УДК 517.512

А. П. Махмудов, д-р физ.-мат. наук (Бакин. ун-т),
Ле Дык Кием, канд. физ-мат. наук (Краснодар. каучук. з-д)

О приближении полиномами типа С. Н. Бернштейна решений задачи Гурса для нелинейного уравнения гиперболического типа

Используя многочлены типа С. Н. Бернштейна для функции двух переменных, предложена схема последовательных приближений и обоснована ее равномерная сходимость к единственному решению задачи Гурса для нелинейного гиперболического уравнения.

Використовуючи многочлени типу С. Н. Бернштейна для функції двох змінних, запропонована схема послідовних наближень та обгрунтована її рівномірна збіжність до єдиного розв'язку задачі Гурса для нелінійного гіперболічного рівняння.

Методы приближенного решения дифференциальных уравнений, основанные на использовании различных типов линейных операторов С. Н. Бернштейна, представляют собой одну из разновидностей аппроксимационного метода, предложенного В. К. Дзядыком (см. [1] и цитированную там литературу).

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Задача Гурса для этого уравнения формулируется следующим образом. Требуется найти в квадрате $\Pi_h = [0, h] \times [0, h]$ такое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ уравнения (1), которое на отрезках характеристик этого уравнения $y = 0$ и $x = 0$, содержащихся в квадрате Π_h, удовлетворяет условиям $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, y) = \psi(y)$, где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — заданные функции, принимающие в точке пересечения характеристик равные значения $\varphi(0) = \psi(0)$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0. \tag{2}$$

В работе [1] аппроксимационно-итеративным методом В. К. Дзядык доказал, что при определенных предположениях задача (1), (2) имеет единственное решение.

В данной работе устанавливаются соотношения разности между соседними членами последовательности полиномов типа С. Н. Бернштейна для функций двух переменных. Подобные соотношения, как и вытекающие из них оценки через разделенные разности функции двух переменных, позволяют доказать равномерную сходимость построенного (с помощью полиномов типа С. Н. Бернштейна) итерационного процесса к единственному решению задачи (1), (2). Далее, устанавливается оценка погрешности между точным и приближенным решением этой задачи.

Построенный итерационный процесс интересен тем, что последовательные приближения вычисляются интегрированием полиномов.

2. Понятия разделенных разностей. Многочлены типа С. Н. Бернштейна для функций двух переменных и их некоторые свойства. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную в квадрате $\Pi_0 = [0, 1] \times [0, 1]$. Пусть даны $(m+1)\cdot(n+1)$ значений функции $f(x, y)$ в заданных точках, лежащих в квадрате Π_0. Эти точки будем обозначать через (x_i, y_j) $(i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n})$, где $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_m \leqslant 1$, $0 \leqslant y_0 < y_1 < \ldots < y_n \leqslant 1$, а соответствующие значения через $f(x_i, y_j)$.

Разделенные разности для функции $f(x, y)$ по каждой из двух переменных $[x_0, x_1, \ldots, x_m; f(\xi, y)]$, $[y_0, y_1, \ldots, y_n; f(x, \eta)]$ определяются как разделенные разности для функции одной переменной [2].

Разделенные разности $(m+n)$-го порядка для функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_i), $(i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n})$ определяются сначала как разделенные разности m-го порядка по переменной x, в то время как переменная y остается постоянной. Затем на базе этих разделенных разностей определяются разделенные разности $(m+n)$-го порядка для функций $f(x, y)$ как разделенные разности n-го порядка по переменной y.

Разделенные разности $(m+n)$-го порядка для функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) $(i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n})$ будем обозначать символом

$$\begin{bmatrix} x_0, & x_1, \ldots, x_m \\ y_0, & y_1, \ldots, y_n \end{bmatrix}; f(\xi, \eta)\Bigg].$$

Нетрудно показать, что разделенные разности функции двух переменных обладают следующими свойствами:

а) разделенные разности любого порядка не меняются при любой перестановке аргументов $x_0, x_1, \ldots, x_m; y_0, y_1, \ldots, y_n$;

б) разделенные разности любого порядка являются линейным оператором от функции $f(x, y)$.

Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет все непрерывные частные производные до $(m+n+2)$-го порядка включительно в квадрате Π_0. Возьмем любую точку $(x, y) \in \Pi_0$, не совпадающую ни с одной из точек (x_i, y_j) $(i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n})$. При этом предположении справедлива следующая формула [3]:

$$\left[\begin{matrix} x, & x_0, & x_1, \ldots, x_m \\ y, & y_0, & y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \frac{\partial^{m+n+2} f(\xi, \eta)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}}, \tag{3}$$

$$x' < \xi < x'', \quad y' < \eta < y'',$$

$$x' = \min(x, x_0, x_1, \ldots, x_m), \quad x'' = \max(x, x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

$$y' = \min(y, y_0, y_1, \ldots, y_n), \quad y'' = \max(y, y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена в квадрате Π_0. Полином

$$B_{m,n}[x, y; f] = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_m^i C_n^j x^i (1-x)^{m-i} y^j (1-y)^{n-j} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)$$

называется полиномом типа С. Н. Бернштейна $(m+n)$-го порядка для функции $f(x, y)$.

Многочлены такого типа изучены в работах Станку [4, 5] и в работах других авторов.

Приведем некоторые свойства полиномов типа С. Н. Бернштейна.

Пусть функция $f(x, y)$ ограничена числом M в квадрате Π_0. Тогда, очевидно, полином $B_{m,n}[x, y; f]$ также ограничен этим числом. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадрате Π_0, то последовательность полиномов $\{B_{m,n}[x, y; f(x, y)]\}$ в нем равномерно сходится к этой функции.

Положим $e_{ij}(x, y)=x^i y^j$ $(0 \leqslant i+j \leqslant 2)$. Тогда справедливы соотношения [5]

$$B_{m,n}[x, y; e_{ij}]=x^i y^j \,(i, j=0, 1), \; B_{m,n}[x, y; e_{20}]=x^2+\frac{x(1-x)}{m},$$

$$B_{m,n}[x, y; e_{02}]=y^2+\frac{y(1-y)}{n}.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадрате Π_0, то справедливо следующее равенство:

$$f(x, y)-B_{m,n}[x, y; f]=-\frac{x(1-x)}{m}[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(\xi, y)]-$$

$$-\frac{y(1-y)}{n}[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f(x, \eta)]-\frac{x(1-x)\,y(1-y)}{m\cdot n}\begin{bmatrix}\xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3 \\ \eta_1, \; \eta_2, \; \eta_3\end{bmatrix} ; \; f(\xi, \eta)\Bigg],$$

где ξ_i, η_j $(i, j=1, 2, 3)$ — значения из интервала (0, 1), а $\left[\begin{matrix}\xi_1, \; \xi_2, \dots, \xi_i \\ \eta_1, \; \eta_2, \dots, \eta_j\end{matrix}\right.;$ $\left. f(\xi, \eta)\right]$ — разделенные разности $(i+j-2)$-го порядка от функции $f(x, y)$.

Далее, пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные четвертого порядка включительно. Тогда для любой точки $(x, y) \in \Pi_0$ существует точка $(\xi, \eta) \in \Pi_0$ такая, что

$$f(x, y)-B_{m,n}[x, y; f]=-\frac{x(1-x)}{2m} f''_{x^2}(\xi, y)-\frac{y(1-y)}{2n} f''_{y^2}(x, \eta)-$$

$$-\frac{x(1-x)\,y(1-y)}{4mn} f^{(4)}_{x^2y^2}(\xi, \eta).$$

Для последовательности $\{B_{m,n}[x, y; f]\}$ верна следующая лемма.

Л е м м а. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в квадрате Π_0 имеет непрерывные частные производные второго порядка по переменным x и y. Тогда справедлива следующая оценка*

$$|B_{m+1,n+1}[x, y; f]-B_{m,n}[x, y; f]| \leqslant \frac{N}{2}\left\{\frac{x(1-x)}{m(m+1)}+\frac{y(1-y)}{n(n+1)}\right\}, \tag{4}$$

где $N=\max\limits_{\Pi_0}\{|f''_{x^2}|, |f''_{y^2}|\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$|B_{m+1,n+1}[x, y; f]-B_{m,n}[x, y; f]| \leqslant |B_{m+1,n+1}[x, y; f]-B_{m,n+1}[x, y; f]|+$$

$$+|B_{m,n+1}[x, y; f]-B_{m,n}[x, y; f]|. \tag{5}$$

Рассмотрим разность

$$B_{m,n+1}[x, y; f]-B_{m,n}[x, y; f]=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+1} C_m^i C_{n+1}^j x^i (1-x)^{m-i}\times$$

$$\times y^j (1-y)^{n-j+1} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n+1}\right)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} C_m^i C_n^j x^i (1-x)^{m-i} y^j (1-y)^{n-j}\times$$

$$\times f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i x^i (1-x)^{m-i} \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j y^j (1-y)^{n-j+1} \times \right.$$

$$\left. \times f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n+1}\right) - \sum_{j=0}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \right\}. \qquad (6)$$

