УДК 517.535

А. Г. Бакан, А. П. Голуб, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Некоторые отрицательные результаты о последовательностях множителей первого рода

Доказано, что композиция многочлена с последовательностью множителей первого рода может приводить к уменьшению числа действительных корней этого многочлена, и что величины, обратные моментам неотрицательной функции на [0, 1], могут не образовывать последовательность множителей первого рода. На основании этих фактов установлена ошибочность полученного Т. Кревеном и Дж. Шордашем решения проблемы С. Карлина о характеризации линейных преобразований, не увеличивающих количества нулей, а также неверность некоторых результатов М. Костовой, приведенных в монографии Л. Г. Илиева «Целые функции Лагерра» (София, 1987).

Доведено, що композиція многочлена з послідовністю множників першого роду може призводити до зменшення числа дійсних коренів цього многочлена, і що величини, обернені до моментів невід'ємної функції на [0, 1], можуть не утворювати послідовність множників першого роду. На основі цих фактів встановлена помилковість одержаного Т. Кревеном та Дж. Шордашем розв'язку проблеми С. Карліна про характеризацію лінійних перетворень, що не збільшують кількості нулів, а також неправильність деяких результатів М. Костової, наведених у монографії Л. Г. Ілієва «Целые функции Лагерра» (Софія, 1987).

Последовательности действительных чисел $\gamma=\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых при любом выборе многочлена $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, имеющего только действительные нули, многочлен $(\gamma * f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} \gamma_k a_k x^k$ также имеет только действительные нули, называются последовательностями множителей первого рода. Множество всех таких последовательностей будем обозначать через α. Последовательности множителей первого рода введены в работе Г. Полиа и И. Шура [1], где установлено, что последовательность $\gamma=\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит α в том и только том случае, когда ряд $\Phi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} x^k$ сходится во всей комплексной плоскости и целая функция $\Phi(x)$ или $\Phi(-x)$ может быть представлена в виде

$$c e^{\sigma x} x^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{x_n}\right), \tag{1}$$

где $\sigma \geqslant 0$, $0<x_n \leqslant \infty$, $c \in \mathbb{R}^1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}<\infty$, а m — неотрицательное целое число (см. также [2, с. 439; 3, с. 5—8]). Класс целых функций вида (1) обозначается через L_1. Он содержит, в частности, все многочлены, которые имеют только неположительные нули.

Интерес к изучению последовательностей множителей первого рода обусловлен тем, что они применяются в различных областях математики и теоретической физики [4—7]. Настоящая статья посвящена опровержению двух теорем, устанавливающих новые свойства последовательностей из множества α. Для этого доказан ряд фактов об отсутствии включений между различными классами числовых последовательностей.

1. Лемма 1. *Пусть последовательность действительных чисел $\mu=\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ представима в виде*

$$\mu_k=\int_a^b t^k d\sigma(t), \quad k \geqslant 0,$$

где $-\infty < a < b < +\infty$ *и* $\sigma(t)$ — *немонотонная функция ограниченной вариации на* $[a, b]$. *Тогда существует такое натуральное число* N_0, *что для любого* $N \geqslant N_0$ *квадратическая форма*

$$\sum_{k,j=0}^{N} \mu_{k+j} x_k x_j \tag{2}$$

является знакопеременной.

Доказательство. Конусом K^*, сопряженным конусу K всех неотрицательных и непрерывных на $[a, b]$ функций в пространстве $C[a, b]$, является множество всех неубывающих функций в пространстве функций ограниченной вариации на $[a, b]$ [8, с. 448]. По условию теоремы $\sigma \notin \pm K^*$. Это означает, что существуют такие непрерывные и неотрицательные на $[a, b]$ функции φ_0, φ_1, что

$$(-1)^i \int_a^b \varphi_i(t)\, d\sigma(t) > 0, \quad i = 0, 1.$$

Приближая на $[a, b]$ по теореме Вейерштрасса функции $\sqrt{\varphi_0(t)}$, $\sqrt{\varphi_1(t)}$ многочленами $P_N(t) = \sum_{k=0}^{N} p_k t^k$, $Q_N(t) = \sum_{k=0}^{N} q_k t^k$ соответственно, получаем, что при достаточно большом натуральном N_0 для всех $N \geqslant N_0$ выполняются неравенства

$$\sum_{k,j=1}^{N} \mu_{k+j} p_k p_j = \int_a^b [P_N(t)]^2\, d\sigma(t) > 0,$$

$$\sum_{k,j=0}^{N} \mu_{k+j} q_k q_j = \int_a^b [Q_N(t)]^2\, d\sigma(t) < 0,$$

которые завершают доказательство леммы.

