УДК 517.54

А. Л. Гольберг, ассист. (Крым. ин-т природоохран. и курорт. стр-ва, Симферополь)

О некоторых классах плоских топологических отображений с первыми обобщенными производными

Рассмотрен класс плоских топологических отображений с первыми обобщенными производными. Предложен геометрический метод исследования свойств данного класса, основанный на использовании регулярных систем окрестностей.

Розглянуто клас плоских топологічних відображень з першими узагальненими похідними. Запропоновано геометричний метод дослідження властивостей даного класу, який грунтується на використанні регулярних систем околів.

В данной статье продолжается изучение свойств некоторых классов плоских топологических отображений, начатое в работах [1—3]. Предложен геометрический метод исследования таких отображений, основанный на использовании регулярных систем окрестностей [4, 5].

Рассмотрим гомеоморфное отображение $f: G \to G^*$ ограниченных областей евклидова пространства $\mathbb{R}^2$.

Если отображение $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ имеет в точке $x = (x_1, x_2)$ частные производные $\partial f_i(x)/\partial x_j$, $i, j = 1, 2$, то в этой точке определены выражения: линейное отображение $f'(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, являющееся формальной производной отображения f, якобиан $|J(x, f)|$ отображения f, максимальное $L(x, f) = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$ и минимальное $l(x, f) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$ растяжения отображения f.

Для отображения f, имеющего почти всюду в G частные производные $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = 1, 2$, и любого вещественного $\alpha \geqslant 1$ определим следующую характеристику:

$$M_\alpha(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l^\alpha(x, f)} = \frac{L(x, f)}{l^{\alpha-1}(x, f)}.$$

Пусть, далее, β — фиксированное вещественное число ($\beta > 1$), $p = \beta/(\beta - 1)$.

Определение 1. *Гомеоморфное отображение $f: G \to G^*$ называется отображением класса $B_{\alpha,\beta}(G)$ $(1 \leqslant \alpha < \beta < \infty)$, если f — ACL_p и*

$$\int\limits_G M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x, f)\, dx < \infty.$$

Пусть x_0 — произвольная точка в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что для всякого $t \in (0, 1]$ определена некоторая замкнутая окрестность $G_t(x_0)$ точки x_0. Будем говорить, что множество окрестностей $\{G_t(x_0): t \in (0, 1]\}$ образует нормальную систему, если существует непрерывная функция $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $v(x_0) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq x_0$, $G_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x) \leqslant t\}$ и множество $\Gamma_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x) = t\}$ является границей $G_t(x_0)$ для любого $t \in (0, 1]$. Полагаем

$$r(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|, \quad R(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|.$$

Величина

$$\lim_{t \to 0} \frac{R(x_0, t)}{r(x_0, t)} = \Delta(x_0)$$

называется параметром регулярности семейства $\{G_t(x_0)\}$. Система окрестностей $\{G_t(x_0) : 0 < t \leqslant 1\}$ называется регулярной, если $\Delta(x_0) < \infty$.

Следуя [6], под субаддитивной функцией множества понимаем конечную неотрицательную функцию Φ, заданную на открытых подмножествах E из некоторой области G так, чтобы для каждого открытого множества $E \subset G$ и для любого конечного набора $\{E_k\}_{k=1}^m$ непересекающихся открытых множеств $E_k \subset E$, $k = 1, \ldots, m$, выполнялось неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi(E_k) \leqslant \Phi(E).$$

Рассмотрим гомеоморфное отображение $f : G \to \mathrm{R}^2$, E — произвольное открытое множество, $E \subset G$, $\{G_t(x_0),\ 0 < t \leqslant 1\}$ — нормальная регулярная система окрестностей произвольной точки $x_0 \in E$ такая, что для любого $t \in (0, 1]$ $G_t(x_0) \subset E$.

