УДК 519.21

Б. В. Бондарев, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

Усреднение в гиперболических системах, подверженных слабо зависимым случайным возмущениям

Рассматривается первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения с малым параметром при внешнем воздействии, описываемом некоторым случайным процессом, удовлетворяющим какому-либо из условий слабой зависимости. Производится усреднение коэффициентов по временной переменной. Предполагается существование единственного обобщенного решения как у исходной стохастической задачи, так и у задачи с «усредненным» уравнением, которое оказывается детерминированным. Для вероятности уклонения решения исходного уравнения от решения «усредненной» задачи установлены экспоненциальные оценки типа известных неравенств С. Н. Бернштейна для сумм независимых случайных величин.

Розглядається перша початково-гранична задача для гіперболічного рівняння з малим параметром при правій частині, яка описується деяким випадковим процесом, що задовольняє будь-яку із умов слабкої залежності. Здійснюється осереднення коефіцієнтів за часовою змінною. Припускається існування єдиного узагальненого розв'язку як у початкової стохастичної задачі, так і у задачі з «осередненим» рівнянням, яке виявляється детермінованим. Для ймовірності різниці між розв'язком початкового рівняння та розв'язком «осередненого» наводяться експоненціальні оцінки, подібні до відомих нерівностей С. Н. Бернштейна для сум незалежних випадкових величин.

Рассмотрим на $\Theta_{\frac{T}{\varepsilon}} = \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \times G$ первую начально-краевую задачу для гиперболического уравнения

$$\begin{gathered}\partial^2 U_\varepsilon/\partial t^2 = \varepsilon^2 [\mathcal{L}_{t,x} U_\varepsilon + A(t, x, U_\varepsilon) + \sigma(t, x, U_\varepsilon)\, \eta(t)],\\ U_\varepsilon(t, x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U_\varepsilon(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \\ U_\varepsilon(t, x)\big|_{x \in \partial G} = \Phi(t, x),\end{gathered} \tag{1}$$

где G — некоторое ограниченное открытое множество из R^n, ∂G — ее достаточно гладкая граница, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\eta(t)$ — некоторый центрированный случайный процесс, линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{t,x}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{t,x} V = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты оператора $\mathcal{L}_{t,x}$, коэффициенты $A(t, x, z)$, $\sigma(t, x, z)$, граница ∂G, значение на границе $\Phi(t, x)$, начальные функции $\varphi(x) \in W_2^1(G)$, $\psi(x) \in L_2(G)$ (определения пространств $L_2(G)$, $W_2'(G)$ см., например, в [1]) такие, что [1, 2] существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1).

Наряду с (1) рассмотрим на $\Theta_T = [0, T] \times G$ первую начально-краевую задачу

$$\begin{gathered}\partial^2 U_0/\partial t^2 = \overline{\mathcal{L}}_x U_0 + \overline{A}(x, U_0),\\ U_0(t, x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U_0(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \\ U_0(t, x)\big|_{x \in \partial G} = \Phi(t, x),\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\overline{\mathcal{L}}_x V = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\bar{a}_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Коэффициенты $\bar{a}_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $\bar{b}_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, $\overline{A}(x, z)$ получаются соответственно из $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $b_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, $A(t, x, z)$ путем усреднения по временной переменной, т. е. будем предполагать, что выполнено следующее условие.

1. Существуют равномерно по x, z пределы

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}(t, x)\, dt = \bar{a}_{ij}(x), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T b_i(t, x)\, dt = \bar{b}_i(x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t, x, z)\, dt = \overline{A}(x, z).$$

Относительно случайного процесса $\eta(t)$ предположим следующее.

