УДК 517.512

С. Б. Вакарчук, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т геотехн. механики АН Украины, Днепропетровск)

О поперечниках некоторых классов аналитических функций. II

Во введенных В. И. Смирновым пространствах $E_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, рассмотрены классы $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$, $p \geqslant 1$, состоящие из аналитических функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, у которых интегральные модули непрерывности r-х производных мажорируются заданной неотрицательной неубывающей функцией Φ. Найдены порядковые оценки различных поперечников этих классов в пространствах $E_q(\Omega)$ при несовпадающих p и q.

У введених В. І. Смірновим просторах $E_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, розглянуто класи $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$, $p \geqslant 1$, утворені аналітичними функціями $f(z) \in E_p(\Omega)$, у яких інтегральні модулі неперервності r-х похідних мажоруються заданою невід'ємною неспадною функцією Φ. Знайдені порядкові оцінки різних поперечників цих класів у просторах $E_q(\Omega)$ при незбіжних p і q.

Настоящая статья является продолжением [22], и в ней продолжена нумерация формул, использованной литературы и т. д.

В статье найдены порядковые оценки величин $\varkappa(W^r E_p(\Omega)\,\Phi,\ E_q(\Omega))$, $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$, где $\varkappa$ — любой из рассмотренных в [22] поперечников, $\Phi(u)$, $u > 0$, — неотрицательная неубывающая функция, для которой $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u) = \Phi(0) = 0$; $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$, $r \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, — множество функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, у которых интегральные модули непрерывности r-х производных $f^{(r)}(z) \in E_p(\Omega)$ удовлетворяют условию

$$\frac{m}{4}\int\limits_0^{\pi/m} \omega(f^{(r)}, h)_p\, dh \leqslant \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

$\omega(f, h)_p = \sup\left\{\left[\int\limits_\gamma |f(z(\sigma + s)) - f(z(s))|^p\, ds\right]^{1/p} : |\sigma| \leqslant h\right\}$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(z) \in E_p(\Omega)$ на кривой $\gamma = \partial\Omega$, $z(s)$ — уравнение γ, s — длина дуги на γ.

Обозначим $\mu(t) = \{0$, если $t = 0$; $1/(n+1)$, если $1/(n+1) \leqslant t < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$; 1, если $t = 1\}$.

Предложение 2. *Пусть $\omega(f, h)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(z) \in E_p(\Omega)$ и $h_1 \geqslant h \geqslant 0$, $h_1 \neq 0$. Тогда*

$$\mu(h/h_1)\,\omega(f, h_1)_p \leqslant \omega(f, h)_p. \tag{36}$$

При установлении справедливости (36) использован ход рассуждений из доказательства теоремы о миноранте для модуля непрерывности [23, с. 101—104].

Предложение 3. *Пусть Ω — конечная односвязная область в $\mathbb{C}$, граница которой γ является кривой Ляпунова с показателем 1, и при всех $0 \leqslant u < \pi$ справедливы неравенства*

$$\frac{\Phi(\lambda u)}{\Phi(u)} \geqslant \begin{cases} 2\lambda^{-1}\sin^2(\pi\lambda/4), & \text{если } 0 < \lambda \leqslant 1, \\ \pi/2 - (\pi/2 - 1)/\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 1. \end{cases} \tag{37}$$

Тогда каждый шар $B_{p,N} = \{p_N \in \varPhi_{N+1} : \| p_N \|_{E_p} \leqslant N^{-r}\varPhi(\pi/N)\,(2B^*_{p,r}\|F_0\| \times \times \|F_0^{-1}\|)^{-1}\}$, $N = 1, 2, \ldots$, принадлежит классу $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$, где $B^*_{p,r}$, F_0 и F_0^{-1} определены в части I [22].

В самом деле, полагая $\nu_N(h) = \{2\sin(Nh/2)$, если $0 \leqslant h \leqslant \pi/N$; 2, если $h \geqslant \pi/N\}$ и используя лемму 2 из [10] и утверждения 1,3 из [22], для произвольного полинома $p_N(z) \in B_{p,N}$ можно записать

$$\omega(p_N^{(r)}, h)_p \leqslant \|F_0\|\,\omega(\tilde{p}_{N-r}, h)_p \leqslant \nu_N(h)\,\|F_0\|\,\|\tilde{p}_{N-r}\|_{H_p} \leqslant \nu_N(h)\,\|F_0\| \times \times \|F_0^{-1}\|\,\|p_N^{(r)}\|_{E_p} \leqslant \nu_N(h)\,\Phi(\pi/N), \tag{38}$$

