УДК 517.9

А. М. Плічко, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Автоматична неперервність, базиси і радикали в метризовних алгебрах

Доказывается автоматическая непрерывность линейного мультипликативного оператора $T : X \to Y$, где X, Y — действительные полные метризуемые алгебры, причем Y полупростая. Показано, что комплексная алгебра Фреше с безусловным ортогональным базисом (x_i) (ортогональным в том смысле, что $x_i x_j = 0$ при $i \neq j$) является коммутативной симметричной алгеброй с инволюцией. Отсюда выводится известный результат о том, что каждый мультипликативный линейный функционал на такой алгебре непрерывен. Вводится понятие ортогонального базиса Маркушевича в топологической алгебре и с его помощью показывается, что для любого замкнутого подпространства Y сепарабельного банахова пространства X на X можно ввести коммутативное умножение, радикалом которого будет Y. Доказывается одна теорема об автоматической непрерывности положительных функционалов.

Доводиться автоматична неперервність лінійного мультиплікативного оператора $T : X \to Y$, де X, Y — дійсні повні метризовні алгебри, причому Y півпроста. Показано, що комплексна алгебра Фреше з безумовним ортогональним базисом (x_i) (ортогональним у тому розумінні, що $x_i x_j = 0$ при $i \neq j$) є комутативною симетричною алгеброю з інволюцією. Звідси виводиться відомий результат про те, що кожен мультиплікативний лінійний функціонал на такій алгебрі неперервний. Вводиться поняття ортогонального базису Маркушевича в топологічній алгебрі і з його допомогою показується, що для будь-якого замкненого підпростору Y сепарабельного банахового простору X на X можна ввести комутативне множення, радикалом якого буде Y. Доводиться одна теорема про автоматичну неперервність додатніх функціоналів.

Питання про автоматичну неперервність лінійних мультиплікативних операторів і лінійних мультиплікативних функціоналів на алгебрах з інволюцією має багату історію і бере свій початок від досі не розв'язаної проблеми С. Мазура про неперервність лінійного мультиплікативного функціоналу на повній метризовній комплексній алгебрі [1, с. 90]. У роботі [1] міститься багато матеріалу на цю тему. Означення і позначення, використані в даній статті, взяті із роботи [1].

Теорема 1. *Нехай X, Y — дійсні повні метризовні алгебри, причому Y півпроста. Тоді кожен лінійний мультиплікативний оператор $T : X \to Y$ неперервний.*

Доведення. Скористаємось теоремою про замкнений графік. Нехай $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Якщо $Tx \neq y$, то згідно з півпростотою існує лінійний мультиплікативний функціонал g на Y такий, що $g(Tx) \neq g(y)$. Оскільки алгебра R дійсних чисел задовільняє умову:

(С) для будь-якої послідовності $y_n \in R$, $|y_n| > a > 0$ існує послідовність f_n дійсних мультиплікативних лінійних функціоналів з $\inf_{mn} |f_m \times \times (y_n)| = \varepsilon > 0$, то за теоремою 3.5 з [1] функціонали $g(y)$ і $gT(x)$ неперервні на Y та X відповідно. Таким чином, $gT(x_n) \to g(Tx)$ і $g(Tx_n) \to \to g(y)$. Протиріччя.

З а у в а ж е н н я. Теорема 1 узагальнює теорему 3.5 з [1] і теорему 1 з [2], причому все доведення стає менш громіздким, оскільки теорему 3.5 з [1] досить довести для випадку мультиплікативних функціоналів. Як і в теоремі 3 із роботи [3], у теоремі 1 замість півпростоти досить вимагати, щоб TX перетинався з радикалом алгебри Y по нулю.