II. Случайный процесс $\eta(t)$ такой, что

$$\mathbf{M}\eta(t) = 0, \quad \mathbf{M}|\eta(t)|^2 \leqslant C_0 < +\infty,$$

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\varepsilon}\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|\int_0^{t/\varepsilon} \eta(s)\, ds\right| > R\right\} \leqslant C_1 \exp\{-C_2 R^\alpha\} + r_1(\varepsilon),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} (|\eta(s)|^2 - \mathbf{M}|\eta(s)|^2)\,ds\right| > r\right\} \leqslant C_3 \exp\{-C_4 r^{\beta}\} + r_2(\varepsilon),$$

где $C_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $r_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $r_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

III. Неслучайные $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $b_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, такие, что

$$\nu \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) z_i z_j, \quad \nu > 0$$

$\left(\text{не нарушая общности считаем } \nu \leqslant \frac{1}{2}\right)$, для любой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(t, x) \leqslant K < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2(t, x) \leqslant B^2 < +\infty,$$

причем матрица $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}(t, x)$, $i, j = 1, n$, такая, что

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}(t, x) z_i z_j\right| \leqslant d(t) \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

для любой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^n$, где положительная функция $d(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} d(t)\,dt \leqslant D < +\infty.$$

IV. Неслучайные функции $A(t, x, z)$, $\sigma(t, x, z)$ такие, что

$$|A(t, x, z)| \leqslant C(1 + |z|), \quad |\sigma(t, x, z)| \leqslant C(1 + |z|),$$

т. е. удовлетворяют условию не более, чем линейного роста, являются липшицевыми по z

$$|A(t, x, z_1) - A(t, x, z_2)| \leqslant L_A |z_1 - z_2|,$$
$$|\sigma(t, x, z_1) - \sigma(t, x, z_2)| \leqslant L_\sigma |z_1 - z_2|.$$

Пусть

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left[A\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0(s, x)\right) - \overline{A}(x, U_0(s, x))\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t [\mathcal{L}_{\frac{s}{\varepsilon}, x} - \overline{\mathcal{L}}_x] U_0(s, x)\,ds.$$

Здесь и далее $U_0(t, x)$ — решение задачи (2).

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\|f\|_t^2 = \int_G |f(t, x)|^2\,dx, \quad \nabla f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n),$$

$$|||f|||_t^2 = \|f\|_t^2 + \|\nabla f\|_t^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_t^2,$$

$$\mathcal{L}_{t,x}^* V = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial [b_i(t, x) V]}{\partial x_i}$$

— оператор, сопряженный к оператору $\mathscr{L}_{t,x}$,

$$\alpha_\varepsilon(t) = \left\{ \int_G | \mathscr{L}^*_{t/\varepsilon, x} \sigma(t/\varepsilon, x, U_0(t, x)) |^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_\varepsilon(t) = \left\{ \int_G | \mathscr{L}^*_{t/\varepsilon, x} \rho_\varepsilon(t, x) |^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_\varepsilon = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{ \int_G \sigma^2(t/\varepsilon, x, U_0(t, x)) \, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma'_\varepsilon(t) = \left\{ \int_G \left| \frac{\partial}{\partial t} \sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t, x)\right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(s) \, ds, \quad \eta_\varepsilon = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | \eta_\varepsilon(t) |,$$

$$\rho_\varepsilon = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| \rho_\varepsilon \|_t.$$

При выполнении определенных условий естественно ожидать, что для уравнения (1) будет «работать» принцип усреднения, т. е. в метрике $\delta(\varphi, \psi) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} ||| \varphi - \psi |||_t$ решение $U_\varepsilon(t/\varepsilon, x)$ будет «близко» к решению $U_0(t, x)$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены условия* I — IV, *существуют и единственны обобщенные решения как задачи* (1), *так и задачи* (2). *Величины* $\alpha_\varepsilon(t)$, $\beta_\varepsilon(t)$, $\sigma'_\varepsilon(t)$ *такие, что*

$$\int_0^T \alpha_\varepsilon(t) \, dt < +\infty, \quad \int_0^T \beta_\varepsilon(t) \, dt < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} \sigma'_\varepsilon(t) \, dt < +\infty.$$

Тогда если

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \int_G \rho_\varepsilon(s, x) \sigma(s/\varepsilon, x, U_0(s, x)) \, dx \eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds \right| > R \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \exp\{-C_6 R^\gamma\} + r_3(\varepsilon), \quad r_3(\varepsilon) \to 0 \tag{3}$$

