неперервності перетворення T). Нехай точка γ є найбільшою на цьому інтервалі нерухомою точкою першого порядку. Тоді $T\gamma = \gamma$ і $Tx > x$ на $(\gamma, \beta]$. Інтервал $(\gamma, T\beta]$ вибрано так, що він містить нерухомі точки даного циклу (наприклад, β , $T\beta$). Оскільки при послідовному застосуванні перетворення T до будь-якої точки циклу цикл

³ Твердження теорем 2 і 3 наведено в [2].

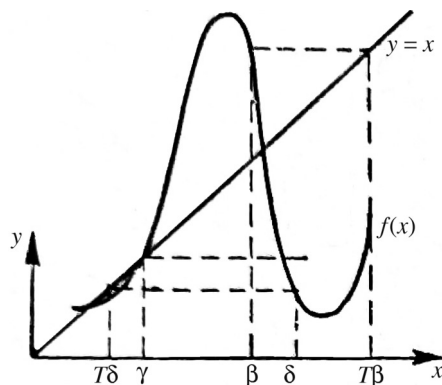


Рис. 1

повинен замкнутися, то на $(\gamma, T\beta]$ повинна існувати принаймні одна точка δ циклу така, що або $T\delta > T\beta$, або $T\delta < \gamma$. Перша з нерівностей неможлива. Справді, якщо $\delta \in M_2$, то $T\delta < \delta < T\beta$, а якщо $\delta \in M_1$, то $T\delta < T\beta$ згідно з вибором точки β . Отже, на $(\gamma, T\beta]$ існує точка δ циклу, для якої $T\delta < \gamma$ (можливо, $\delta = T\beta$). І тому що на $(\gamma, \beta]$ $Tx > x$, то точка $\delta \in (\beta, T\beta]$. Отримана схема (рис. 1): $T\gamma = \gamma$, $Tx > x$ на $(\gamma, \beta]$, $\delta \in (\beta, T\beta]$ та $T\delta < \gamma$ (назвемо її L -схемою) і забезпечує існування циклів усіх порядків.

Справді, $T(\gamma, \beta] \supseteq (\gamma, T\beta]^4$, а отже, на $(\gamma, \beta]$ існує непорожня замкнена множина точок, які T перетворює за один крок у точку δ . Найменшу з них позначимо δ_1 . Аналогічно, позаяк $T(\gamma, \delta_1] = (\gamma, \delta]$, на $(\gamma, \delta_1]$ існує непорожня замкнена множина точок, які T перетворює за один крок у точку δ_1 . Найменшу з них позначимо δ_2 . Очевидно, $\gamma < \delta_2 < \delta_1$ і $T(\gamma, \delta_2] = (\gamma, \delta_1]$. Продовжуючи процес побудови точок δ_i , отримуємо послідовність $\delta > \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_{i-1} > \delta_i > \dots > \gamma$, причому $T\delta_i = \delta_{i-1}$. Очевидно, $T^i\delta_{i-1} = T\delta$, $T^i\delta_i = \delta$. Отже, $T^i\delta_i > \delta_i$, $T^i\delta_{i-1} < \delta_{i-1}$ і завдяки неперервності перетворення T^i на інтервалі (δ_i, δ_{i-1}) існує принаймні одна точка ρ_i така, що $T^i\rho_i = \rho_i$. Оскільки $T^j(\gamma, \delta_{i-1}] = (\gamma, \delta_{i-j-1}] \subset (\gamma, \delta_1]$ при $j < i-1$ і на $(\gamma, \delta_1]$ $Tx > x$, то $T^jx > x$ на $(\gamma, \delta_{i-1}]$ при $1 \leq j < i$. Тож $T^j\rho_i \neq \rho_i$, коли $1 \leq j < i$, тобто ρ_i є нерухомою точкою i -го порядку.

Лему доведено.

Зауваження. Якщо існує нерухома точка першого порядку, яка менша за α^{M_1} (але більша за $\alpha_{\min} = \min_{i=1,2,\dots,k} \alpha_i$), то у перетворення T можна виокремити, як і вище, L -схему. Звідси випливає, що перетворення T , незалежно від розташування точок циклу, має цикли будь-якого порядку.

Якщо існує нерухома точка першого порядку, що більша за α_{M_2} (але менша за $\alpha_{\max} = \max_{i=1,2,\dots,k} \alpha_i$), то у перетворення T можна виокремити схему, що є відображенням L -схеми щодо точки γ як центра. Аналогічно тому, як і при доведенні леми 4, показується, що така схема також гарантує існування циклів усіх порядків.

Перейдемо до випадку, коли $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$. Має місце

Лема 5. Якщо $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ та існує така точка $\alpha \in M_1$, що і $T\alpha \in M_1$, то перетворення T має цикли непарних порядків, більших за k , та всіх парних порядків.

⁴ Під $T(\gamma, \beta]$ розуміємо множину образів точок, які належать $(\gamma, \beta]$.