Нагадаємо декілька означень. Базис $(x_i)_1^\infty$ алгебри Фреше називається ортогональним, якщо $x_i x_j = 0$ при $i \neq j$. Кажуть, що елемент x комутативної алгебри X квазірегулярний, якщо існує такий елемент $y \in X$, для якого $xy + x + y = 0$. Комутативна алгебра з інволюцією X називається симетричною, якщо для всякого $x \in X$ елемент xx^* квазірегулярний.

Т е о р е м а 2. *Будь-яка комплексна алгебра Фреше з безумовним ортогональним базисом (x_i) є комутативною симетричною алгеброю з інволюцією.*

Д о в е д е н н я. Комутативність алгебри з ортогональним базисом відзначена в [1, с. 63]. Введемо інволюцію на X так: якщо $x = \sum_1^\infty a_i x_i$, то покладемо $x^* = \sum_1^\infty \bar{a}_i x_i$. З безумовності базиса випливає збіжність останнього ряду [1, с. 61]. Звідси ж випливає неперервність операції інволюції. Лишилось перевірити, що кожен елемент $xx^* \in X$ квазірегулярний, тобто встановити існування такого елемента $y \in X$, що $yxx^* + xx^* + y = 0$. Нехай $x = \sum_1^\infty a_i x_i$. Елемент y шукатимемо у вигляді $y = \sum_1^\infty b_i x_i^2$. Запишемо

$$\sum_1^\infty b_i |a_i|^2 x_i^4 + \sum_1^\infty |a_i|^2 x_i^2 + \sum_1^\infty b_i x_i^2 = 0.$$

Якщо $x_i^2 = 0$, то $x_i^4 = 0$ і можна покласти $b_i = 0$. Якщо $x_i^2 \neq 0$, а $x_i^4 = 0$, то покладемо $b_i = -|a_i|^2$. Якщо ж $x_i^4 \neq 0$ (тоді й $x_i^2 \neq 0$), то із зображення $x_i^3 = \sum_1^\infty c_k x_k$ маємо $x_i^4 = c_i x_i^2$. Тому можна вважати $x_i^4 = x_i^2$; інакше ми б зробили заміну $x_i' = x_i / \sqrt{c_i}$. Таким чином, для цього i маємо рівняння

$$b_i |a_i|^2 x_i^2 + |a_i|^2 x_i^2 + b_i x_i^2 = 0,$$

звідки $b_i = -|a_i|^2/(1 + |a_i|^2)$.

Оскільки у всіх трьох випадках $\sqrt{|b_i|} \leqslant |a_i|$, то ряд $\sum_1^\infty \sqrt{|b_i|}\, x_i$ збігається. Тому збігається ряд $\sum_1^\infty |b_i| x_i = \left(\sum_i^\infty \sqrt{|b_i|}\, x_i\right)\left(\sum_1^\infty \sqrt{|b_i|}\, x_i\right)$, а отже і ряд $\sum_1^\infty b_i x_i^2$.

Н а с л і д о к. *Кожен лінійний мультиплікативний функціонал на комплексній алгебрі Фреше з безумовним ортогональним базисом неперервний.*

Д о в е д е н н я є простою комбінацією теореми 2 і теореми Майкла [1, с. 37].

З а у в а ж е н н я. Пряме доведення цього наслідку, подане в [1, с. 66], досить довге.

О з н а ч е н н я. *Систему* x_i, f_i, $i = \overline{1, \infty}$, $x_i \in X$, $f_i \in X^*$ (X — *топологічна алгебра*, X^* — *спряжений простір*), *називатимемо ортогональним базисом Маркушевича* (*скорочено ортогональним* M-*базисом*), *якщо замкнена лінійна оболонка* $[x_i]_1^\infty = X$, $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — *символ Кронекера*), $\forall x \in X$, $x \neq 0$ $\exists i : f_i(x) \neq 0$ *і* $x_i x_j = 0$ *при* $i \neq j$.