при $\varepsilon \to 0$, $C_5 > 0$, $C_6 > 0$, $\gamma > 0$, *то справедлива оценка*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[\int_G | U_\varepsilon(t/\varepsilon, x) - U_0(t, x) |^2 dx + \int_G | \nabla [U_\varepsilon(t/\varepsilon, x) - U_0(t, x)] |^2 dx + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \int_G \left| \frac{\partial}{\partial t} [U_\varepsilon(t/\varepsilon, x) - U_0(t, x)] \right|^2 dx \right] > \varepsilon C(\varepsilon, r, R, D) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \exp\{-C_2 R^\alpha\} + C_3 \exp\{-C_4 r^\beta\} + C_5 \exp\{-C_6 R^\gamma\} + r_1(\varepsilon) + r_2(\varepsilon) + r_3(\varepsilon), \tag{4}$$

где

$$C(\varepsilon, r, R, D) = \left\{ R \left(\left[\frac{3 + \sigma_\varepsilon^2}{2} + \sigma_\varepsilon \int_0^T \sigma'_\varepsilon(t) \, dt \right]^{\frac{1}{2}} + \int_0^T \sigma'_\varepsilon(t) \, dt \right) + \sqrt{R} + \right.$$
$$+ \sqrt{3} \rho_\varepsilon + 0{,}5 \left[\int_0^T \alpha_\varepsilon(t) \, dt + \rho_\varepsilon \left(\sigma_\varepsilon + \int_0^T \sigma'_\varepsilon(t) \, dt \right) \right] + 2 \int_0^T \beta_\varepsilon(t) \, dt +$$

$$+ 2T(L_A + L_\sigma)\rho_\varepsilon[1 + C_0T + \sqrt{\varepsilon}r]\Big\}^2 \exp\left\{\frac{T}{\nu}[L_A + B + T(1 + C_0 + \right.$$

$$\left. + \sigma_\varepsilon^2(L_A + L_\sigma)^2] + \frac{D}{\nu} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}r\right\}. \tag{5}$$

Прежде, чем доказывать теорему, приведем формулировку [3] следующего утверждения, являющегося обобщением известной леммы Гронуолла.

Лемма. *Пусть $V(t) > 0$, $C > 0$, функции $f(t) > 0$, $g(t) > 0$ такие, что*

$$\int_0^T g(t)\,dt < +\infty, \quad \int_0^T f(t)\,dt < +\infty.$$

Тогда если

$$V^2(t) \leqslant C + \int_0^t f(s)V^2(s)\,ds + \int_0^t g(s)V(s)\,ds,$$

то справедлива оценка

$$V^2(t) \leqslant \left(\sqrt{C} + \int_0^T g(s)\,ds\right)^2 \exp\left\{\int_0^T f(s)\,ds\right\}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы. Пусть

$$\zeta_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[U_\varepsilon(t/\varepsilon, x) - U_0(t, x)].$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial t^2} = \mathcal{L}_{t/\varepsilon, x}\zeta_\varepsilon + \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right) - A(t/\varepsilon, x, U_0)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right)\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

$$\zeta_\varepsilon(t, x)\big|_{t=0} \equiv 0, \quad \frac{\partial\zeta_\varepsilon(t, x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \equiv 0,$$

$$\zeta_\varepsilon(t, x)\big|_{x\in\partial G} \equiv 0.$$

Умножим обе части на $\partial\zeta_\varepsilon/\partial t$ и проинтегрируем по x в области G. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2 = 2\int_G \frac{\partial\zeta_\varepsilon(t, x)}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon(t, x)}{\partial t^2}\,dx, \tag{7}$$

$$\int_G \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon(t, x)}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\,d_x = -\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) \times$$

$$\times \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial t\partial x_i}\,dx, \tag{8}$$

$$\int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial x_i\partial s}\,ds dx = \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx -$$

$$-\int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)}{\partial s}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx ds - \int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) \times$$

$$\times \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial x_j\partial s}\,ds dx.$$

Отсюда

$$\int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j\partial s}\,dxds = \frac{1}{2}\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)}{\partial s}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\,dxds. \quad (9)$$

