УДК 519.21

Д. Алимов, канд. физ.-мат. наук (Туркм. политехн. ин-т)

Три примера марковских функционалов

Рассматриваются три примера применения общих предельных теорем для марковских функционалов: к задаче о моменте выхода марковского процесса из подмножества состояний; к анализу систем массового обслуживания с относительно быстрым обслуживанием; к асимптотике среднего числа частиц в ветвящемся процессе в марковской случайной среде.

Розглядаються три приклади застосування загальних граничних теорем для марківських функціоналів: до задачі про момент виходу марківського процесу з підмножини станів; до аналізу систем масового обслуговування з відносно швидким обслуговуванням; до асимптотики середнього числа частинок гіллястого процесу у марківському випадковому середовищі.

Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный марковский процесс со значениями в метрическом полном сепарабельном пространстве $(E, \mathcal{B})$. Будем считать его (процесс) эргодическим в смысле [1] и для простоты стохастически непрерывным. Обозначим через $P_t(x, A)$ переходную вероятность процесса $X(\cdot)$ за время t из состояния $x \in E$ в множество $A \in \mathcal{B}$, а через π инвариантное распределение вероятностей на $(E, \mathcal{B})$.

Для сокращения формулировок будем предполагать, что процесс $X(t)$ непериодичен [1], т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \int_E \varphi(y) P_t(x, dy) = \int_E \varphi(y) \pi(dy) \tag{1}$$

для всех $x \in E$ и всех ограниченных непрерывных функций φ.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским функционалом (МаФ) от процесса $X(t)$, если пара $\{X(t), \xi(t)\}$ образует однородный марковский процесс. Впервые это понятие введено в [2], правда, без использования предложенной здесь терминологии.

Будем рассматривать только МаФ с конечным множеством значений $\{1, \ldots, d\}$.

Обозначим через $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{P}_{x,i}$ регулярную условную вероятность на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$ при условии $X(0) = x$ и $X(0) = x$, $\xi(0) = i$ соответственно.

Пусть, далее, последовательность МаФ $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, сходится к МаФ $\xi(t)$ в следующем смысле:

$$\xi_n(0) = \xi(0) \ \mathbf{P}_{x,i}\text{-п. н.}, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = i, \ \xi(t) = j\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

для всех $t \geqslant 0$, $i \neq j$.

Рассмотрим два случая. Первый, когда процесс $\xi(t)$ вырожден, т. е.

$$\xi(t) = \xi(0) \ \mathbf{P}_{x,i}\text{-п. н.} \tag{4}$$

для всех $t \geqslant 0$; и второй, когда процесс $\xi(t)$ не зависит от процесса $X(t)$ и эргодичен, т. е.

$$\mathbf{P}_{x,i}\{X(t) \in A, \ \xi(t) = j\} = P_t(x, A)\, p^{ij}(t) \tag{5}$$

для всех $t \geqslant 0$, $A \in \mathcal{B}$, $i, j = 1, \ldots, d$, и

$$\lim_{t\to\infty} p^{ij}(t) = \rho^j \tag{6}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, d$. Из (5), (6) необходимо вытекает, что $\xi(t)$ — однородный марковский эргодический процесс с переходной вероятностью $p^{ij}(t)$ и с инвариантным распределением вероятностей ρ^j.

В дальнейшем мы будем придерживаться принятых в [1] обозначений, а именно: для случайной величины η и события $\Gamma \in \mathcal{M}$ будем обозначать

$$\mathbf{P}\eta = \int_\Omega \eta d\mathbf{P}, \ \mathbf{P}(\eta, \Gamma) = \int_\Gamma \eta d\mathbf{P}.$$

Кроме того, мы допускаем возможность обрыва процессов $\xi_n(t)$. Значит, в соответствии с общепринятым соглашением выражения вида $\mathbf{P}\{\xi_n(\tau) = j\}$ следует понимать как $\mathbf{P}\{\xi_n(\tau) = j, \tau < \zeta_n\}$, где ζ_n — время жизни процесса $\xi_n(t)$.

Доказательства следующих двух теорем будут опубликованы позднее.