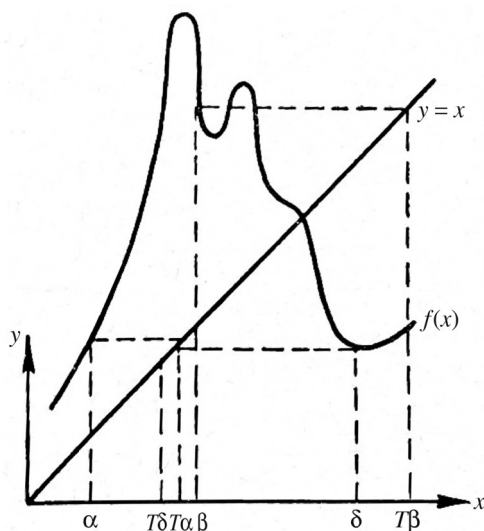


Рис. 2

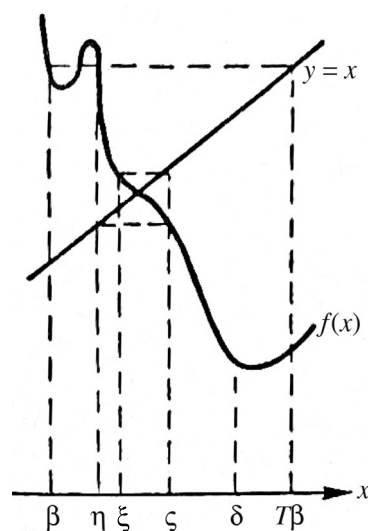


Рис. 3

Лема справедлива і при $\alpha \in M_2$, $T\alpha \in M_2$.

Почнемо з виокремлення схеми, яка й приведе до доведення леми.

Нехай $n = \min j$ і β — та з точок ξ , для яких досягається

$$\min_{\substack{T^j \xi \leq \alpha \\ \xi \in M_1, \xi \geq T\alpha}}$$

(або, якщо таких точок кілька, одна з них). Отже, $T^n \beta = \gamma \leq \alpha$, $T^i \beta > \alpha$, $i < n$. Розглянемо послідовність $T\beta, T^2\beta, T^3\beta, \dots$. Нехай $T^l \beta$ — перша точка цієї послідовності, що належить M_1 . Легко бачити, що $T^l \beta < T\alpha$. Справді, якби було $T^l \beta > T\alpha$ (очевидно, $T^l \beta \neq T\alpha$), то тоді зазначений вище $\min j$ мав би бути меншим за n . Оскільки $T\beta > \beta \geq T\alpha$, то $T\beta \in M_2$, і, отже, $l \geq 2$. Позначимо точку $T^{l-1}\beta$ через δ . Точка $\delta \in (\beta, T\beta]$ і $T\delta < T\alpha$. Проведені міркування звелися до побудови картинки, зображеної на рис. 2. Отриману схему назовемо M -схемою.

Розглянемо інтервал $[\beta, \delta]$ (рис. 3). Нехай точка η — найбільша з тих точок x інтервалу, для яких $Tx = T\beta$ (можливо, $\eta = \beta$). На інтервалі (η, δ) $Tx < T\beta$. Оскільки $T\eta = T\beta \geq \delta$, $T\delta < T\alpha \leq \eta$, то на (η, δ) існує принаймні одна точка ζ така, що $T\zeta = \eta$. Якщо таких точок на інтервалі $[\eta, \delta]$ більше однієї, вважатимемо, що ζ — найменша з них. Таким чином, $T\eta = T\beta$, $T\zeta = \eta$ і для всіх $x \in (\eta, \zeta)$ $\eta < Tx < T\beta$. Далі на інтервалі $[\eta, \zeta]$ візьмемо точку ξ , найбільшу з тих точок x , для яких $Tx = \zeta$. Для всіх $x \in (\xi, \zeta)$ $\eta < Tx < \zeta$.

Для більшої наочності подальших міркувань побудуємо приблизний графік функції $f(f(x))$ на інтервалі $[\xi, \zeta]$ (рис. 4). Маємо $T^2\xi = \eta < \xi$, $T^2\zeta = T\beta > \zeta$, $\eta < T^2x < T\beta$ на (ξ, ζ) . Нехай $\omega_1 \leq \omega_2$ — відповідно найменша й найбільша з тих точок інтервалу $[\xi, \zeta]$, у яких $T^2x = x$. Очевидно, $T\omega_1 = \omega_2$, $T\omega_2 = \omega_1$, тобто ω_1 і ω_2 утворюють цикл другого порядку, або, якщо $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то ω — нерухома точка першого порядку⁵. Навіть більше, $T(\xi, \omega_1) = (\omega_2, \zeta)$, $T(\omega_2, \xi) = (\eta, \omega_1)$.

⁵Справді, $T\omega_2 \geq \omega_1$, тому що $T^2(T\omega_2) = T\omega_2$, і, отже, $T\omega_2 \in (\xi, \omega_1)$. Аналогічно, $T\omega_1 \leq \omega_2$. Тому $T[\xi, \omega_1] \supseteq [\omega_2, \zeta]$ і на $[\xi, \omega_1]$ знайдеться точка χ така, що $T\chi = \omega_2$. Для будь-якого $x \in [\xi, \omega_1]$ $T^2x \leq x$. Таким чином, $\chi \geq T^2\chi = T\omega_2 \geq \chi$, звідки $T^2\chi = \chi$, тобто $\chi = \omega_1$.