Прикладом ортогонального M-базиса, який не є ортогональним базисом, буде тригонометрична система у алгебрі $L_1(0, 2\pi)$. Багато результатів Т. Хусейна і його співавторів про ортогональні базиси можна перенести на ортогональні M-базиси. Ми цього робити не будемо, а застосуємо ортогональні M-базиси до питання про доповнювальність радикалів у банаховій алгебрі. Питання про те, коли радикал має доповненням замкнену або незамкнену підалгебру, досліджувалось досить детально (див. [4] і бібліографію в ній). Покажемо, що існує багато радикалів у банахових алгебрах, які не мають доповненням замкненого підпростору.

Т е о р е м а 3. *Нехай* Y — *замкнений підпростір сепарабельного банахового простору* X. *Тоді на* X *можна ввести неперервне комутативне множення так, що відносно нього* Y *стане радикалом.*

Д о в е д е н н я. Як відомо [5], для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така послідовність $\hat{x}_n$, f_n, $n = \overline{1, \infty}$, $\hat{x}_n \in X/Y$, $f_n \in Y^\perp = \{f \in X^* : \forall y \in Y \ f(y) = 0\}$, що $[\hat{x}_n]_1^\infty = X/Y$; $f_n(\hat{x}_m) = \delta_{nm}$; $\forall \hat{x} \in X/Y$ $\exists n : f_n(\hat{x}) \neq 0$; $\|\hat{x}_n\| = 1$, $\|f_n\| < 1 + \varepsilon$. Візьмемо довільні представники $x_n \in \hat{x}_n$ з $\|x_n\| < 1 + \varepsilon$. Для будь-яких y, $y' \in Y$ і будь-якого скінченного набору чисел $(a_n, b_n)_1^N$ покладемо

$$\left(\sum_1^N a_n x_n + y\right)\left(\sum_1^N b_n x_n + y'\right) = \sum_1^N \frac{1}{2^n (1+\varepsilon)^3} a_n b_n x_n. \tag{1}$$

Норма правої частини не перевищує $\max\limits_n |a_n b_n|/(1+\varepsilon)^2$, а при будь-якому $1 \leqslant m \leqslant N$ $\left\|\sum\limits_1^N a_n x_n + y\right\| \|f_m\| \geqslant \left|f_m\left(\sum\limits_1^N a_n x_n + y\right)\right| = |a_m|$, тому $\left\|\sum\limits_1^N a_n x_n + y\right\| \geqslant \max\limits_n |a_n|/(1+\varepsilon)$. Аналогічна нерівність виконується для $\sum\limits_1^N b_n x_n + y'$. Тому на лінійній оболонці $\operatorname{lin}(Y, (x_n)_1^\infty)$, щільній у просторі X, виконується нерівність $\|uv\| \leqslant \|u\| \|v\|$. Очевидно, операція (1) є комутативним множенням, тому її можна неперервно продовжити на увесь простір X. Звичайно, Y належить радикалу одержаної алгебри. Якщо $x \notin Y$, то при деякому n $f_n(x) \neq 0$, отже мультиплікативний функціонал $(2^n(1+\varepsilon)^3)^{-1/2} f_n$ не дорівнює нулю на x, тому x не належить радикалу.

З а у в а ж е н н я. Численні приклади недоповнювальних підпросторів наведені в [6]. Згідно з теоремою 3 вони є радикалами деяких комутативних банахових алгебр. Теорему 3 неважко перенести на сепарабельні простори Фреше. Значно цікавішим є питання про перенесення цієї теореми на несепарабельні банахові простори.

Наступні результати пов'язані з такими двома питаннями:

1. Нехай X — банахова алгебра і підпростір $X^2 = \left\{\sum\limits_1^N x_i y_i : x_i, y_i \in X, n = \overline{1, \infty}\right\}$ має в X скінченний дефект. Чи буде він замкненим [7, с. 76]?

2. Нехай X — банахова алгебра з інволюцією, а підпростір X^2 замкнений і має в X скінченний дефект. Чи буде кожен додатній функціонал на X неперервним [8]?

