УДК 517.9

Ю. В. Роговченко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Непрерывная зависимость от параметра решений импульсных эволюционных систем

Для нелинейной импульсной эволюционной системы доказана теорема о непрерывной зависимости решений от параметра, которая может быть применена для обоснования принципа усреднения.

Для нелінійної імпульсної еволюційної системи доведено теорему про неперервну залежність розв'язків від параметра, яка може бути застосована для обгрунтування принципу усереднення.

Известно, что принцип усреднения [1, 2] является следствием одной специальной теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра [3—5]. В настоящей работе для нелинейной импульсной эволюционной системы (ИЭС) [6] доказывается аналог указанной теоремы, позволяющий обосновать принцип усреднения [1, 2] для таких систем.

Рассмотрим ИЭС

$$dx/dt + Ax = f(t, x, \lambda), \quad \Delta x|_{t_i(x,\lambda)} = g_i(x, \lambda), \tag{1}$$

где $t > 0$, $x \in U = \{x : |x|_{X^\alpha} \leqslant \rho\}$ — открытое множество в X^α, $0 \leqslant \alpha < 1$, Λ — метрическое пространство параметров, содержащее предельную точку λ_0, A — секториальный оператор в X [7], $\operatorname{Re}\sigma(A) > \gamma > 0$, функции $f : [0, T] \times U \times \Lambda \to X$, $g_i : U \times \Lambda \to X^\alpha$, $t_i : U \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $i \in \Gamma \subset \mathbb{Z}$, определены и непрерывны по совокупности переменных в соответствующих областях. Будем также предполагать, что ИЭС (1) является одноударной [6], т. е. интегральные кривые произвольного решения ИЭС (1) пересекаются с гиперповерхностями $t_i(x, \lambda)$ не более одного раза. Для определенности будем считать, что при $t \in [0, T]$ ИЭС (1) подвергается импульсному воздействию $p = p(T, \lambda)$ раз, причем при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda$ $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} p(T, \lambda) = q_1 < +\infty$ и при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \lambda^{-1} p(T, \lambda) = q_2 < +\infty$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1а) $|f(s, x, \lambda)|_X \leqslant N$ при $s \in [0, T]$, $x \in U$, $\lambda \in \Lambda$;

1б) $|g_i(x, \lambda)|_{X^\alpha} \leqslant M$ при $x \in U$, $\lambda \in \Lambda$, $i \in \Gamma$;

2а) $|f(t, x, \lambda) - f(s, y, \lambda)|_X \leqslant L(|x - y|_{X^\alpha} + |t - s|^\nu)$ при $t, s \in [0, T]$, $x, y \in U$, $\lambda \in \Lambda$, $\nu \in (0, 1]$;

2б) $|g_i(x, \lambda) - g_i(y, \lambda)|_{X^\alpha} \leqslant K|x - y|_{X^\alpha}$ при $x, y \in U$, $\lambda \in \Lambda$.

Следовательно, при фиксированном λ выполнены условия, обеспечивающие существование единственного ограниченного решения ИЭС (1) (см. [6]).

Пусть помимо условий 1 и 2 выполняются также следующие предположения:

3) для всех $x \in U$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t f(s, x, \lambda)\, ds = \int_0^t f(s, x, \lambda_0)\, ds$$

равномерно на компактных подмножествах интервала $[0, T]$;

4) для всех $x \bar{\in} U$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{0 < t_i(x, \lambda) < t} g_i(x, \lambda) = \sum_{0 < t_i(x, \lambda_0) < t} g_i(x, \lambda_0)$$

равномерно на компактных подмножествах интервала $[0, T]$, не содержащих точек, в которых решение $x = \varphi(t, \lambda)$ ИЭС (1) претерпевает разрывы, $g_0(x, \lambda_0)$ — кусочно-непрерывная функция.