Определим по заданной последовательности чисел $\mu = \{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве всех многочленов $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ с действительными коэффициентами (действительных многочленов) функционал $\mu(f) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k a_k$ и напомним [9, с. 92], что последовательность μ называется ненегативной, если для любого неотрицательного на всей оси многочлена P выполняется неравенство $\mu(P) \geqslant 0$. Последовательность μ [9, с. 10] ненегативна тогда и только тогда, когда все квадратические формы вида (2) неотрицательны. Пусть Λ обозначает класс всех ненегативных последовательностей, α_+ — множество всех последовательностей из α с положительными членами и если $a = \{\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}\}$ — некоторое множество последовательностей, то запись $\frac{1}{a}$ будет обозначать множество $\left\{\left\{\frac{1}{\alpha_k}\right\}_{k=0}^{\infty} \mid \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty} \in a\right\}$.

Лемма 2. *Выполняется соотношение* $\frac{1}{\alpha_+} \setminus \Lambda \neq \varnothing$.

Доказательство. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + k + 1}{k!} x^k = (x + 1)^2 e^x \in L_1$, то $\{k^2 + k + 1\}_{k=0}^{\infty} \in \alpha_+$. В то же время последовательность $\mu = \left\{\frac{1}{k^2 + k + 1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ допускает представление

$$\frac{1}{k^2 + k + 1} = \int_0^1 t^k \rho(t)\, dt, \quad k \geqslant 0,$$

где функция $\rho(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}} t^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right)$ является знакопеременной на $[0, 1]$. Поэтому μ удовлетворяет условиям леммы 1 и, значит, не является ненегативной. Лемма доказана.

Обозначим через $\lambda([a, b])$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, совокупность всех последовательностей действительных чисел $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых на $[a, b]$ разрешима классическая проблема моментов

$$\mu_k = \int_a^b t^k d\sigma(t), \quad k \geqslant 0,$$

с неубывающей функцией $\sigma(t)$, имеющей на $[a, b]$ бесконечное число точек роста. Тогда из $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ следует

$$\lambda([a, b]) \subset \boldsymbol{\lambda} \subset \Lambda, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\lambda} := \lambda(\mathbb{R}^1)$.

Лемма 3. *Выполняется соотношение* $\lambda([0, 1]) \diagdown \frac{1}{\alpha_+} \neq \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\mu = \{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\mu_k = \frac{5}{(k+1)[5+(k+1)^2]}$, $k \geqslant 0$. Из равенства

$$\frac{5}{(s+1)[5+(s+1)^2]} = \int_0^1 x^s [1 - \cos \sqrt{5} \ln x]\, dx, \quad s > -1,$$

следует $\mu \in \boldsymbol{\lambda}([0, 1])$. С другой стороны,

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{\mu_k k!} = \frac{1}{5} e^x P(x),$$

где $P(x) = x^3 + 6(x+1)^2$. Так как $P'(x) = 3(x+2)^2$, $P'(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}^1$, $P'(x) > 0\ \forall x \in [-1, 0]$, то $P(x) \geqslant P(0) = 6\ \ \forall x \geqslant 0$, $P(x) \leqslant P(-1) = 1\ \forall x \leqslant -1$ и на $[-1, 0]$ $P(x)$ имеет ровно один вещественный ноль. Поэтому $P(x) \notin L_1$ и, следовательно, $\Phi(x) \notin L_1$. Это означает, что $\mu \notin \frac{1}{\alpha_+}$. Лемма доказана.

Для действительного многочлена P через $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(P)$ обозначим количество вещественных корней P, подсчитываемых с учетом их кратности. Будем говорить [3, с. 121], что последовательность вещественных чисел $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит множеству τ, если неравенство $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(\gamma * P) \leqslant \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(P)$ выполняется для любого действительного многочлена P. Так как вместе с каждой последовательностью $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ из τ в множество τ входит последовательность $\{-\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$, то, не ограничивая общности дальнейших рассуждений, будем считать, что τ состоит только из тех последовательностей $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$, у которых $\gamma_0 \geqslant 0$.

Лемма 4. *Справедливо включение* $\tau \subseteq \Lambda$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau$, а $P(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k$ — произвольный действительный многочлен. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ многочлен $Q(t) = \varepsilon + [P(t)]^2$ положителен на всей вещественной оси и по определению множества τ должно выполняться равенство

$$0 \leqslant \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(\gamma * Q) = \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}\left(\varepsilon\gamma_0 + \sum_{k,j=0}^{n} \gamma_{k+j} x_k x_j t^{k+j}\right) \leqslant \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(Q) = 0.$$

Как известно [10, с. 545], из $\gamma \in \tau$ следует $\gamma_k \neq 0$ для любого $k \geqslant 0$. Поэтому $(\gamma * Q)(0) = (\varepsilon + x_0^2)\gamma_0 > 0$ и из полученного равенства $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(\gamma * Q) = 0$

непосредственно находим $(\gamma * Q)(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^1$. В частности,

$$(\gamma * Q)(1) = \varepsilon\gamma_0 + \sum_{k,j=0}^{n} \gamma_{k+j} x_k x_j > 0,$$

откуда предельным переходом по $\varepsilon \downarrow 0$ убеждаемся в ненегативности последовательности γ. Лемма доказана.