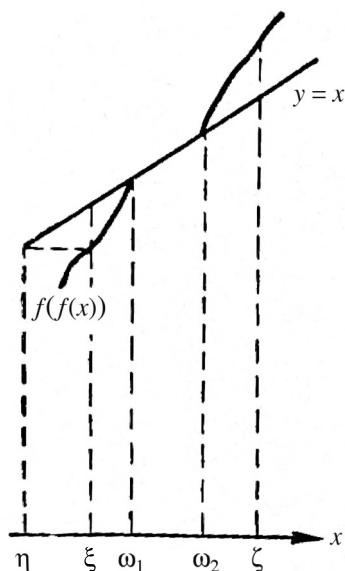


Рис. 4

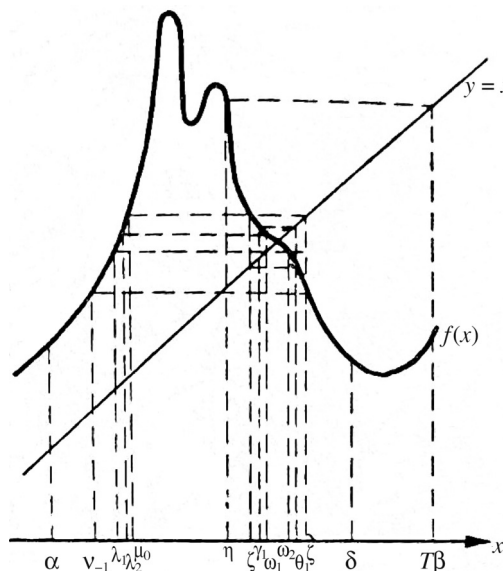


Рис. 5

Аналогічно тому, як зроблено вище для L -схеми, побудуємо послідовність $\zeta = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \dots > \omega_2$ таку, що $T^2\theta_i = \theta_{i-1}$, $T^2(\omega_2, \theta_i) = (\omega_2, \theta_{i-1})$, і послідовність $\xi = \varkappa_0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \dots < \omega_1$ таку, що $T^2\varkappa_i = \varkappa_{i-1}$, $T^2(\varkappa_i, \omega_1) = (\varkappa_{i-1}, \omega_1)$. Отже, $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = (\eta, \omega_1)$ і $T^{2i+2}(\varkappa_i, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$.

Оскільки $T\alpha < \eta$, $T\eta = T\beta > \zeta$, то на інтервалі (α, η) існують точки, значення функції $f(x)$ у яких дорівнює ω_1 , ω_2 , η , θ_i , $\varkappa_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Завжди знайдуться такі точки λ_1 , λ_2 , μ_0 , $\nu_{-1} \in (\alpha, \eta)$, що $T\lambda_1 = \omega_1$, $T\lambda_2 = \omega_2$, $T\mu_0 = \theta_0 = \zeta$, $T\nu_{-1} = \eta$ і $T(\nu_{-1}, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$, $T(\lambda_2, \mu_0) = (\omega_2, \zeta)$. Далі можна знайти точки μ_i , $i = 1, 2, \dots$, так, щоб $T\mu_i = \theta_i$, $T(\lambda_2, \mu_i) = (\omega_2, \theta_i)$, і точки ν_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, такі, що $T\nu_i = \varkappa_i$, $T(\nu_i, \lambda_1) = (\varkappa_i, \omega_1)$. Очевидно, $T^{2i+2}\mu_i = \eta$, $T^{2i+2}(\lambda_2, \mu_i) = (\eta, \omega_1)$ і $T^{2i+3}\nu_i = \eta$, $T^{2i+3}(\nu_i, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$.

Позаяк $T\eta = T\beta$, то $T^n\eta = \gamma$ (n — найменше додатне число таке, що $T^n\beta \leq \alpha$). Для того щоб перейти від однієї точки циклу до іншої, потрібно не більше ніж $k - 1$ кроків, і тому $n \leq k - 1$. Неважко бачити, якщо $\gamma = \alpha$, $\beta = T\alpha$, то $n = k - 1$.

Покажемо, що перетворення T має нерухомі точки непарного порядку, більшого за k . Нехай n парне. У цьому випадку $n + 2i + 3$ ($i \geq 0$) непарне та існує нерухома точка порядку $s = n + 2i + 3$. Справді, $T^s\lambda_1 = \omega_1 > \lambda_1$, $T^s\nu_i = \gamma < \nu_i$, і, отже, на інтервалі (ν_i, λ_1) існують точки x такі, що $T^s x = x$. Нехай ρ_s — найбільша з них. Стверджується, що ρ_s — нерухома точка порядку s . Оскільки s непарне, то ρ_s може бути лише точкою непарного порядку (лема 1). Припустимо, що ρ_s — нерухома точка порядку r , де $r < s$ і непарне. Точка $T\rho_s \in (\varkappa_i, \omega_1)$, і знайдеться така точка $\pi' \in (\varkappa_{i+\frac{s-r}{2}}, \omega_1)$, що $T^{s-r}\pi' = T\rho_s$.