Теорема A. *Если дополнительно к условиям* (1) — (4)

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_n \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) \neq i\} = 0 \tag{7}$$

для всех $x \in E$, $i = 1, \ldots, d$, *то существуют последовательности* $\varepsilon_n \to 0+$, c_n^{ij}, $i, j = 1, \ldots, d$, *такие, что* $c_n^{ij} \geqslant 0$ *при* $i \neq j$, $\sum_j c_n^{ij} \leqslant 0$, $\sum_i c_n^{ii} = -1$, *и*

$$\mathbf{P}_{x,i}[\varphi(X(t)), \xi_n(t) = j] - q_n^{ij}(u) \int_E \pi(dy)\varphi(y) \to 0$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $t\varepsilon_n \to u$ *для всех непрерывных ограниченных функций* φ, *где* $q_n^{ij}(u)$ — (i, j)*-й элемент матрицы* e^{uC_n}, $C_n = \| c_n^{ij} \|_{i,j=1}^d$.

Теорема B. *Если дополнительно к условиям* (1) — (3), (5), (6)

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_n \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) \neq i\} = 0 \tag{8}$$

для всех $x \in E$ *и тех* $i = 1, \ldots, d$, *для которых* $\rho^i > 0$, *то существует последовательность* $\varepsilon_n \to 0+$ *такая, что*

$$\mathbf{P}_{x,i}[\varphi(X(t)), \xi_n(t) = j] \to \rho^j e^{-u} \int_E \pi(dy)\varphi(y)$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $t\varepsilon_n \to u$ *для всех ограниченных непрерывных функций* φ.

Утверждение теоремы B останется в силе, если допустить, что (5) имеет место только для тех $i = 1, \ldots, d$, для которых $\rho^i > 0$.

Далее мы рассматриваем три примера на применение этих теорем.

1. Момент достижения далекого множества. Пусть D_n — последовательность множеств из $\mathcal{B}$ таких, что

$$D_n \supset D_{n+1}, \ \pi(D_n) > 0, \ \pi(D_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Обозначим

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \in D_n\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}_x\{\tau_n < \infty\} = 1, \ \mathbf{P}_x\{\tau_n \to \infty\} = 1.$$

В [3] показано, что при подходящем выборе нормирующей последовательности $\varepsilon_n \to 0+$

$$\mathbf{P}_x\{\varepsilon_n \tau_n \geqslant u\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-u}, \ x \in E, \ u > 0.$$

Уточним этот результат в следующем смысле. Предположим, что при каждом n множество D_n представимо в виде объединения d попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{B}$, т. е.

$$D_n = D_n^1 \cup \ldots \cup D_n^d, \ D_n^i \cap D_n^j = \varnothing, \ i \neq j, \ D_n^i \in \mathcal{B}, \ i, j = 1, \ldots, d, \tag{10}$$

и поставим вопрос об асимптотике вероятности

$$\mathbf{P}_x\{\varepsilon_n \tau_n \geqslant u, \ X(\tau_n) \in D_n^j\}, \ j = 1, \ldots, d,$$

при $n \to \infty$. Частичный ответ на него можно получить на основании теоремы А. Точнее, справедлива теорема 1.

Теорема 1. *В условиях* (1), (9), (10) *существуют последовательности* $\varepsilon_n \to 0+$, $p_n^j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, d$, *такие, что* $\sum_{j=1}^{d} p_n^j = 1$, *и*

$$\mathbf{P}_x \{\varepsilon_n \tau_n \geqslant u, \ X(\tau_n) \in D_n^j\} - p_n^j e^{-u} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

для всех $u > 0$, $x \in E$, $j = 1, \dots, d$.

Доказательство. Построим последовательность МаФ $\xi_n(t)$ по формуле

$$\xi_n(t) = 0 \ \text{при} \ t < \tau_n;$$

$$\xi_n(t) = j \ \text{при} \ t \geqslant \tau_n, \ X(\tau_n) \in D_n, \ j = 1, \dots, d.$$

Так построенная последовательность МаФ очевидным образом удовлетворяет условиям (2)—(4), (7) с заменой, разумеется, множества $\{1, \dots, d\}$ на $\{0, 1, \dots, d\}$. Более того, состояния $1, \dots, d$ (все, кроме состояния 0) являются поглощающими, т. е.

$$\mathbf{P}_{x,i} \{\xi_n(t) = j\} = 0 \ \text{при} \ i = 1, \dots, d, \ j \neq i.$$

Очевидно также, что

$$\mathbf{P}_{x,0} \{\xi_n(t) = j\} = \mathbf{P}_x \{\tau_n \geqslant t, \ X(\tau_n) \in D_n^j\}$$