Из (8), (9) с учетом равномерной положительности матрицы старших коэффициентов $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, имеем

$$2\int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\,dxds = -\int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx + \int_0^t\int_G \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right)}{\partial s}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_j}\,dxds \leqslant$$

$$\leqslant -\nu\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_t^2 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\, d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_s^2 ds. \quad (10)$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\int_G\left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right) - A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\,dx\right| \leqslant L_A\left(\|\zeta_\varepsilon\|_t^2 + \left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2\right), \quad (11)$$

$$2\left|\sum_{i=1}^n\int_G b_i\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\,dx\right| \leqslant B\left(\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_t^2 + \left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2\right). \quad (12)$$

И, наконец,

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\int_G\left[\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right) - \sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0\right)\right]\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\,\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant L_\sigma\left(\|\zeta_\varepsilon\|_t^2 + \left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2\right)\left|\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|. \quad (13)$$

В силу (11) — (13) получаем

$$\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2 \leqslant -\nu\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_t^2 + \int_0^t d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_s^2\frac{ds}{\varepsilon} + \int_0^t\left(L_A + B + L_\sigma\left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|\right)\times$$

$$\times\left(\|\varepsilon_\varepsilon\|_s^2 + \left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_s^2\right)ds + 2\int_0^t\int_G \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,dxds + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\,dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds. \quad (14)$$

Далее

$$\int_0^t\int_G \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,dxds = \int_G\left[\rho_\varepsilon(t, x)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}(t, x) - \int_0^t \rho_\varepsilon(s, x)\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}\,ds\right]dx =$$

$$= \int_G \rho_\varepsilon(t, x)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}(t, x)\,dx - \int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s, x)\mathscr{L}_{s/\varepsilon, x}\zeta_\varepsilon dxds - \int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s, x)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}dsdx -$$

$$-\int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s,x)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[A\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_\varepsilon\right)-A\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\right]dxds-$$

$$-\int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s,x)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_\varepsilon\right)-\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\right]\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)dxds-$$

$$-\int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s,x)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds. \tag{15}$$

Из (15) с учетом неравенства (11) при $\delta>0$ получаем

$$2\int_0^t\int_G \frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}dxds\leqslant\delta\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_t^2+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\rho_\varepsilon^2+2\int_0^t\|\zeta_\varepsilon\|_s\beta_\varepsilon(s)\,ds+$$

$$+2(L_A+L_\sigma)\rho_\varepsilon\int_0^t\left(1+\left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|\|\zeta_\varepsilon\|_s ds+2\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G\rho_\varepsilon(s,x)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|. \tag{16}$$

Так как

$$\|\zeta_\varepsilon\|_t^2\leqslant T\int_0^t\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_s^2 ds,$$

то из (14) — (16) имеем

$$\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2+\nu\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_t^2+\|\zeta_\varepsilon\|_s^2\leqslant\int_0^t d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\|\nabla\zeta_\varepsilon\|_s^2\frac{ds}{\varepsilon}+\int_0^t\left(L_A+B+\right.$$

$$\left.+L_\sigma\left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|\right)\left(\|\zeta_\varepsilon\|_s^2+\left\|\frac{\partial\xi_\varepsilon}{\partial s}\right\|^2\right)ds+\delta\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_t^2+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\rho_\varepsilon^2+$$

$$+2\int_0^t\beta_\varepsilon(s)\|\zeta_\varepsilon\|_s ds+2(L_A+L_\sigma)\rho_\varepsilon\int_0^t\left(1+\left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|\right)\|\zeta_\varepsilon\|_s ds+$$

$$+T\int_0^t\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_s^2 ds+2\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G\rho_\varepsilon(s,x)\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|+$$

$$+\left|\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|. \tag{17}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в соотношении (17):

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}dx\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds=\int_G\eta_\varepsilon(t)\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon},x,U_0\right)dx-$$

$$-\int_G\int_0^t\frac{\partial\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)}{\partial s}\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\eta_\varepsilon(s)\,ds-\int_0^t\int_G\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}\eta_\varepsilon(s)\,ds.$$

Из последнего следует

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|\leqslant\eta_\varepsilon\sigma_\varepsilon+\eta_\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_s\sigma_\varepsilon'(s)\,ds+$$

$$+\left|\int_0^t\int_G\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0\right)\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}dxd\eta_\varepsilon(s)\,ds\right|. \tag{18}$$