У роботі [8] показано, що коли алгебра з інволюцією комутативна і сепарабельна, а X^2 має скінченний дефект, то будь-який додатній функціонал на X неперервний.

Теорема 4. *Нехай X — напівпроста комутативна банахова алгебра з інволюцією, а одинична куля $B(X)$ компактна в слабкій топології $w(X, \Gamma)$, де Γ — сукупність лінійних мультиплікативних неперервних на X функціоналів. Якщо X^2 має скінченний дефект в X, то підпростір X^2 замкнений і кожен додатній лінійний функціонал на X неперервний.*

Доведення. Покажемо, що замикання множини $Z_m^n = \left\{z = \sum_1^n x_i y_j : \| x_i \| = \| y_i \|, \sum_1^n \| x_i \| \| y_i \| \leqslant m \| z \|\right\}$ міститься в X^2. Справді, нехай $z^k \to z_0$, $z^k = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i^k \in Z_m^n$. Оскільки послідовність (z^k) обмежена, то для будь-якого i послідовності $(x_i^k)_{k=1}^\infty$ і $(y_i^k)_{k=1}^\infty$ обмежені. Тому згідно з компактністю існує послідовність $k(s)$, $s = \overline{1, \infty}$, і точки x_i, y_i, $i = \overline{1, n}$, що є граничними для відповідних множин $\{x_i^{k(s)}, s = \overline{1, \infty}\}$, $\{y_i^{k(s)}, s = \overline{1, \infty}\}$ в топології $w(X, \Gamma)$. Оскільки алгебра X півпроста, то $\sum_{i=1}^n x_i y_i = z_0$.

Таким чином, підпростір X^2 буде зліченним об'єднанням замкнених множин, тобто борелівською множиною. З того, що борелівський підпростір сепарабельного банахового простору скінченної корозмірності замкнений [9], легко вивести, що це ж вірно і без припущень сепарабельності. Оскільки X^2 має скінченний дефект, то й X^3 має скінченний дефект. Отже [7, с. 77] будь-який додатній лінійний функціонал на X неперервний.

Зауваження. Теорема 3 в певному розумінні уточнює результат статті [10], який в свою чергу уточнює один неопублікований результат автора (див. зауваження в [10]).

1. *Husain T.* Multiplicative functionals on topological algebras // Reaserch Notes in Math.— 85.— Boston: Pitman, 1983.— 143 p.
2. *Husain T., Shu-Bun Ng.* On continuity of algebra homomorfisms and uniqueness of metric topolcgy // Math. Z.— 1974.— **139**.— P. 1—4.
3. *Петунин Ю. И., Погребной В. Д.* Некоторые вопросы вложения фактор-пространств и банаховых алгебр // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 1.— С. 87—93.
4. *Gregory F., Saeki S.* Banach algebras with uncomplemented radical //Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— **100**, N 2.— P. 271—274.
5. *Pelczyński A.* All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental total and bounded by $1 + \varepsilon$ biorthogonal sequences // Stud. Math.— 1976.— **55**, N 3.— P. 295—304.
6. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук.— 1973.— **28**, № 6.— С. 77—94.
7. *Sinclair A. M.* Automatic continuity of linear operators//London Math. Soc. Lect. Notes. — 1976.— **21**.— P. 1—92.
8. *Dixon P. G.* Automatic continuity of positive functionals on topological involution algebras // Bull. Austral. Math. Soc.— 1981.— **23**, N 2.— P. 265—281.
9. *Godefroy G.* Quelques propriétés des espaces de Banach // Semin. Choquet initiat. anal. Univ. Pierre et Marie Curie.— 1974-75.— **14**.— C3/1—C 3/8.
10. *Яковлев Н. В.* Примеры банаховых алгебр с радикалом, недополняемым как банахово пространство // Успехи мат. наук.— 1989.— **44**, № 5.— С. 185—186.

Одержано 16.04.90