Пусть

$$R^*(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|, \quad r^*(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|.$$

О п р е д е л е н и е 2. *Гомеоморфное отображение $f : G \to G^*$ называется отображением класса $H_{\alpha,\beta}(G)$, если для некоторых фиксированных α, β $(1 \leqslant \alpha < \beta < \infty)$ существует ограниченная субаддитивная функция Φ такая, что для любого открытого множества $E \subset G$ и для почти всех (п. в.) $x \in E$ выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{[R^*(x,t)]^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} [R(x,t)]^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta-\alpha}}}{[r^*(x,t)]^{\frac{(\alpha-1)\beta}{\beta-\alpha}} [r(x,t)]^{\frac{2\beta-\alpha}{\beta-\alpha}}} \leqslant \Phi'(x),$$

где $\Phi'(x)$ — производная функция Φ в точке x. (Относительно дифференцируемости субаддитивной функции см. [6].)

Т е о р е м а. *Классы $B_{\alpha,\beta}(G)$ и $H_{\alpha,\beta}(G)$ совпадают.*

Пусть $f \in B_{\alpha,\beta}(G)$. Поскольку $\int\limits_G M_\alpha^{\overline{(\beta-\alpha)}}{}^{\beta}(x, f)\, dx$ конечен, то по теореме Лебега характеристика $M_\alpha(x, f)$ конечна в п. в. точках множества G, поэтому достаточно показать, что

$$\frac{[R^*(x,t)]^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{[r^*(x,t)]^{\frac{(\alpha-1)\beta}{\beta-\alpha}}} \frac{[R(x,t)]^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta-\alpha}}}{[r(x,t)]^{\frac{2\beta-\alpha}{\beta-\alpha}}} \leqslant \left[\frac{L(x,f)}{l^{\alpha-1}(x,f)}\right]^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}},$$

поскольку из принадлежности отображения f классу $B_{\alpha,\beta}(G)$ следует дифференцируемость f в п. в. точках множества G. (Подробно доказательство см. в [7]).

Установим теперь, что всякое отображение $f : G \to G^*$ класса $H_{\alpha,\beta}(G)$ принадлежит классу $B_{\alpha,\beta}(G)$. Доказательство этого факта распадается на ряд этапов и восходит к идее классической работы Д. Е. Меньшова [4] (см. также [5]).

Л е м м а 1. *Пусть $f : G \to G^*$ — отображение класса $H_{\alpha,\beta}(G)$. Тогда f — ACL-отображение.*

Для $\tilde{x}, x \in G$, $\tilde{x} \pm x$, положим

$$k(x) = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|\tilde{x} - x|}.$$

Л е м м а 2. *Пусть $f : G \to G^*$ — отображение класса $H_{\alpha,\beta}(G)$, $p = \beta/(\beta - 1)$. Тогда для п. в. $x \in G$ $k(x) < \infty$ и для всякого борелевского множества $A \subset G$ $k(x)$ принадлежит классу $L_p(A)$.*

Из лемм 1 и 2 следует, что отображение f дифференцируемо почти всюду в области G и $f \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(G)$.

Лемма 3. *Пусть $f; G \to G^*$ — отображение класса $H_{\alpha,\beta}(G)$. Тогда*

$$\int\limits_G M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x, f)\,dx \leqslant \Phi(G).$$

Доказательство лемм 1—3 приведено в [7].

1. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб.— 1986.— **130**, № 2.— С. 185—206.
2. *Кудьявин В. С.* О геометрии плоских топологичесих отображений с первыми обобщенными производными // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.— Киев, Ин-т математики АН Украины, 1990.— С. 73—78.
3. *Гольберг А. Л.* Экстремальные отображения плоских колец и *p*-модули // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.— Киев, Ин-т математики АН Украины, 1990.— С. 25—29.
4. *Меньшов Д.* Sur une generalisation d'un theorem de M. H. Bohr // Мат. сб.— 1937.— 2 (44).— С. 339—356.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Новосибирск : Наука, 1982.— 285 с.
6. *Rado T., Reichelderfer P.* Continuous transformations in analysis.— Berlin : Springer-Verlag, 1955.— 442 p.
7. *Гольберг А. Л.* Геометрические свойства плоских топологических отображений с интегральными характеристиками.— Симферополь: КИПКС, 1991.— 19с.— Деп. в УкрНИИНТИ, 1218 Ук-91).

Получено 29.05.91