Теорема. *Пусть выполнены предположения* 1 — 4. *Пусть, далее, $x(t, \lambda)$ — решение ИЭС* (1), *причем $x(t, \lambda_0)$ существует при $t \in [0, T]$ и $|x(0, \lambda) - x(0, \lambda_0)|_{X^\alpha} \to 0$ при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$. Тогда $|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)|_{X^\alpha} \to 0$. при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$.*

Доказательство. Задачу нахождения решений ИЭС (1) можно так же, как и в [6], свести к эквивалентной задаче нахождения решений интегро-суммарного уравнения (ср. с [8]):

$$x(t, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}, \lambda) = e^{-At} x(0, \lambda) +$$

$$+ \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}, \lambda), \lambda) ds + \sum_{0 < t_i(y^{(i)}, \lambda) < t} e^{-A(t - t_i(y^{(i)}, \lambda))} g_i(y^{(i)}, \lambda), \tag{2}$$

где фиксированные элементы $y^{(i)} \in U$, $i = \overline{1, p}$, подбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$y^{(i)} + g_i(y^{(i)}, \lambda) = x(t(y^{(i)}, \lambda), y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}, \lambda), \quad i = \overline{1, p}.$$

Предположим теперь, что

$$t_1(y^{(1)}, \lambda) = t_1^0(\lambda), t_2(y^{(2)}, \lambda) = t_2^0(\lambda), \ldots, t_p(y^{(p)}, \lambda) = t_p^0(\lambda),$$

причем

$$0 \equiv t_0^0(\lambda) < t_1^0(\lambda) < t_2^0(\lambda) < \ldots < t_p^0(\lambda) < T \equiv t_{p+1}^0(\lambda).$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$x(t, \lambda) = e^{-At} x(0, \lambda) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, \lambda), \lambda) ds +$$

$$+ \sum_{0 < t_i^0(\lambda) < t} e^{-A(t - t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda). \tag{3}$$

Покажем, что решение интегро-суммарного уравнения (3) $x(t, \lambda)$ непрерывно зависит от параметра λ. Для этого нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* 1б, 2б, 4. *Тогда для произвольной кусочно-непрерывной функции x: $[0, T] \to U$*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{0 < t_i(x, \lambda) < t} e^{-A(t - t_i(x, \lambda))} g_i(x(t_i(x, \lambda), \lambda), \lambda) =$$

$$= \sum_{0 < t_i(x, \lambda_0) < t} e^{-A(t - t_i(x, \lambda_0))} g_i(x(t_i(x, \lambda_0), \lambda_0), \lambda_0)$$

равномерно на компактных подмножествах интервала $[0, T]$, не содержащих точек разрыва решения $x = \varphi(t, \lambda)$ ИЭС (1).

Доказательство. Пусть $x(s) \equiv x = \mathrm{const}$, возьмем $\eta > 0$ и рассмотрим функцию

$$S_\eta(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant \eta, \\ \sum\limits_{0 < t_i(x, \lambda) < t - \eta} e^{-A(t - t_i(x, \lambda))} g_i(x, \lambda), & \eta \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

При этом

$$|S_\eta(\lambda, t) - S_0(\lambda, t)|_{X^\alpha} = \Big|\sum_{0<t_i(x,\lambda)<t-\eta} e^{-A(t-t_i(x,\lambda))} g_i(x, \lambda) -$$

$$- \sum_{0<t_i(x,\lambda)<t} e^{-A(t-t_i(x,\lambda))} g_i(x, \lambda)|_{X^\alpha} = \Big|\sum_{t-\eta<t_i(x,\lambda)<t} e^{-A(t-t_i(x,\lambda))} g_i(x, \lambda)\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant CM \sum_{t-\eta<t_i(x,\lambda)<t} e^{-\gamma(t-t_i(x,\lambda))} \leqslant CMp(T, \lambda)\eta \to 0$$

при $\eta \to +0$. Следовательно, функция

$$S_0(\lambda, t) = \sum_{0<t_i(x,\lambda)<t} e^{-\gamma(t-t_i(x,\lambda))} g_i(x, \lambda)$$

непрерывна по λ для каждого $x \in U$, а в силу этого функция

$$S(\lambda, t) = \sum_{0<t_i(\hat{x},\lambda)<t} e^{-A(t-t_i(\hat{x},\lambda))} g_i(x, \lambda)$$