где $p_N^{(r)}(z) = (F_0\tilde{p}_{N-r})(z)$. Если $m \geqslant N$, то, используя (37), имеем

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega(p_N^{(r)}, h)_p\,dh \leqslant 2\Phi(\pi/N)\,\frac{m}{N}\,\sin^2\left(\frac{\pi N}{4m}\right). \tag{39}$$

При $m \leqslant N$ получаем

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega(p_N^{(r)}, h)_p\,dh \leqslant \Phi(\pi/N)\left(\frac{m}{N} + \pi\left(1 - \frac{m}{N}\right)/2\right). \tag{40}$$

Полагая в (39), (40) $\lambda = N/m$, $u = \pi/N$ и учитывая (36), записываем

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega(p_N^{(r)}, h)_p\,dh \leqslant \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

что означает включение $B_{p,N} \subset W^r E_p(\Omega)\,\Phi$. Предложение 3 доказано.

Покажем, что существуют функции $\Phi(u)$, удовлетворяющие условиям (37). Для этого рассмотрим, например, функции вида $\Phi(u) = u^\alpha$, где $\alpha > 0$. Обозначим $Q(\lambda) = \lambda^\alpha - \pi/2 + (\pi/2 - 1)/\lambda$, где $\lambda \geqslant 1$. Производная этой функции равна $Q^{(1)}(\lambda) = (\alpha\lambda^\alpha - (\pi/2 - 1)/\lambda)/\lambda$. Поскольку $Q^{(1)}(\lambda) \geqslant (\alpha\lambda^\alpha + 1 - \pi/2)/\lambda$, то при $\alpha \geqslant \pi/2 - 1$ имеем $Q^{(1)}(\lambda) \geqslant 0$. Отсюда и из равенства $Q(1) = 0$ заключаем, что $Q(\lambda)$ — неотрицательная неубывающая функция, т. е. $\lambda^\alpha \geqslant \pi/2 - (\pi/2 - 1)/\lambda$, если $\alpha \geqslant \pi/2 - 1$. Это означает, что при $\alpha \geqslant \pi/2 - 1$ функция $\Phi(u) = u^\alpha$ удовлетворяет второму из условий (37). Рассмотрим далее функцию $Q_1(\lambda) = \lambda^{\alpha/2} - \sqrt{2}\sin(\pi\lambda/4)$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Полагая $\alpha = \pi/2$ и исследуя поведение первой и второй производных $Q_1(\lambda)$, заключаем, что данная функция знакопостоянна, а именно положительна на $(0, 1)$. Отсюда следуют неравенства $2\sin^2(\pi\lambda/4) \leqslant \lambda^{\pi/2} \leqslant \lambda^\alpha$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 < \alpha \leqslant \pi/2)$. Таким образом, первое из условий (37) выполняется для $\Phi(u) = u^\alpha$ при $\alpha \in (0, \pi/2]$. Из изложенного следует, что мажорантные функции $\Phi(u) = u^\alpha$, где $\pi/2 - 1 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, удовлетворяют обоим требованиям (37).

Утверждение 7. *Пусть область Ω удовлетворяет условиям предложения 3. Тогда для каждой функции $f(z) \in W^r E_p(\Omega)\Phi$ и натурального $n \geqslant r$ существует полином $p_n^*(z)$, являющийся результатом действия на $f(z)$ некоторого линейного оператора Λ_n, такой, что*

$$\| f(z) - p_n^*(z) \|_{E_p} \leqslant D_{p,\gamma,r}(n+1)^{-r} \Phi(\pi/(n+1)), \tag{41}$$

где $D_{p,\gamma,r}$ — константа, зависящая от p, γ и r.

Оценка (41) получена на основании предложения 2 и результатов работ [4, 6, 24].

Лемма 3. *Если область Ω удовлетворяет условиям последнего утверждения и $q \geqslant p \geqslant 1$, натуральное $r \geqslant 2$, то произвольная функция $f(z) \in W^r E_p(\Omega)\Phi$ принадлежит $E_q(\Omega)$ и при $n \geqslant r$ справедливо неравенство*

$$\| f - \Lambda_n(f) \|_{E_q} \leqslant C^*_{p,q,\gamma}(n+1)^{-r+1/p-1/q} \Phi(\pi/(n+1)), \tag{42}$$

где $C^*_{p,q,\gamma}$ — константа, зависящая от p, q, γ.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2 с использованием утверждения 7.