Оскільки $T^2x < x$ на $(\varkappa_j, \omega_1)$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, та $T^{s-r} = \underbrace{T^2(T^2(\dots T^2))}_{\frac{s-r}{2} \text{ разів}}$, то $T\rho_s < \pi' < \omega_1$. Існує точка π'' така, що $\rho_s < \pi'' < \lambda_1$ і $T\pi'' = \pi'$. Отже, $\rho_s < \pi'' < \lambda_1$ і $T^s\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}T\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}\pi' = T^{r-1}T\rho_s = T^r\rho_s = \rho_s < \pi''$, і, отже, на інтервалі (π'', λ_1) існує точка ρ'_s , у якій $T^s\rho'_s = \rho'_s$; $\rho_s < \rho'_s$, а це суперечить тому, що ρ_s — найбільша з усіх

точок $x \in (\nu_i, \lambda_1)$ таких, що $T^s x = x$. Непарне число $s = n + 3$ ($i = 0$) завжди не перевищує найменшого непарного числа, більшого за k , і, отже, при парному n існування нерухомих точок непарного порядку, більшого за k , доведено.

Якби n було непарним, потрібно було б замість послідовності $\{\nu_i\}$ скористатися послідовністю точок μ_i .

Покажемо тепер, що перетворення T має нерухомі точки будь-якого парного порядку. Нехай n парне. У цьому випадку слід використовувати послідовність $\{\mu_i\}$. Покладемо $s = n + 2i + 2$, $T^s \lambda_2 = \omega_2 > \lambda_2$, $T^s \mu_i = \gamma < \mu_i$, і, отже, на інтервалі (λ_2, μ_i) існують точки x такі, що $T^s x = x$. Нехай σ_s — одна з цих точок. Стверджується, що при $s \geq 2k - 2$ σ_s є нерухомою точкою порядку s . Справді, оскільки $T^s \sigma_s = \sigma_s$, то σ_s є або нерухомою точкою s -го порядку, або нерухомою точкою меншого порядку r , якому кратне s (лема 1). Очевидно, $r \leq \frac{s}{2}$, і тому, якщо $T^j \sigma_s \neq \sigma_s$ при $1 \leq j \leq \frac{s}{2}$, то σ_s — нерухома точка порядку s . На інтервалі (λ_2, μ_i) $T^j x > \eta > x$ при будь-якому $1 \leq j \leq s - n$, тому що $T^j(\lambda_2, \mu_i) \subset (\eta, \zeta)$, коли $l < s - n$. Таким чином, при $s - n \geq \frac{s}{2}$ точка σ_s є нерухомою точкою порядку s . А остання нерівність завжди виконується при $s \geq 2k - 2$.

Аналогічно доводиться існування нерухомих точок парного порядку $s \geq 2k - 2$ при непарному n , але вже за допомогою точок ν_i .

Залишилося показати, що T має нерухомі точки парного порядку, меншого за $2k - 2$. Перш ніж завершити доведення леми 5, доведемо таку лему.

Лема 6. *Якщо перетворення T має цикл непарного порядку, то воно має цикли будь-якого парного порядку.*

Розглянемо множини M_1 і M_2 . Якщо $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$, то існують цикли всіх порядків (лема 4). Нехай $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$. Точки циклу непарного порядку для перетворення $S = T^2$ також утворюють цикл k -го порядку (лема 2). Для перетворення S можна скласти аналогічно множинам M_1 і M_2 множини M_1^2 і M_2^2 , вважаючи, що $\alpha_i \in M_1^2$, якщо $\alpha_i < T^2 \alpha_i$, і $\alpha_i \in M_2^2$, якщо $\alpha_i > T^2 \alpha_i$. Нехай $\alpha^{M_1^2}$ — найбільша точка з M_1^2 , а $\alpha_{M_2^2}$ — найменша точка з M_2^2 . Покажемо, що перетворення S має цикли всіх порядків.

Оскільки $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$, то перетворення T має нерухому точку γ першого порядку таку, що $\alpha^{M_1} < \gamma < \alpha_{M_2}$. Ця точка є нерухомою точкою першого порядку і для перетворення $S = T^2$. Якщо $\alpha^{M_1^2} \neq \alpha^{M_1}$ (а отже, і $\alpha_{M_2^2} \neq \alpha_{M_2}$), то або $\alpha^{M_1^2} \in M_2$ і $\gamma < \alpha^{M_1^2}$, або $\alpha_{M_2^2} \in M_1$ і $\gamma > \alpha_{M_2^2}$. Залишилося скористатися зауваженням до леми 4.

Нехай $\alpha^{M_1^2} = \alpha^{M_1}$, а отже, і $\alpha_{M_2^2} = \alpha_{M_2}$, $M_1^2 = M_1$, $M_2^2 = M_2$. Нехай точка α_1 — найменша з усіх точок α_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Тоді $\alpha_k \in M_2$. Оскільки $\alpha_{k-1} > \alpha_1$, то $\alpha_{k-1} \in M_2^2$, і, отже, $\alpha_{k-1} \in M_2$. Таким чином, $\alpha_{k-1} > \alpha_k$. Нехай точка α_r — найбільша з усіх точок α_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Точка $\alpha_{r-1} \in M_1$ і, отже, $\alpha_1 < \alpha_{r-1} < \alpha_k$. Оскільки на інтервалі (α_k, α_{k-1}) функція $f(x)$ набуває принаймні всіх значень з інтервалу (α_1, α_k) , то на (α_k, α_{k-1}) знайдеться точка δ така, що $T\delta = \alpha_{r-1}$. Насамкінець, нехай ω — найбільша з тих точок $x \in [\gamma, \delta]$, для яких $Sx = x$ (на $[\gamma, \delta]$ принаймні одна точка така, що $Sx = x$, існує, оскільки $S\gamma = \gamma$).