непрерывна для любой ступенчатой функции $\hat{x}(s)$, $\hat{x}: [0, T] \to U$. Поскольку для произвольной кусочно-непрерывной функции $x: [0, T] \to U$ существует последовательность ступенчатых функций $x_n: [0, T] \to U$ таких, что $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant T} |x(s) - x_n(s)|_{X^\alpha} \to 0$ равномерно на $[0, T]$, то утверждение леммы верно для любой кусочно-непрерывной функции.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения 1—4 и пусть $x(t, \lambda)$ — семейство зависящих от параметра λ кусочно-непрерывных функций переменной t, $x(t, \lambda) \in U$ и*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)|_{X^\alpha} = 0.$$

Тогда

$$1) \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, \lambda), \lambda)\, ds = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, \lambda_0), \lambda_0)\, ds$$

равномерно на компактных подмножествах интервала $[0, T]$;

$$2) \lim_{\lambda\to\lambda_0} \sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda) =$$

$$= \sum_{0<t_i^0(\lambda_0)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda_0))} g_i(x(t_i^0(\lambda_0), \lambda_0), \lambda_0)$$

равномерно на компактных подмножествах интервала $[0, T]$, *не содержащих* $t_i^0(\lambda)$ и $t_i^0(\lambda_0)$, $i = \overline{1, p}$.

Доказательство. Поскольку

$$\Big|\int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, \lambda), \lambda)\, ds - \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s, \lambda_0), \lambda_0)\, ds\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int_0^t e^{-A(t-s)} [f(s, x(s, \lambda)\lambda) - f(s, x(s, \lambda), \lambda_0)]\, ds\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\int_0^t e^{-A(t-s)} [f(s, x(s, \lambda), \lambda_0) - f(s, x(s, \lambda_0), \lambda_0)]\, ds\Big|_{X^\alpha},$$

то первое слагаемое в правой части равномерно стремится к нулю при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$ в силу леммы 3.4.7 из [7]. Второе слагаемое в силу условия 2а и леммы 1.4.3 из [7] оценивается так:

$$\Big|\int_0^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-A(t-s)} [f(s, x(s,\lambda), \lambda_0) - f(s, x(s,\lambda_0), \lambda_0)]\, ds\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L\, |x(s,\lambda) - x(s,\lambda_0)|_{X^\alpha} ds \leqslant$$

$$\leqslant C_\alpha T^{1-\alpha} L (1-\alpha)^{-1} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |x(s,\lambda) - x(s,\lambda_0)|_{X^\alpha} \to 0$$

при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$ равномерно по t.

Оценим теперь

$$\Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda) - \sum_{0<t_i^0(\lambda_0)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda_0))} g_i(x(t_i^0(\lambda_0), \lambda_0)\lambda_0)\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} [g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda) - g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda_0), \lambda)]\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda_0), \lambda) -$$

$$- \sum_{0<t_i^0(\lambda_0)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda_0))} g_i(x(t_i^0(\lambda_0), \lambda_0), \lambda_0)\Big|_{X^\alpha}.$$

Второе слагаемое равномерно стремится к нулю при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$ в силу леммы 1, а первое слагаемое в силу условия 2б и леммы 1.3.4 из [7] оценивается следующим образом:

$$\Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} [g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda) - g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda_0), \lambda)]\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} |e^{-A(t-t_i^0(\lambda))}|_X K\, |x(t_i^0(\lambda), \lambda) - x(t_i^0(\lambda), \lambda_0)|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} KCe^{-\gamma(t-t_i^0(\lambda))} |x(t_i^0(\lambda), \lambda) - x(t_i^0(\lambda), \lambda_0)|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant KCp(T,\lambda)\, T \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |x(s,\lambda) - x(s,\lambda_0)|_{X^\alpha} \to 0$$

при $|\lambda - \lambda_0|_\Lambda \to 0$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $x(t,\lambda)$ — семейство зависящих от параметра λ решений уравнения* (3), *определенных на отрезке* $[0, T]$ *и* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} x(0,\lambda) = x(0,\lambda_0)$. *Тогда $x(t, \lambda)$ — семейство равностепенно-непрерывных на каждом интервале $(t_1, t_2) \subset (t_i^0(\lambda), t_{i+1}^0(\lambda))$ и равномерно ограниченных на всем отрезке* $[0, T]$ *функций.*