при $j = 1, \dots, d$, и

$$\mathbf{P}_{x,0} \{\xi_n(t) = 0\} = \mathbf{P}_x \{\tau_n < t\}.$$

Отсюда вытекает, что последовательности c_n^{ij}, $i, j = 0, 1, \dots, d$, существующие согласно теореме А, необходимо имеют вид $c_n^{ij} = 0$ при $i \neq 0$, $j = 0, 1, \dots, d$, и следовательно, $c_n^{00} = -1$. Переобозначим $c_n^{0j} = p_n^j$, $j \neq 0$. Теперь искомое следует из того, что для матрицы C_n указанного вида элементы $q_n^{ij}(u)$, $i, j = 0, 1, \dots, d$, матрицы $\exp\{uC_n\}$ имеют вид

$$q_n^{ii}(u) = 1, \ \ i \neq 0; \ q_n^{ij}(u) = 0, \ i \neq 0, \ j \neq i;$$

$$q_n^{0j}(u) = p_n^j e^{-u}, \ j \neq 0; \ q_n^{00}(u) = 1 - e^{-u}.$$

Теорема доказана.

Дальнейшую информацию о вероятностях p_n^j можно получить только располагая дополнительными сведениями о процессе $X(t)$.

2. Управляемые системы с относительно быстрым обслуживанием и потерями. Относительно быстрое обслуживание — это обслуживание, быстрое относительно поступления. Требования поступают в систему по одному в соответствии с заранее заданным мультипликативным функционалом (коротко МуФ) $\Lambda(t)$ от процесса $X(\cdot)$, т. е. условная вероятность того, что на интервале времени $[t, t + u]$ не будет поступлений при условии, что задана совместная эволюция системы до момента времени t и процесса $X(\cdot)$ до момента времени $t + u$ включительно, равна $T_t \Lambda(u)$ $\mathbf{P}_x$-п. н., $x \in E$, где T_t — оператор сдвига траектории процесса $X(\cdot)$ (см., например, [1, с. 139]). Если поступившее требование застает обслуживающий прибор свободным, то оно сразу идет на обслуживание. Время обслуживания определяется МуФ $M(t)$ по правилу: условная вероятность того, что на интервале времени $[t, t + u]$ обслуживающееся требование не закончит обслуживаться при условии, что задана совместная эволюция системы до момента времени t и процесса $X(\cdot)$ до момента времени $t + u$ включительно, равна $T_t M(u)$ $\mathbf{P}_x$-п. н., $x \in E$. Если же поступившее требование застает обслуживающий прибор занятым, то оно становится в очередь на одно из d имеющихся мест ожидания, если, конечно, среди них есть свободные — в противном случае требование теряется.

Если $\Lambda(t) = \exp\left\{-\int\limits_0^t \lambda(X(s))\,ds\right\}$ и $M(t) = \exp\left\{-\int\limits_0^t \mu(X(s))\,ds\right\}$, то $\lambda(x)$ называется интенсивностью поступления, а $\mu(x)$ — интенсивностью обслуживания (см., например, [4]).

Режим относительно быстрого обслуживания задается с помощью дополнительного натурального параметра n, от которого зависят МуФ $\Lambda(t)$ и $M(t)$. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, переобозначим $\Lambda(t) = \Lambda_n(t)$, $M(t) = M_n(t)$, и предположим, что

$$[1 - \Lambda_n(t)]\, M_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{11}$$

для всех $t > 0$. Это и есть математическая формулировка условия относительно быстрого обслуживания.

Обозначим через ζ_n момент первой потери требования и исследуем асимптотическое поведение величины ζ_n при $n \to \infty$. С этой целью обозначим через $\xi_n(t)$ при $0 \leqslant t < \zeta_n$ число требований в системе в момент времени $t \geqslant 0$, включая то, которое находится на обслуживании. Ясно, что $\xi_n(t)$ есть МаФ с множеством состояний $\{0, 1, \ldots, d+1\}$.

Условие (11) позволяет, не ограничивая общности, считать, что $\xi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(t)$ в смысле (3), (5), (6), причем $\rho^0 = 1$ и $\rho^j = 0$ при $j = 1, \ldots, d+1$.