Далее, так как

$$\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}\,dx\eta_\varepsilon(s)\,ds = \int_0^t\int_G \mathscr{L}^*_{s/\varepsilon,x}\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)dx\eta_\varepsilon(s)\,ds +$$

$$+\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,dx\eta_\varepsilon(s)\,ds + \int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[A\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right)-\right.$$

$$\left.-A\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\right]dx\eta_\varepsilon(s)\,ds \int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\left(\sigma\,\frac{s}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right)-\right.$$

$$\left.-\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\right]dx\eta_\varepsilon(s)\,ds + \int_0^t\int_G \sigma^2\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)dx\eta_\varepsilon(s)\,d\eta_\varepsilon(s), \qquad (19)$$

Из соотношения (19) имеем

$$\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\,\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}\,\eta_\varepsilon(s)\,ds\right| \leqslant \eta_\varepsilon\int_0^T \alpha_\varepsilon(s)\,ds + L_A\sigma_\varepsilon\eta_\varepsilon\int_0^t \|\zeta_\varepsilon\|_s\,ds +$$

$$+ L_\sigma\sigma_\varepsilon\eta_\varepsilon\int_0^t \|\zeta_\varepsilon\|_s ds + \int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,dx\eta_\varepsilon(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_G \sigma^2\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{d\eta_\varepsilon^2(s)}{ds}\,ds. \qquad (20)$$

Отсюда с учетом того, что

$$\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,\eta_\varepsilon(s)\,ds = \int_G\left[\eta_\varepsilon(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(t, x)-\right.$$

$$-\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\,\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\,\eta_\varepsilon(s)\,ds - \int_0^t \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right]dx,$$

а значит,

$$\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial s}\,\eta_\varepsilon(s)\,ds\right| \leqslant \eta_\varepsilon\sigma_\varepsilon\rho_\varepsilon + \eta_\varepsilon\rho_\varepsilon\int_0^t \sigma'_\varepsilon(s)\,ds +$$

$$+\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\,dx\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|, \qquad (21)$$

а также в силу того, что

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_G \sigma^2\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{d\eta_\varepsilon^2(s)}{ds}\,ds = \frac{1}{2}\int_G \sigma^2\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0\right)\eta_\varepsilon^2(t)\,dx -$$

$$-\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)}{\partial s}\,dx\eta_\varepsilon^2(s)\,ds,$$

следует оценка

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^t\int_G \sigma^2\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{d\eta_\varepsilon^2(s)}{ds}\,ds\right| \leqslant \frac{1}{2}\,\eta_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2 + \eta_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(s)\,ds. \qquad (22)$$

Из (20) с учетом (21), (22) получаем

$$\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial^2\zeta_\varepsilon}{\partial s^2}\eta_\varepsilon(s)\,ds\right| \leqslant \eta_\varepsilon\left[\int_0^T \alpha_\varepsilon(s)\,ds + \sigma_\varepsilon(L_A + L_\sigma)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t \|\zeta_\varepsilon\|_s ds + \sigma_\varepsilon\rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(s)\,ds\right] + \eta_\varepsilon^2\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} + \sigma_\varepsilon\int_0^t \sigma'_\varepsilon(t)\,dt\right] +$$

$$+\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\,dx\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (18), имеем

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\,dx\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right| \leqslant \eta_\varepsilon\left[\int_0^T \alpha_\varepsilon(s)\,ds + \sigma_\varepsilon(L_A + L_\sigma)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t \|\zeta_\varepsilon\|_s ds + \sigma_\varepsilon(1 + \rho_\varepsilon) + \rho_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(t)\,dt + \int_0^t \left\|\frac{\partial\zeta_\varepsilon}{\partial s}\right\|_s \sigma'_\varepsilon(s)\,ds\right] +$$

$$+\eta_\varepsilon^2\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} + \sigma_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(t)\,dt\right] + \left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\,dx\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|. \qquad (24)$$