Доказательство. Пусть λ — фиксированный элемент метрического пространства Λ. Возьмем произвольные $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_i^0(\lambda) < t_1 < t_2 < t_{i+1}^0(\lambda)$, $i = \overline{1, p}$, и оценим разность

$$|x(t_2,\lambda) - x(t_1,\lambda)|_{X^\alpha} \leqslant |(e^{-At_2} - e^{-At_1})\, x(0,\lambda)|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\int_0^{t_1} (e^{-A(t_2-s)} - e^{-A(t_1-s)}) f(s, x(s, \lambda), \lambda)\, ds\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\int_{t_1}^{t_2} e^{-A(t_2-s)} f(s, x(s,\lambda), \lambda)\, ds\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t_1} (e^{-A(t_2-t_i^0(\lambda))} - e^{-A(t_1-t_i^0(\lambda))})\, g_i(x(t_i^0(\lambda), \lambda), \lambda)\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+\Big|\sum_{t_1<t_i^0(\lambda)<t_2} e^{-A(t_2-t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda),\lambda),\lambda)\Big|_{X^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant C^2 t_1^{-1}(t_2-t_1)\,|x(0,\lambda)|_{X^\alpha}+C_{2\alpha}C_{1-\alpha}N(t_2-t_1)^\alpha(\alpha\,|1-2\alpha|)^{-1}\times$$

$$\times t^{1-2\alpha}+C^2M(1-e^{-\gamma t_1})^{-1}(t_2-t_1)+CMp(T,\lambda)(t_2-t_1). \qquad \textbf{(4)}$$

Из (4) следует, что при $t_2-t_1\to 0$ $|x(t_2,\lambda)-x(t_1,\lambda)|_{X^\alpha}\to 0$, т. е. семейство функций $x(t,\lambda)$ является равностепенно-непрерывным на любом интервале $(t_1,t_2)\subset(t_i^0(\lambda),t_{i+1}^0(\lambda))$.

Рассмотрим теперь для некоторого фиксированного $\lambda\in\Lambda$

$$|x(t,\lambda)|_{X^\alpha}\leqslant|e^{-At}x(0,\lambda)|_{X^\alpha}+\Big|\int_0^t e^{-A(t-s)}f(s,x(s,\lambda),\lambda)\,ds\Big|_{X^\alpha}+$$

$$+\Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))} g_i(x(t_i^0(\lambda),\lambda),\lambda)\Big|_{X^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant Ce^{-\gamma t}|x(0,\lambda)|_{X^\alpha}+\int_0^t C_\alpha(t-s)^{-\alpha}e^{-\gamma(t-s)}N\,ds+$$

$$+\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} Ce^{-\gamma(t-t_i^0(\lambda))}M\leqslant K_1=C|x(0,\lambda)|_{X^\alpha}+$$

$$+C_\alpha N(1-\alpha)^{-1}T^{1-\alpha}+CMp(T,\lambda)T.$$

Следовательно, семейство функций $x(t,\lambda)$ является равномерно ограниченным. Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $x(t,\lambda)$ — произвольное семейство зависящих от параметра λ решений интегро-суммарного уравнения (3), определенных на интервале $[0,T]$ и таких, что $|x(0,\lambda)-x(0,\lambda_0)|_{X^\alpha}\to\to 0$ при $|\lambda-\lambda_0|_\Lambda\to 0$. Согласно лемме 3 $x(t,\lambda)$ представляет собой семейство равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций на $[0,t_1^0(\lambda)]$. В силу теоремы Арцела из него можно выделить равномерно сходящуюся на $[0,t_1^0(\lambda)]$ последовательность, для которой сохраним прежнее обозначение $x(t,\lambda)$. Рассмотрим выделенную последовательность на интервале $(t_1^0(\lambda),t_2^0(\lambda)]$. На этом интервале она является равномерно ограниченной и равностепенно-непрерывной, следовательно, из нее можно выделить равномерно сходящуюся на $[0,t_2^0(\lambda)]$ последовательность. Повторяя аналогичные рассуждения на интервалах $(t_2^0(\lambda),t_3^0(\lambda)],\ \ldots,\ (t_p^0(\lambda),T]$, приходим к выводу, что из семейства функций $x(t,\lambda)$ можно выделить последовательность, которая будет равномерно сходиться на отрезке $[0\ T]$, и пусть $x(t,\lambda)$ и есть эта последовательность. Тогда будем иметь (нами обозначено $z(t)=x(t,\lambda)-x(t,\lambda_0)$):