В силу известной теоремы 1 из работы Поповичу [6] имеем

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j y^j (1-y)^{n-j+1} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n+1}\right) - \sum_{j=0}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) =$$

$$= -\frac{y(1-y)}{n(n+1)} \left[\eta_1, \eta_2, \eta_3;\ f\left(\frac{i}{m}, \eta\right)\right], \qquad (7)$$

где $\left[\eta_1, \eta_2, \eta_3;\ f\left(\frac{i}{m}, \eta\right)\right]$ — разделенная разность второго порядка для функции $f(x, y)$ по переменной y, а $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in (0, 1)$.

Учитывая установленную Поповичу [6] формулу о среднем значении разделенных разностей для функции одной переменной, получаем

$$\left[\eta_1, \eta_2, \eta_3;\ f\left(\frac{i}{m}, \eta\right)\right] = \frac{1}{2} f''_{y^2}\left(\frac{i}{m}, y^*\right), \qquad (8)$$

где

$$y^* \in (y_1, y_2),\ y_1 = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3),\ y_2 = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

Из (6) — (8) следует оценка

$$|B_{m,n+1}[x, y;\ f] - B_{m,n}[x, y;\ f]| \leqslant \frac{N}{2} \frac{y(1-y)}{n(n+1)}.$$

Аналогичным образом получим оценку для разностей

$$B_{m+1,n+1}[x, y;\ f] - B_{m,n+1}[x, y;\ f].$$

Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = [0, h] \times [0, k]$, то полином типа С. Н. Бернштейна для функции $f(x, y)$ будет иметь вид

$$B_{m,n}[x, y;\ f] = \frac{1}{h^m k^n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_m^i C_n^j x^i (h-x)^{m-i} y^j (k-y)^{n-j} f\left(\frac{ih}{m}, \frac{jk}{n}\right).$$

Далее, пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в прямоугольнике Π и они также ограничены этим же числом N. Тогда неравенство (4) примет вид

$$|B_{m+1,n+1}[x, y;\ f] - B_{m,n}[x, y;\ f]| \leqslant \frac{N}{2} \left\{ \frac{x(h-x)}{m(m+1)} + \frac{y(k-y)}{n(n+1)} \right\}. \qquad (9)$$

В случае, когда функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в квадрате $\Pi_h = [0, h] \times [0, h]$, неравенство (4) запишется в виде

$$|B_{m+1,n+1}[x, y;\ f] - B_{m,n}[x, y;\ f]| \leqslant \frac{N}{2} \left\{ \frac{x(h-x)}{m(m+1)} + \frac{y(h-y)}{n(n+1)} \right\}. \qquad (5^*)$$

3. Приближение полиномами типа С. Н. Бернштейна решений задачи Гурса для нелинейного уравнения (1). Предположим, что функция $f(x, y, u, p, q)$ определена и непрерывна в параллелепипеде

$$D = [0, h] \times [0, h] \times [-T, T] \times [-s_1, s_1] \times [-s_2, s_2],$$

где T, s_1, s_2 — некоторые положительные числа, и имеет в нем непрерывные частные производные второго порядка по переменным x, y.

Введем обозначения $p(x, y) = u_x(x, y)$, $q(x, y) = u_y(x, y)$.

Нетрудно видеть, что задачу (1), (2) можно свести к эквивалентной системе уравнений

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s, u(t, s), p(t, s), q(t, s))\, dtds,$$
$$p(x, y) = \int_0^y f(x, s, u(x, s), p(x, s), q(x, s))\, ds, \tag{10}$$
$$q(x, y) = \int_0^x f(t, y, u(t, y), p(t, y), q(t, y))\, dt.$$

Отправляясь от системы (10) и любых допустимых начальных функций $u_0(x, y)$, $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$, построим последовательные приближения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u_{m+1}(x, y) &= \int_0^x \int_0^y B_{m+1}[t, s;\ f_m]\, dtds, \\ p_{m+1}(x, y) &= \int_0^y B_{m+1}[x, s;\ f_m]\, ds, \\ q_{m+1}(x, y) &= \int_0^x B_{m+1}[t, y;\ f_m]\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $u_m(x, y) = u_{m,m}(x, y)$, $p_m(x, y) = p_{m,m}(x, y)$, $q_m(x, y) = q_{m,m}(x, y)$; $B_m[t, s;\ f_m] = B_{m,m}[t, s;\ f_m]$, $f_m = f_{m,m}$, $f_{m,m}(t, s) = f(t, s, u_{m,m}(t, s), p_{m,m}(t, s), q_{m,m}(t, s))$. Не умаляя общности, будем считать, что $u_0(x, y) = p_0(x, y) = q_0(x, y) = 0$.