Отже, маємо $S\omega = \omega$, $S\delta = \alpha_r > \delta$, $Sx > x$ на $(\omega, \delta]$, $\alpha_{k-1} \in (\delta, \alpha_r)$ та $S\alpha_{k-1} = \alpha_1 < \omega$. Нам вдалося у перетворення S виділити L -схему (див. доведення леми 4), яка й забезпечує існування у S циклів усіх порядків.

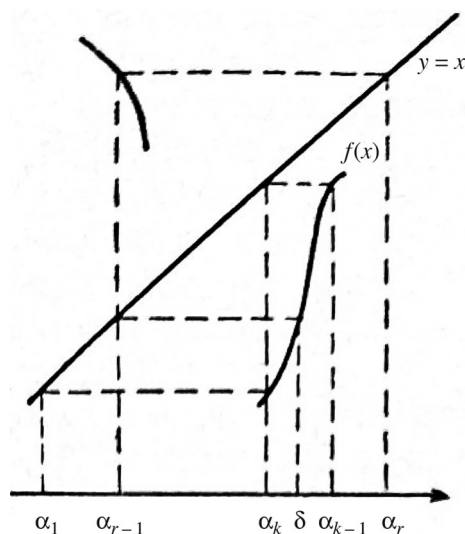


Рис. 6

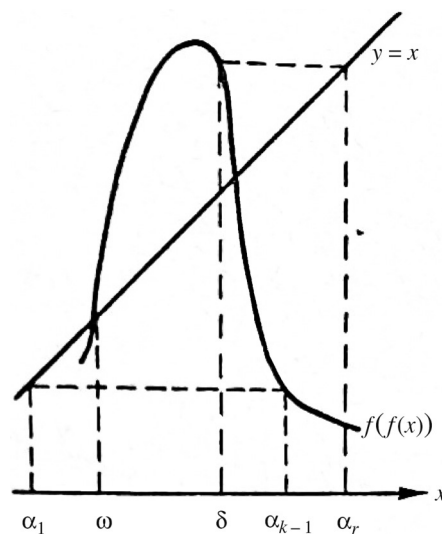


Рис. 7

З того, що перетворення S має цикли всіх порядків, одразу впливає існування циклів парного порядку у перетворення T . Покажемо, наприклад, що перетворення T має цикл порядку $l = 2l_1$.

Нехай точка α є нерухомою точкою порядку l_1 перетворення S . Це означає, що $S^{l_1}\alpha = \alpha$ і $S^{j_1}\alpha \neq \alpha$, $1 \leq j_1 < l_1$, тобто $T^l\alpha = \alpha$ і $T^j\alpha \neq \alpha$, де j — будь-яке парне число, менше за l . Оскільки $S\alpha \neq \alpha$, то і $T\alpha \neq \alpha$. Отже, або точка α є нерухомою точкою порядку l перетворення T , або точка α є нерухомою точкою непарного порядку l_2 (але не першого), причому $l_2 \leq l_1$ ⁶. Але для циклу непарного порядку завжди виконуються умови або леми 4, або леми 5. Справді, оскільки цикл містить непарне число точок, то або в M_1 їх більше, або в M_2 . Нехай для визначеності в M_1 більше точок, ніж в M_2 . Тоді обов'язково в M_1 знайдеться точка μ така, що $T\mu \in M_1$, тому що в протилежному випадку кількість точок у M_1 не могла б перевищувати число точок у M_2 . Отже, оскільки для перетворення T , яке має цикл порядку l_2 , виконуються умови або леми 4, або леми 5, то T повинно мати цикли парного порядку $\geq 2l_2 - 2$, а отже, і порядку l .

Лему 6 доведено.

Цим самим завершується й доведення леми 5. Оскільки при її доведенні вже встановлено існування циклів непарного порядку (більшого за k), то, отже, існують цикли і всіх парних порядків.

Завдяки всьому викладеному вище має місце така теорема.

Теорема 4. *Якщо перетворення T має цикл непарного порядку k , то воно має цикли непарних порядків, більших за k , і всіх парних порядків.*

Теорему 4 не можна посилити. Зараз буде побудовано приклад перетворення T , яке має цикл порядку $2m + 1$, але не має циклів порядку $2j - 1$, $j = 2, 3, \dots, m$.

⁶ З леми 2, взагалі кажучи, впливає, що для перетворення T точка α є нерухомою точкою порядку $2l_1$, якщо l_1 парне, і $2l_1$ або l_1 , якщо l_1 непарне.