Под $W^0 E_p(\Omega)\Phi$, $p \geqslant 1$, понимаем множество аналитических функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, для которых выполняются условия

$$\frac{m}{4} \int\limits_0^{\pi/m} \omega(f, h)_p \, dh \leqslant \Phi(\pi/m), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где функция $\Phi(u)$ удовлетворяет сформулированным в определении класса $W^r E_p(\Omega)\Phi$, $r \in \mathbb{N}$, требованиям.

Следствие 1. *Пусть при $0 \leqslant u \leqslant \pi$ для $\Phi(u)$ справедливо неравенство*

$$\Phi(\lambda u)/\Phi(u) \leqslant \lambda^\alpha, \tag{43}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Тогда в зависимости от вида неравенств для $\alpha: 0 < \alpha \leqslant 1$ или $\alpha > 1$, вложение $W^r E_p(\Omega)\Phi \underset{\to}{\subset} E_q(\Omega)$, $q \geqslant p \geqslant 1$, имеет место соответственно для $r \in \mathbb{N}$ или для $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и справедлива формула (42).

Теорема 2. *Пусть Ω — конечная односвязная область в $\mathbb{C}$, граница которой γ является кривой Ляпунова с показателем 1, и при всех $0 \leqslant u \leqslant \pi$ функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям (37). Тогда для натуральных $n \geqslant r \geqslant 2$ выполняются следующие соотношения:*

$$d_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \asymp \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r} \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant q \leqslant p \text{ или } 2 \leqslant p \leqslant q, \\ n^{1/p-1/2}, & \text{если } p \leqslant 2 \leqslant q, \\ n^{1/p-1/q}, & \text{если } p \leqslant q \leqslant 2, \end{cases} \tag{44}$$

$$\delta_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \asymp \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r} \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant q \leqslant p, \\ n^{1/p-1/q}, & \text{если } p \leqslant q \leqslant 2 \text{ или } 2 \leqslant p \leqslant q, \\ n^{1/p-1/2}, & \text{если } p \leqslant 2 \leqslant q \text{ и } p' \geqslant q, \\ n^{1/2-1/q}, & \text{если } p \leqslant 2 \leqslant q \text{ и } p' \leqslant q, \end{cases} \tag{45}$$

$$a_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \asymp \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r}, \quad 1 \leqslant p, \quad q \leqslant \infty, \tag{46}$$

$$b_{n+1}(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \asymp \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r} \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2 \text{ или } p \leqslant q, \\ n^{1/p-1/2}, & \text{если } q \leqslant 2 \leqslant p, \\ n^{1/p-1/q}, & \text{если } 2 \leqslant q \leqslant p, \end{cases} \tag{47}$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство теоремы 2 не приводим, поскольку ход рассуждений в нем в общих чертах совпадает со схемой доказательства теоремы 1 из [22] с дополнительным привлечением предложения 3, утверждения 7, леммы 3 и условий (37).

Ограничение $r \geqslant 2$ в теореме 2 можно существенно ослабить, налагая на мажорирующую функцию $\Phi(u)$ помимо (37) еще одно условие.

Следствие 2. *Пусть* $\Phi(u)$ *при* $0 \leqslant u \leqslant \pi$ *одновременно удовлетворяет неравенствам* (37) *и* (43). *Тогда если* $0 < \alpha \leqslant 1$, *то оценки* (44)—(47) *справедливы для* $n \geqslant r \geqslant 1$. *Если же* $\alpha > 1$, *то помимо* $n \geqslant r \geqslant 1$ *соотношения* (44)—(47) *выполняются и при* $n > r = 0$.

В заключение отметим необходимость множителя 1/4 в левой части неравенства (35), поскольку при $\Omega = \{z : |z| < 1\}$, $p = q$ и переходе в данном случае пространства $E_p(\Omega)$ в пространство Харди H_p для мажорирующей функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей неравенству (37), справедливы точные равенства $b_{n+1}(W^r H_p \Phi, H_p) = d_n(W^r H_p \Phi, H_p) = \Phi(\pi/n)(n-r)!/n!$, где $n \geqslant r \geqslant 1$, $n > r = 0$.

22. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. I// Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 3.— С. 324—333.
23. *Малоземов В. Н.* Совместное приближение функции и ее производных.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1973.— 112 с.
24. *Андрашко М. И.* О приближении в среднем аналитических функций в областях с гладкой границей // Тез. докл. II Всесоюзн. конф. по конструктивной теории функций (Баку, 8—13 окт. 1962 г.).— Баку: Изд-во АН АзССР, 1962.— С. 4.

Получено 20.11.90