Предположим, что функция $f(x, y, u, p, q)$ ограничена в параллелепипеде D числом M.

Нетрудно доказать, что при этих предположениях задача (1), (2) имеет единственное классическое решение и это решение можно найти методом последовательных приближений Пикара.

Обозначим через $s = \min(s_1, s_2)$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть*: 1) *число* $h > 0$ *удовлетворяет неравенствам* $Mh^2 \leqslant T$, $Mh \leqslant s$; 2) *функция* $f(x, y, u, p, q)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменным* u, p, q *с константой* K; 3) *функция* $f(x, y, u, p, q)$ *имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков по переменным* x *и* y; 4) *выполняется неравенство*

$$\rho = Kh(h + 2) < 1. \tag{12}$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение* $u(x, y)$ *в классе функций* $H = \{u(x, y): |u| \leqslant T, |p| \leqslant s_1, |q| \leqslant s_2\}$ *и это решение можно найти как предел последовательных приближений* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Методом математической индукции нетрудно показать, что $u_m(x, y) \in H$, $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, последовательности $\{u_m(x, y)\}$, $\{p_m(x, y)\}$, $\{q_m(x, y)\}$ равномерно ограничены в квадрате Π_h.

Введем обозначения

$$d_m(x, y) = |u_m(x, y) - u_{m-1}(x, y)| + |p_m(x, y) - p_{m-1}(x, y)| +$$
$$+ |q_m(x, y) - q_{m-1}(x, y)|, \quad D_m = \max_{\Pi_h} d_m(x, y) \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m. \tag{13}$$

Используя неравенство (5*), условие Липшица, можно доказать сходимость ряда (13). Следовательно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} d_m(x, y)$ сходится в Π_h равномерно. Отсюда вытекает равномерная сходимость последовательностей

$$\{u_m(x, y)\},\ \{p_m(x, y)\},\ \{q_m(x, y)\}.$$

Пусть

$$\lim_{m\to\infty} u_m(x, y) = u(x, y),\ \lim_{m\to\infty} p_m(x, y) = p(x, y),\ \lim_{m\to\infty} q_m(x, y) = q(x, y). \tag{14}$$

Эти предельные функции являются непрерывными функциями переменных x и y. В силу равномерной сходимости, переходя к пределу под знаком интегралов в уравнениях (11), получаем, что предельные функции (14) также удовлетворяют уравнениям системы (11).

Далее, имеем $u_x(x, y) = p(x, y)$, $u_y(x, y) = q(x, y)$, $u_{xy}(x, y) = f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$.

Кроме того, функция $u(x, y)$ удовлетворяет начальным условиям на характеристиках $u(x, 0) = u(0, y) = 0$.

Таким образом, доказано, что функция $u(x, y)$ является искомым решением задачи (1), (2). Единственность решения непосредственно вытекает из условия Липшица.

4. Оценка погрешности приближений. Пусть $u(x, y)$ и $u_m(x, y)$ — соответственно точное и приближенное решение задачи (1), (2). Имеем оценки

$$\begin{gathered}
|u_m(x, y) - u(x, y)| \leqslant \int_0^x \int_0^y B_m[t, s;\ |f_{m-1} - f|]\,dt\,ds, \\
|p_m(x, y) - p(x, y)| \leqslant \int_0^y B_m[x, s;\ |f_{m-1} - f|]\,ds, \\
|q_m(x, y) - q(x, y)| \leqslant \int_0^x B_m[t, y;\ |f_{m-1} - f|]\,dt.
\end{gathered} \tag{15}$$