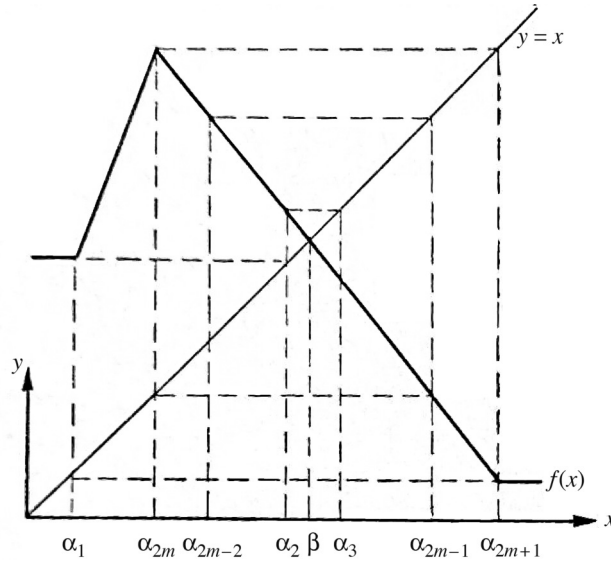


Рис. 8

Нехай точки α_i , $i = 1, 2, \dots, 2m+1$, утворюють цикл порядку $2m+1$, причому $\alpha_{i+1} = T\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, 2m$, $\alpha_1 = T\alpha_{2m+1}$, і нехай $\alpha_1 < \alpha_{2m} < \alpha_{2m-2} < \dots < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{2m+1}$. Припускаємо, що неперервна функція $f(x)$, яка задає перетворення T , при $x \leq \alpha_1$ дорівнює α_2 , при $x \geq \alpha_{2m+1}$ дорівнює α_1 , а при $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_{2m+1}$ є кусково-лінійною функцією з вершинами в точках $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}), (\alpha_{2m+1}, \alpha_1)$ площини (x, y) .

Неважко перевірити, що

$$T^{2j-1}(\alpha_1, \alpha_{2m}] = (\alpha_{2j}, \alpha_{2m+1}],$$

$$T^{2j-1}(\alpha_{2i+2}, \alpha_{2i}] = \begin{cases} [\alpha_{2(i+j)-1}, \alpha_{2(i+j)+1}), & \text{якщо } 2 \leq i+j \leq m, \\ (\alpha_{2(i+j-m)}, \alpha_{2m+1}], & \text{якщо } m+1 \leq i+j \leq 2m-1, \end{cases}$$

$$T^{2j-1}[\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+3}) = \begin{cases} (\alpha_{2(i+j)+2}, \alpha_{2(i+j)}], & \text{якщо } 2 \leq i+j \leq m-1, \\ (\alpha_1, \alpha_{2m}), & \text{якщо } i+j = m, \\ [\alpha_1, \alpha_{2(i+j-m)+1}), & \text{якщо } m+1 \leq i+j \leq 2m-1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Якщо $T\beta = \beta$, то

$$T^{2j-1}(\alpha_2, \beta) = (\beta, \alpha_{2j+1}), \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$T^{2j-1}(\beta, \alpha_3) = \begin{cases} (\alpha_{2j+2}, \beta), & \text{якщо } 1 \leq j < m, \\ (\alpha_1, \beta), & \text{якщо } j = m. \end{cases}$$

Насамкінець зауважимо, що при будь-якому $x \leq \alpha_1$ $T^{2j-1}x = \alpha_{2j}$, $x \geq \alpha_{2m+1}$, $T^{2j-1}x = \alpha_{2j-1}$, $1 \leq j \leq m$.

Таким чином, $T^{2j-1}x > x$, коли $x < \beta$, $T^{2j-1}x < x$, якщо $x > \beta$, при будь-якому $1 \leq j \leq m$, і, отже, у перетворення T відсутні цикли порядку $3, 5, \dots, 2m-1$.

Теорему 4 можна узагальнити на випадок, коли у перетворення T існує цикл будь-якого порядку, відмінного від степеня двійки.

Теорема 5. *Якщо перетворення T має цикл порядку $k = 2^nl$, де $l > 1$ — непарне число, то перетворення T має цикли порядку 2^nr , де $r > l$ — будь-яке непарне число, і цикли порядку $2^{n+1}s$, де s — будь-яке натуральне число.*

Доведення. Якщо $n = 0$, то отримуємо теорему 4, яку вже доведено. Припустимо, що твердження теореми правильні при $n = m-1$, і покажемо, що вони правильні й при $n = m$.

Нехай перетворення T має нерухому точку α порядку 2^ml . Покажемо, наприклад, що в цьому випадку T має і нерухому точку порядку 2^mr_0 , $r_0 > l$ і непарне. Для перетворення $S = T^2$ точка α є нерухомою точкою порядку $2^{m-1}l$ (лема 2) і, згідно зі зробленим припущенням, перетворення S повинно мати нерухому точку β порядку $2^{m-1}r_0$. Це означає, що $S^{2^{m-1}r_0}\beta = \beta$, $S^j\beta \neq \beta$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2^{m-1}r_0 - 1$, тобто $T^{2^mr_0}\beta = \beta$ та $T^i\beta \neq \beta$ за будь-якого парного i , меншого за 2^mr_0 ; $T\beta \neq \beta$, оскільки в іншому випадку було б $S\beta = \beta$. Отже, або точка β — нерухома точка порядку 2^mr_0 перетворення T , або точка β — нерухома точка непарного порядку, і тоді, за теоремою 3, у перетворення T існують нерухомі точки будь-якого парного порядку, і, отже, знайдеться нерухома точка γ порядку 2^mr_0 .