Подставляя оценку (24) в соотношение (17), находим

$$\min(\nu, 1 - \delta)\,|||\zeta_\varepsilon|||_t^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\rho_\varepsilon^2 + \eta_\varepsilon\left[\int_0^T \alpha_\varepsilon(t)\,dt + \sigma_\varepsilon\rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(t)\,dt\right] +$$

$$+\eta_\varepsilon^2\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} + \sigma_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(t)\,dt + \frac{1}{2}\right] + \int_0^t\left[2\beta_\varepsilon(s) + 2(L_A + L_\sigma)\rho_\varepsilon\left(1 + \left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|\right) +\right.$$

$$\left.+\eta_\varepsilon\sigma'_\varepsilon(s)\right]|||\zeta_\varepsilon|||_s\,ds + \int_0^t\left[L_A + B + L_\sigma\left|\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right| + T + \sigma_\varepsilon^2(L_A + L_\sigma)^2 T +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\,d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]|||\zeta_\varepsilon|||_s^2 ds + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t\int_G \sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)\rho_\varepsilon(s, x)\,dx\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right|.$$

Отсюда в силу леммы при $\delta = \frac{1}{2}$ получаем

$$|||\zeta_\varepsilon|||_t^2 \leqslant \left\{\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\eta_\varepsilon\left[\left(\int_0^T \alpha_\varepsilon(t)\,dt + \sigma_\varepsilon\rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon\int_0^T \sigma'_\varepsilon(t)\,dt\right)^2 +\right.\right.$$

$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_G \rho_\varepsilon(s, x)\,\sigma\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, U_0\right)dx\,\eta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right| + \frac{1}{\nu}\left[2\int_0^T \beta_\varepsilon(t)\,dt +\right.$$

$$\left.\left.\left.+2T(L_A + L_\sigma)\rho_\varepsilon\left(1 + TC_0 + \sqrt{\varepsilon}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)|^2 - \mathbf{M}|\eta(s)|^2)\,ds\right|\right)\right]\right]\right\}^2\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{T}{\nu}\left[L_A + B + T(1 + C_0 + \sigma_\varepsilon^2(L_A + L_\sigma)^2\right] + \frac{1}{\nu}\int_0^T d\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)d\,\frac{s}{\varepsilon} +\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}}(|\eta(s)|^2 - \mathbf{M}|\eta(s)|^2)\,ds\right|\right\}.$$

Из последнего соотношения с учетом условия (3) следует неравенство (4). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы (см. (10)) следует, что если вместо условия

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} a_{ij}(t, x) z_i z_j \right| \leqslant d(t) \sum_{i=1}^{n} z_i^2, \quad d(t) > 0,$$

$$\int_{0}^{+\infty} d(t)\, dt \leqslant D < +\infty$$

использовать

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} a_{ij}(t, x) z_i z_j \leqslant 0$$

для любой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^n$, то неравенство (4) также выполняется с постоянной $C(\varepsilon, r, R, 0)$.

В заключение отметим, что оценки, фигурирующие в условиях II, (3) справедливы [3—7] для достаточно широкого класса стационарных процессов $\eta(t)$, $M\eta(t) = 0$, удовлетворяющих какому-либо из условий слабой зависимости [8] — условию равномерно сильного перемешивания, абсолютной регулярности и даже условию сильного перемешивания с экспоненциально быстрым убыванием зависимости.

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
2. *Гихман И. И.* О первой начально-краевой задаче для стохастического гиперболического уравнения // Теория случайн. процессов.— 1980.— Вып. 8.— С. 20—31.
3. *Бондарев Б. В.* Усреднение в параболических системах, подверженных слабо зависимым воздействиям. L_2-подход // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 3.— С. 315—322.
4. *Бондарев Б. В.* Об усреднении стохастических систем при слабо зависимых возмущениях // Там же.— 1990.— 42, № 5.— С. 593—600.
5. *Бондарев Б. В.* Об усреднении в стохастических системах с зависимостью от всего прошлого // Там же.— № 4.— С. 443—451.
6. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1981. — Вып. 25. — С. 154—164.
7. *Дмитровский В. А.* Оценки распределения максимума гауссовского поля // Случайные процессы и поля.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.— С. 22—31.
8. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.— 324 с.

Получено 09.08.90