Введем обозначения

$$l_m(x, y) = |u_m(x, y) - u(x, y)| + |p_m(x, y) - p(x, y)| + \\ + |q_m(x, y) - q(x, y)|,$$

$$L_m = \max_{\Pi_h} l_m(x, y).$$

Учитывая условие Липшица и суммируя неравенства (15), получаем оценку

$$l_m(x, y) \leqslant K \Big\{ \int_0^x \int_0^y B_m[t, s;\ l_{m-1}]\,dt\,ds + \int_0^y B_m[x, s;\ l_{m-1}]\,ds + \\ + \int_0^x B_m[t, y;\ l_{m-1}]\,dt \Big\}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$L_m \leqslant Kh(h+2)\,L_{m-1} = \rho L_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant \rho^m L_0 = \varepsilon_m. \tag{16}$$

Из (16) получаем оценку

$$|u_m(x, y) - u(x, y)| \leqslant \varepsilon_m.$$

Из условия (12) следует, что ε_m стремится к нулю при $m \to \infty$.

Пример. Точным решением задачи Гурса

$$u_{xy} = u_y - u_x + u - 1, \; u(x, 0) = u(0, y) = 0$$

является функция

$$u(x, y) = e^{x-y} - e^x - e^{-y} + 1 = -xy + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}xy^3 +$$

$$+ \frac{1}{4}x^2y^2 - \frac{1}{6}x^3y + \ldots .$$

Отправляясь от начальной функции $u_0(x, y) \equiv 0$ и используя результаты п. 3, приближенные решения $u_1 = u_{1,1}$, $u_2 = u_{2,2}$, $u_3 = u_{3,3}$ этой задачи в квадрате $\Pi_{1/2} = [0, 1/2] \times [0, 1/2]$ построим следующим образом.

Вычислив

$$f_0(x, y) \equiv f_{0,0}(x, y) = -1; \; B_1[x, y; f_0] \equiv B_{1,1}[x, y; f_0] = -1,$$

получим приближенное решение $u_1(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y B_1[t, s; f_0]\,dtds = -xy$.

Далее имеем

$$f_1(x, y) \equiv f_{1,1}(x, y) = -x + y - xy - 1,$$

$$B_2[x, y; f_1] \equiv B_{2,2}[x, y; f_1] = -x + y - xy - 1.$$

Приближенное решение $u_2(x, y)$ имеет вид

$$u_2(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y B_2[t, s; f_1]\,dtds = -xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y^2.$$

Вычислив

$$f_2(x, y) \equiv f_{2,2}(x, y) = -1 - x + y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy - x^2y +$$

$$+ xy^2 - \frac{1}{4}x^2y^2,$$

$$B_3[x, y; f_2] \equiv B_{3,3}[x, y; f_2] = -1 - \frac{13}{12}x + \frac{11}{12}y - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} +$$

$$+ \frac{143}{144}xy + \frac{23}{36}xy^2 - \frac{25}{36}x^2y - \frac{1}{9}x^2y^2,$$

получаем приближенное решение

$$u_3(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y B_3[t, s; f_2]\,dtds = -xy + \frac{13}{24}x^2y + \frac{11}{24}xy^2 - \frac{1}{9}x^3y -$$

$$- \frac{1}{9}xy^3 + \frac{143}{576}x^2y^2 + \frac{23}{216}x^2y^3 - \frac{35}{216}x^3y^2 - \frac{1}{81}x^3y^3.$$

В заключение отметим, что аналогичные вопросы в случае задачи Коши для уравнения (1) исследованы в работе [7].

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1988.— 300 с.
2. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей.— М. : Наука, 1967.— 375 с.
3. *Stancu D. D.* Evalution of the remainder term in approximation formula by Bernstein polynomicals // Math. Comput.— 1963.— **17**.— P. 270—278.
4. *Stancu D. D.* Approximation of functions by new class of linear polinomial operators // Rev. roum. demat. pures ct. appl.— 1968.— **13**, N 8.— P. 345—358.

5. *Stancu D. D.* Bwariate approximation by som Bernstein type operators // Proc. of the coll. on approx. and optim. (October, 25—27): Cluj — Napoca.— 1984.— P. 25—27.
6. *Popoviciu T.* Folytonos függvenyek közepertek teteleiröl // Magy. tud. akad. Mat. éstud. fiz. Oszt. közl.— Budapest.— 1954.— **6**, N 4.— P. 353—356.
7. *Ле Дык Кием.* О приближении полиномами решений задачи Коши для гиперболического уравнения // Inst. of Math., inst. of computer Sci. and cybernetic (Preprint series).— Hanoi.— 1981.— **8**.— P. 1—16.

Получено 09.10.91