$$|z(t)|_{X^\alpha}\leqslant|e^{-At}z(0)|_{X^\alpha}+\Big|\int_0^t e^{-A(t-s)}[f(s,x(s,\lambda)\lambda)-f(s,x(s,\lambda),\lambda_0)]\,ds\Big|_{X^\alpha}+$$

$$+\Big|\int_0^t e^{-A(t-s)}[f(s,x(s,\lambda_0)+z(s),\lambda_0)-f(s,x(s,\lambda_0),\lambda_0)]\,ds\Big|_{X^\alpha}+$$

$$+\Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))}[g_i(x(t_i^0(\lambda),\lambda),\lambda)-g_i(x(t_i^0(\lambda),\lambda),\lambda_0)]\Big|_{X^\alpha}+$$

$$+\Big|\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} e^{-A(t-t_i^0(\lambda))}[g_i(x(t_i^0(\lambda)+z(t_i^0),\lambda),\lambda_0)-g_i(x(t_i^0(\lambda),\lambda_0),\lambda_0)]\Big|_{X^\alpha}.$$

Из последнего неравенства в силу того, что функция $x(s,\lambda_0)$ кусочно-непрерывна на $[0,T]$, на основании леммы 2 получаем

$$|x(t,\lambda)-x(t,\lambda_0)|_{X^\alpha}\leqslant Ce^{-\gamma t}|x(0,\lambda)-x(0,\lambda_0)|_{X^\alpha}+\delta_1(\lambda-\lambda_0)+$$

$$+\int_0^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L\,|x(s,\lambda)-x(s,\lambda_0)|_{X^\alpha} ds +$$

$$+\delta_2(\lambda-\lambda_0)+\sum_{0<t_i^0(\lambda)<t} Ce^{-\gamma(t-t_i^0(\lambda))} K\,|x(t_i^0(\lambda),\lambda)-x(t_i^0(\lambda),\lambda_0)|_{X^\alpha}, \quad (5)$$

где $\delta_i(u)$, $i=1,2,$— непрерывные функции такие, что $\delta_i(u)\to 0$ при $u\to\to 0$. Используя лемму 2.2 из [6], получаем из (5) следующую оценку:

$$0\leqslant |x(t,\lambda)-x(t,\lambda_0)|_{X^\alpha}\leqslant R\,[C\,|x(0,\lambda)-x(0,\lambda_0)|_{X^\alpha}e^{-\gamma t}+$$

$$+\delta_1(\lambda-\lambda_0)+\delta_2(\lambda-\lambda_0)]\,[1+C_\alpha LRT(1-\alpha)^{-1}+CKR]^{p(T,\lambda)}, \quad (6)$$

где $R=R(\alpha, C_\alpha L, t_{i+1}^0-t_i^0)$ — постоянная из леммы 2.2 [6]. Из (6) видно, что для λ, достаточно близких к λ_0, решение $x(t,\lambda)$ существует и если $|\lambda-\lambda_0|_\Lambda\to 0$, то $|x(0,\lambda)-x(0,\lambda_0)|_{X^\alpha}\to 0$ (по условию) и $\delta_i(\lambda-\lambda_0)\to 0$, $i=1,2$ (в силу определения функций $\delta_i(u)$), а следовательно, $|x(t,\lambda)-x(t,\lambda_0)|_{X^\alpha}\to 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная нами теорема о непрерывной зависимости решений ИЭС (1) от параметра может быть использована по аналогии с [3—5] для обоснования метода усреднения [1, 2] для ИЭС (1). Один из возможных подходов к решению этого вопроса предложен в работе [5] и изложение подобного подхода применительно к ИЭС (1) станет предметом обсуждения в нашей следующей работе. В заключение заметим, что обоснование принципа усреднения для ИЭС (1) дано в работе [9].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1974.— 440 с.
3. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук.— 1955.— **10**, № 3.— С. 147—152.
4. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Czech. Math. J.— 1957.— **7**, № 4.— P. 568—583.
5. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн.— 1962.— **14**, № 3.— С. 289—298.
6. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость. — Киев, 1986.— 44 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.65).
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
9. *Митропольский Ю. А., Роговченко Ю. В.* Усреднение импульсных эволюционных систем // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 1.— С. 90—97.

Получено 15.11.90