Из включений $\frac{1}{\alpha_+} \setminus \Lambda \subseteq \frac{1}{\alpha_+} \setminus \tau$ (лемма 4), $\frac{1}{\alpha_+} \setminus \Lambda \subseteq \frac{1}{\alpha_+} \setminus \lambda([a, b])$ (включения (3)) и лемм 2, 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Выполняются следующие соотношения*: а) $\frac{1}{\alpha_+} \setminus \tau \neq \varnothing$; б) $\lambda([0, 1]) \setminus \frac{1}{\alpha_+} \neq \varnothing$; в) $\frac{1}{\alpha_+} \setminus \lambda([a, b]) \neq \varnothing \quad \forall -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Рассмотрим множество τ_+ тех последовательностей из τ, каждый член которых положителен. Так как $\frac{1}{\tau} \subseteq \alpha$ [10, с. 544], то $\frac{1}{\tau_+} \subseteq \alpha_+$ и в силу теоремы 1 включение здесь строгое

$$\tau_+ \subset \frac{1}{\alpha_+}. \tag{4}$$

Соотношение (4) дает отрицательный ответ на вопрос Л. Илиева из монографии [3, с. 120] (проблема 4.8) о справедливости включения $\alpha \subseteq \frac{1}{\tau}$.

2. Работа [10] содержит следующий результат.

Предложение 1 [10, с. 545] (теорема 2.1). *Если* $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} \in \alpha$ *и* $\gamma_k \neq 0$ *для всех* $k \geqslant 0$, *то для любого действительного многочлена* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\gamma_k} x^k\right) \leqslant \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(f).$$

Из предложения 1 следовало бы $\frac{1}{\alpha_+} = \tau_+$, а это противоречит (4). Поэтому справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Предложение* 1 *неверно*.

Утверждение предложения 1 было анонсировано в [10] в качестве решения известной проблемы С. Карлина [4, с. 382] о характеризации последовательностей из множества τ, а затем доказано и использовано для получения различных следствий в работах [11—13]. Следствие 1 показывает, что проблема Карлина остается нерешенной и основные результаты работ [10—13] неверны.

В работе [14] (см. также [15, с. 190]) приведена формулировка доказанного в [16] следующего результата.

Предложение 2 [14, с. 88] (теорема 3). *Если* $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty} \in \lambda$ *и* $\mu_k \neq 0$ *для всех* $k \geqslant 0$, *то* $\left\{\frac{1}{\mu_k}\right\}_{k=0}^{\infty} \in \alpha$.

Из предложения 2 следовало бы, в частности, что $\lambda([0, 1]) \subseteq \frac{1}{\alpha_+}$, а это противоречит утверждению теоремы 1.

Следствие 2. *Предложение* 2 *неверно*.

На основании предложений 1, 2 в [14], а также в [3, с. 121—122] (теоремы 4.613—15) выводится ряд утверждений, которые ввиду следствий 1, 2 неверны.

1. *Pólya G., Schur J.* Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen // J. reine und angew. Math.— 1914.— **144**.— P. 89—113.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехтеоретиздат, 1956.— 632 с.
3. *Iliev L.* Laguerre entire functions.— Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1987.— 187 p.
4. *Karlin S.* Total positivity.— Stanford: Stanford Univ. press, 1968.— Vol. 1.— 576 p.
5. *Lieb E. H., Sokal A. D.* A general Lee — Yang theorem for onecomponent and multicomponent ferromagnets // Communs Math. Phys.— 1981.— **80**.— P. 153—179.
6. *Козицкий Ю. В.* Иерархическая векторная модель ферромагнетика в методе коллективных переменных. Теорема Ли — Янга // Теорет. и мат. физика.— 1984.— **58**.— С. 96—108.
7. *Мельник Н. О.* Целые функции Легерра и меры, обладающие свойством Ли — Янга: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1990.— 17 с.
8. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.— М. : Гостехтеоретиздат, 1949.— 688 с.
9. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М. : Гостехтеоретиздат, 1961.—310 с.
10. *Craven T., Csordas G.* Zero-diminishing linear transformations // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— **80**, N 4.— P. 544—546.
11. *Craven T., Csordas G.* An inequality for the distribution of zeros of polynomials and entire functions // Pacif. J. Math.— 1981.— **95**, N 2.— P. 263—280.
12. *Craven T., Csordas G.* On the numer of real roots of polynomials // Ibid.— 1982.— **102**, N 1.— P. 15—28.
13. *Craven T., Csordas G.* Location of zeros. Part 1 : Real polynomials and entire functions // Ill. J. Math.— 1983.— **27**, N 2.— P. 244—278.
14. *Костова М., Касандрова И.* λ-редици и T-трансформации // Научни трудове. Математика. Пловд. унив.— 1982.— **20**, № 1.— С. 85—94.
15. *Костова М.* Някои свойства на λ-редиците // Год. ВУЗ. Прил. математика.— 1976.— **12**, № 2.— С. 187—194.
16. *Костова М.* Въерху разпределението на нулите на някои класи полиноми и цели функции. Дисертация.— София, 1975.

Получено 02.10.91