Условие (8) тривиально вытекает из следующего:

$$\sup_n \Lambda_n(t) \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 1 \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{12}$$

Применяя теорему В, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *В условиях* (1), (11) *существует последовательность* $\varepsilon_n \to 0+$ *такая, что*

$$\mathbf{P}_x\{\varepsilon_n\zeta_n \geqslant u\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-u}$$

для всех $x \in E$.

Аналогичный результат получен в [4] другим методом и в других предположениях.

3. Марковское ветвление в марковской эргодической случайной среде. Состояние среды определяется исходным марковским эргодическим процессом $X(t)$. Ветвление осуществляется следующим образом (см. также [5]). Имеется некоторая совокупность частиц d типов $\{1, \ldots, d\}$. Каждая существующая в данный момент времени частица типа i независимо от наличия других частиц и своего происхождения живет некоторое случайное время в соответствии с МуФ $\Lambda^i(t)$. Точнее, условная вероятность того, что существующая в момент времени t частица типа i проживет u единиц времени при условии, что задана эволюция системы до момента времени t и процесса $X(\cdot)$ до момента времени $t + u$ включительно, равна $T_t\Lambda^i(u)$ $\mathbf{P}_x$-п. н., $x \in E$, $i = 1, \ldots, d$. В конце жизни частица погибает, оставляя после себя потомство (ветвится). Потомство частицы может зависеть лишь от ее типа и от состояния среды в момент ветвления. Обозначим через $a^{ij}(x)$ условное среднее число потомков типа j одной частицы типа i при условии, что ветвление произошло в среде $x \in E$, а через $M^{ij}(s, t)$ — условное среднее число потомков типа j одной частицы типа i, произведенных ею за интервал времени $[s, t]$ при условии, что задана эволюция процесса $X(\cdot)$ на этом же интервале времени $[s, t]$.

Положим $M(s, t) = \|M^{ij}(s, t)\|_{i,j=1}^d$. Легко видеть, что семейство $M(s, t)$ образует матричный МуФ от процесса $X(\cdot)$, т. е.

$$M(s, t)\, M(t, u) = M(s, u) \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{13}$$

для всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$, $x \in E$.

Нетрудно также понять, что МуФ $M(s, t)$ однороден, т. е. $M(s, t) = T_sM(0, t-s)$

Рассуждая по формуле полной вероятности, получаем систему уравнений

$$M^{ij}(s,t)=\delta^{ij}\Lambda^{i}(s,t)+\sum_{k=1}^{d}\int_{s}^{t}\{d_u[1-\Lambda^{i}(s,u)]\}\,a^{ik}(X(u))\,M^{kj}(u,t), \quad (14)$$

где $\Lambda^{i}(s,t)=T_s\Lambda^{i}(t-s)$. В дальнейшем будем считать, что

$$\Lambda^{i}(t)=\exp\left\{-\int_{0}^{t}\lambda^{i}(X(s))\,ds\right\}. \quad (15)$$

В этом случае система (14) превращается в систему линейных дифференциальных уравнений для функций $M^{ij}(t)=M^{ij}(0,t)$:

$$\frac{\partial M^{ij}(t)}{\partial t}=\sum_{k}M^{ik}(t)\,\lambda^{k}(X(t))\,[a^{kj}(X(t))-\delta^{kj}],\ M^{ij}(0)=\delta^{ij}. \quad (16)$$

Если функции $\lambda^{i}(x)$ и $a^{ij}(x)$ ограничены, то уравнения (14), (16) имеют единственное локально ограниченное решение $\mathbf{P}_x$-п. н. для всех $x\in E$.

Далее, обозначим $E^{ij}(x,t)=\mathbf{P}_xM^{ij}(t)$ и поставим вопрос об асимптотике $E^{ij}(x,t)$, когда t велико, а функции $a^{ij}(x)$ близки к δ^{ij}. Содержательно $E^{ij}(x,t)$ есть среднее число частиц типа j, существующих в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица типа i, а состояние среды было x. Чтобы уточнить постановку, введем натуральный параметр n и переобозначим

$$a^{ij}(x)=a_n^{ij}(x),\ \ \lambda^{i}(x)=\lambda_n^{i}(x),$$

$$M^{ij}(t)=M_n^{ij}(t),\ \ M(t)=M_n(t),\ \ E^{ij}(x,t)=E_n^{ij}(x,t).$$

Обозначим

$$a_n^{i}(x)=\sum_{j=1}^{d}a_n^{ij}(x),$$

$$\alpha_n=\max_{i}\sup_{x\in E}\{0\vee\lambda_n^{i}(x)\,[a_n^{i}(x)-1]\},$$

где, как обычно, $a\vee b=\max(a,b)$, и предположим, что

$$\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0, \quad (17)$$

$$\max_{i}\sup_{n}\sup_{x\in E}\lambda_n^{i}(x)<\infty, \quad (18)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{ij}(x)=\delta^{ij} \quad (19)$$

для всех $i,j=1,\dots,d,\ x\in E$.