Абсолютно аналогічно показується, що у T є й нерухомі точки порядку $2^{m+1}s$, де s — будь-яке натуральне число.

Таким чином, твердження теореми 5 правильні при будь-якому n .

Теореми 2, 3, 5 і той факт, що нерухома точка першого порядку завжди існує, якщо є нерухомі точки порядку, вищого за перший, можна об'єднати в одну теорему.

Теорема 6. *Якщо перетворення T має цикл порядку 2^n , $n > 0$, то перетворення T має і цикли порядків 2^i , $i = 0, 1, \dots, n-1$. Якщо перетворення T має цикл порядку $2^n(2m+1)$, $n \geq 0$, $m > 0$, то перетворення має і цикли порядків $2i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $2^n(2r+1)$, $r = m+1, m+2, \dots$, $2^{n+1}s$, $s = 1, 2, 3, \dots$.*

Зауваження. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — точки даного циклу k -го порядку і $a = \min_i \alpha_i$, $b = \max_i \alpha_i$. Твердження теореми 6 стосуються лише точок інтервалу $[a, b]$. Поза $[a, b]$ у перетворення, можливо, немає жодної точки циклу. Так, точки циклів перетворення $\bar{T}: \bar{T}x = Ta$, якщо $x \leq a$, $\bar{T}x = Tx$ при $a \leq x \leq b$, $\bar{T}x = Tb$, якщо $x \geq b$, належать $[a, b]$.

Назвемо діаметром циклу $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ величину $d_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = \max_{1 \leq i, j \leq k} |\alpha_i - \alpha_j|$. Для будь-якого n , наступного за k в (*), знайдеться цикл $\beta_1, \dots, \beta_n$, для якого $d_{\beta_1, \dots, \beta_n} < d_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$. Крім того, як легко бачити, існує стала C , залежна від $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ і така, що для будь-якого $m > 1$, наступного за k в (*), знайдеться цикл $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, для якого $d_{\gamma_1, \dots, \gamma_m} > C$.

Побудуємо приклад, який показує, що теорема 6 повністю розв'язує питання про існування циклів одних порядків залежно від існування циклів інших порядків.

Нехай у площині (x, y) задано точки $A^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}), A^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, A^{(k)}(x^{(k)}, y^{(k)})$, причому $x^{(1)} < x^{(2)} < \dots < x^{(k)}$. Ці точки визначають таку неперервну функцію $f(x)$: при $x \in [x^{(1)}, x^{(k)}]$ $f(x)$ — кусково-лінійна функція з вершинами в точках $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$, при

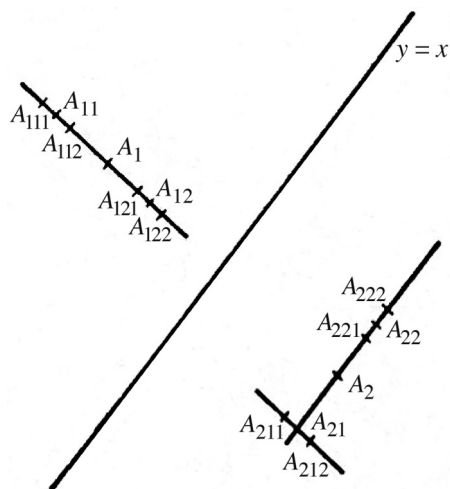


Рис. 9

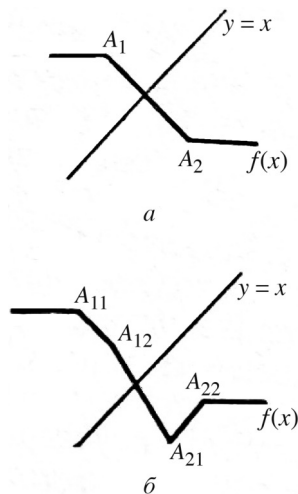


Рис. 10

$x \leq x^{(1)}$ $f(x) = y^{(1)} = \text{const}$, при $x \geq x^{(k)}$ $f(x) = y^{(k)} = \text{const}$. Перетворення, яке задає така функція, позначимо через $T_{A^{(1)}A^{(2)}\dots A^{(k)}}$.

Проведемо побудову, не вдаючись у докладні пояснення.

Візьмемо в площині дві точки A_1 і A_2 , симетричні щодо бісектриси першого і третього координатних кутів. Легко бачити, що перетворення $T_{A_1A_2}$ має лише цикли першого і другого порядків. Проведемо через точку A_1 пряму a_1 , перпендикулярну бісектрисі, а через точку A_2 пряму a_2 , паралельну бісектрисі. Візьмемо на a_1 точки A_{11} і A_{12} , симетричні щодо A_1 , і на a_2 точки A_{21} і A_{22} , симетричні щодо A_2 , причому так, щоб $|x_{11} - x_{12}| = |x_{21} - x_{22}| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}$ (через x_r позначаємо абсцису точки A_r). Можна переконатися, що перетворення $T_{A_{11}A_{12}A_{21}A_{22}}$ має цикли тільки першого, другого і четвертого порядків. Тепер через точки A_{11} , A_{12} , A_{21} потрібно провести прямі a_{11} , a_{12} , a_{21} , перпендикулярні бісектрисі, через точку A_{22} — пряму a_{22} , паралельну бісектрисі (вочевидь, a_{11} , a_{12} збігатимуться з a_1 і a_{22} — з a_2). Потім, як і вище, на цих прямих потрібно взяти точки A_{111} , A_{112} , A_{121} , ..., A_{222} , симетричні щодо A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} і такі, що $|x_{111} - x_{112}| = |x_{121} - x_{122}| = |x_{211} - x_{212}| = |x_{221} - x_{222}| \leq \frac{|x_{11} - x_{12}|}{2}$ і т. д. Слід зауважити, що прямі, паралельні (і перпендикулярні) до бісектриси, можна проводити через будь-які точки і через будь-яку їхню кількість, але обов'язково непарну. Перетворення $T_{\underbrace{A_{11\dots 11}}_{n+1}\underbrace{A_{11\dots 12}}_{n+1}\underbrace{A_{22\dots 22}}_{n+1}}$ має лише цикли по-

рядків 1, 2, $2^2, \dots, 2^{n+1}$. Нехай для визначеності пряма $\underbrace{a_{11\dots 11}}_n$ перпендикулярна бісектрисі.

Замінімо дві точки $\underbrace{A_{111\dots 11}}_{n+1}(x_{11\dots 11}, y_{11\dots 11})$, $\underbrace{A_{111\dots 12}}_{n+1}(x_{11\dots 12}, y_{11\dots 12})$ у площині (x, y) точками $A_{10}(x_{10}, y_{10})$, $A_{20}(x_{20}, y_{20}), \dots, A_{2m+1,0}(x_{2m+1,0}, y_{2m+1,0})$ (див. рис. 10), де

$$x_{10} = \underbrace{x_{11\dots 11}}_{n+1} < x_{2m,0} < x_{2m-2,0} < \dots < x_{20} < x_{30} < \dots < x_{2m+1,0} = \underbrace{x_{11\dots 12}}_{n+1},$$

$$y_{i0} = x_{i+1,0} + \left(\underbrace{y_{11\dots 12}}_{n+1} - \underbrace{x_{11\dots 11}}_{n+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, 2m, \quad y_{2m+1,0} = \underbrace{y_{11\dots 12}}_{n+1}.$$

Неважко збагнути, що перетворення

$$T_{A_{10}A_{20}\dots A_{2m+1,0}\underbrace{A_{11}\dots A_{21}}_{n+1}\underbrace{A_{11}\dots A_{22}}_{n+1}\dots\underbrace{A_{22}\dots A_{22}}_{n+1}}$$

має цикли порядків $1, 2, 2^2, \dots, 2^n, 2^n(2r+1)$, де $r \geq m$, $2^{n+1}s$, де $s > 0$, і не має циклів жодних інших порядків.

Теорема 6 і побудований приклад доводять теорему, сформульовану на початку роботи.

До теорем 1–6 примикає така теорема.

Теорема 7. *Між будь-якими двома точками циклу порядку $k > 1$ лежить хоча б одна точка циклу порядку $l < k$.*

Нехай $\alpha > \beta$ — точки циклу порядку k ; n_α, n_β — кількість точок цього циклу, менших відповідно за точки α і β . Очевидно, $k > n_\alpha > n_\beta \geq 0$. Існує n_α різних цілих додатних чисел s_i , $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$, менших за k і таких, що $T^{s_i}\alpha < \alpha$. Оскільки $n_\alpha > n_\beta$, то знайдеться s_{i_0} , $1 \leq i_0 \leq n_\alpha$, таке, що $T^{s_{i_0}}\alpha < \alpha$, $T^{s_{i_0}}\beta > \beta$. А це означає, що існує точка $\gamma \in (\beta, \alpha)$, для якої $T^{s_{i_0}}\gamma = \gamma$; γ є точкою циклу порядку $l \leq s_{i_0} < k$.

Насамкінець зазначимо ще, що всі результати можна перекласти на мову періодичних розв'язків функціонального рівняння $y(x+1) = f(y(x))$ (x пробігає дискретну послідовність значень). Наприклад, якщо перетворення прямої у себе $y \rightarrow f(y)$ неперервне, то 1) якщо функціональне рівняння має періодичний розв'язок з періодом k , то в нього є й періодичні розв'язки з будь-яким періодом, розташованим у (*) за k , 2) якщо рівняння не має періодичного розв'язку з періодом k , то воно не має періодичних розв'язків із жодним періодом, що передує k у (*).

Автор висловлює подяку Ю. М. Березанському і Ю. О. Митропольському, які ознайомилися з рукописом роботи і дали низку корисних порад.

Література

1. А. Н. Шарковский, Укр. мат. журн., **12**, № 4 (1960).
2. А. Н. Шарковский, ДАН СССР, **139**, № 5 (1961).

Одержано 22.03.1962