Из (16) следует

$$\sum_{j=1}^{d}M_n^{ij}(t)\leqslant e^{\alpha_n t},\ i=1,\dots,d.$$

Введем в рассмотрение матричный МуФ

$$\Pi_n(t)=e^{-\alpha_n t}M_n(t).$$

В силу последнего неравенства имеем $\sum_{j}\Pi_n^{ij}(t)\leqslant 1$. Это позволяет связать с МуФ $\Pi_n(t)$ некоторый вполне определенный МаФ $\xi_n(t)$:

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t)=j\mid X(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}=\Pi_n(t).$$

При этом, очевидно,

$$e^{-\alpha_n t} E_n^{ij}(x, t) = \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = j\}.$$

Из (17)—(19) нетрудно вывести, что последовательность $\xi_n(t)$ удовлетворяет условиям (3), (4). Применяя теорему А, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях* (1), (15), (17) — (19) *существуют последовательности* $\varepsilon_n \to 0+$ *и* c_n^{ij}, $i, j = 1, \dots, d$ *такие, что* $c_n^{ij} \geqslant 0$ *при* $i \neq j$, $\sum_j c_n^{ij} \leqslant 0$, $\sum_j c_n^{ii} = -1$, *и* $e^{-\alpha_n t} E_n^{ij}(x, t) - q_n^{ij}(u) \to 0$ *при* $n \to \infty$, $t \to \infty$, $\varepsilon_n t \to u$ *для всех* $x \in E$; $i, j = 1, \dots, d$, *где*

$$\| q_n^{ij}(u) \|_{i,j=1}^d = \exp\{uC_n\}, \; C_n = \| c_n^{ij} \|_{i,j=1}^d.$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда

$$a_n^{ij}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a^{ij} \tag{20}$$

для всех $x \in E$, $i, j = 1, \dots, d$, но матрица $A = \| a^{ij} \|$ неразложима и ее перронов корень равен единице (см., например, [6, с. 124]).

Отсюда и из (17) необходимо вытекает, что $\sum_j a^{ij} = 1$. При этом будем также предполагать, что

$$\lambda_n^i(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^i > 0 \tag{21}$$

для всех $x \in E$, $i = 1, \dots, d$.

Пусть $v = (v_1, \dots, v_d)$ — левый инвариантный вектор матрицы A с положительными координатами (см., например, [8, с. 124]), нормированный условием

$$\sum_{i=1}^d \frac{v_i}{\lambda^i} = 1. \tag{22}$$

Условия (17), (18), (20), (21) обеспечивают выполнение условий теоремы В, и следовательно, справедлива такая теорема.

Теорема 4. *В условиях* (1), (15), (17), (18) (20)—(22), (24) *существует такая последовательность* $\varepsilon_n \to 0+$, *что*

$$e^{-\alpha_n t} E_n^{ij}(x, t) \to e^{-u} v_i / \lambda^i$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $\varepsilon_n t \to u$ *для всех* $x \in E$; $i, j = 1, \dots, d$.

В заключение заметим, что последние две теоремы имеют отношение к так называемым переходным явлениям для ветвящихся процессов [6].

1. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 336 с.
2. *Скороход А. В.* Построение марковских процессов с помощью мультипликативных функционалов // Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1964.— С. 191—216.
3. *Королюк Д. В., Сильвестров Д. С.* Моменты достижения асимптотически удаляющихся областей для эргодических цепей Маркова // Там же.— 1983.— 28, вып. 2.— С. 410—420.
4. *Анисимов В. В.* Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы.— Киев : Вища шк., 1988.— 184 с.
5. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.* Случайные процессы (справочник).— Киев : Наук. думка, 1983.— 368 с.
6. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М. : Наука, 1971.— 436 с.

Получено 03. 07. 91