УДК 517.4

Ю. Н. Беспалов, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями

Решена задача унитарной классификации наборов операторов $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$ в гильбертовом пространстве, связанных некоторыми дополнительными соотношениями. Такие наборы возникают при изучении представлений широкого класса $*$-алгебр, в том числе двупараметрических деформаций U (su (2)), построенных Е. К. Скляниным.

Розв'язана задача унітарної класифікації наборів операторів $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$ в гільбертовому просторі, зв'язаних деякими додатковими співвідношеннями. Такі набори виникають при вивченні зображень широкого класу $*$-алгебр, в тому числі двопараметричних деформацій U (su (2)), побудованих Є. К. Скляніним.

Хорошо известно описание с точностью до унитарной эквивалентности пар ортопроекторов в гильбертовом пространстве (см., например, [1]). Сформулируем этот результат для пары самосопряженных корней из единицы.

Лемма 1. *Пара ограниченных операторов $R_i = R_i^*$, $R_i^2 = I$, $i = 0, 1$, в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H однозначно представляется в виде*

$$R_i = (\bigoplus_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 = \pm 1} \varepsilon_i I) \oplus \left(\int R((-1)^i \varphi) \otimes dE(\varphi)\right), \quad i = 0, 1, \tag{1}$$

относительно соответствующего разложения пространства H, где E — разложение единицы, сосредоточенное на открытом интервале $(0; \pi/2)$,

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

© Ю. Н. БЕСПАЛОВ, 1992

С другой стороны, известно, что задача унитарной классификации троек ортопроекторов, даже если два из них взаимно ортогональны, дикая, т. е. существует тройка, порождающая C^*-алгебру не типа I [2, 3].

Мы решаем задачи унитарной классификации наборов ортопроекторов P_i (или, что то же самое, самосопряженных корней из единичного оператора $R_i = I - 2P_i$), связанных дополнительными соотношениями, например, линейными. Такие наборы естественно возникают при изучении $*$-представлений алгебр Склянина (в работе [4]), других классов $*$-алгебр с соотношениями второго порядка (в настоящей работе).

Рассмотрим квадратичную $*$-алгебру

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I, \quad n \geqslant 2, \tag{2}$$

с самосопряженными образующими $x_i = x_i^*$, где идеал I порожден линейно независимыми некоммутативными полиномами

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_i x_j, \quad k = \overline{1, N}, \quad N = n(n-1)/2$$

(количество соотношений выбрано такое же как и в алгебре многочленов $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / (x_i x_j - x_j x_i;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n)$). Задать представление такой алгебры в гильбертовом пространстве H — значит сопоставить образующим x_i ограниченные самосопряженные операторы X_i, удовлетворяющие соотношениям $p_k(X_1, \ldots, X_n) = 0$. Для того, чтобы I был $*$-идеалом, естественно требовать $a_{ij}^{(k)} = \overline{a_{ji}^{(k)}}$. Будем рассматривать случай «симметричных» соотношений: $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \in \mathbb{R}$. В этой ситуации каждая матрица $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$ преобразованием $A_k \mapsto {}^tT_k A_k T_k$, $T_k \in GL_n(\mathbb{R})$ приводится к диагональному виду. Таким образом можно выбрать некоторые линейные комбинации образующих $y_l = y_l^*$, $l = \overline{0, M-1}$, $N \leqslant M \leqslant nN$ такие, что

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=0}^{M-1} b_l^{(k)} y_l^2, \quad b_l^{(k)} \in \mathbb{R}$$

(неравенство $M < N$ противоречит линейной независимости p_k). В случае $M = N$ в пространстве соотношений $\langle p_k(x_1, \ldots, x_N) = 0,\ k = \overline{1, N}\rangle$ можно выбрать тривиальный базис $y_l^2 = 0$, $l = \overline{0, N-1}$. Нас будет интересовать следующий по сложности случай $M = N + 1$, когда соотношения удается переписать так: $y_0^2/c_0 = y_1^2/c_1 = \ldots = y_N^2/c_N$. (Равенство $c_l = 0$ для некоторого l будет означать $y_l^2 = 0$.) Далее полагаем, что все $c_l = 0$, поскольку в противном случае задача сводится к изучению представлений алгебры с меньшим числом образующих. Элемент алгебры $z = y_l^2/c_l$ коммутирует со всеми y_l. Т. е. если y_l порождают всю алгебру, то z принадлежит ее центру и при неприводимых представлениях является скалярным оператором cI. Если $c = 0$, то имеем тривиальное одномерное представление. Иначе $cc_l > 0$, и, выбирая новые образующие $r_l = y_l/\sqrt{cc_l}$, получаем

$$\mathcal{A}/(z - c) \simeq \tilde{\mathcal{A}} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbb{C}\langle r_0, \ldots, r_N\rangle \Big/ \Big(r_l^2 - 1,\ l = \overline{0, N};\ \sum_{l=0}^{N} \alpha_l^{(k)} r_l,\ k = \overline{0, N-n}\Big), \tag{3}$$
$$\alpha_l^{(k)} \in \mathbb{R}.$$

В п. 1 показано, что в случае «общего положения» коэффициентов $\alpha_l^{(k)}$ неприводимые представления алгебры $\tilde{\mathcal{A}}$, а значит и алгебры $\mathcal{A}$, имеют размерность не более чем 2. Каждое представление однозначно раскладывается в прямой интеграл неприводимых.

Аналогично можно рассмотреть алгебру $\mathcal{A}'$ заданную, как и в (2), с тем лишь отличием, что идеал, по которому проводится факторизация, порожден, вообще говоря, неоднородными полиномами

$$p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_i + a^{(k)}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \in \mathbb{R},$$

$$a_i^{(k)},\ a^{(k)} \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Далее точно так же выделяется случай, когда фактор-алгебра $\mathcal{A}'$ по идеалу, порожденному неким центральным элементом, изоморфна следующей $*$-алгебре с самосопряженными образующими:

$$\widetilde{\mathcal{A}}' = \mathbb{C}\langle r_0, \dots, r_N\rangle / \left(r_l^2 - 1,\ l = \overline{0, N},\ \sum_{l=0}^{N} \alpha_l^{(k)} r_l - h^{(k)},\ k = \overline{0, N-n}\right),$$

$$\alpha_l^{(k)},\ h^{(k)} \in \mathbb{R}.$$

(При $h^{(k)} = 0$ получаем алгебру вида (3).)

В п. 2 решается задача унитарной классификации $*$-представлений алгебр $\widetilde{\mathcal{A}}'$ при $n = 3$, т. е. описываются четверки операторов $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$, $i = \overline{0, 3}$, связанных соотношением

$$\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 = hI, \quad \alpha_i,\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Результаты п. 2 анонсированы в [5].

Следующий класс алгебр, у которых $N + 1$ самосопряженных образующих r_i связаны $N(N-1)/2$ линейно независимыми билинейными антисимметричными соотношениями, обобщает алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}'$, ($N \in \mathbb{N}$):

$$\widetilde{\mathcal{A}}'' = \mathbb{C}\langle r_0, \dots, r_N\rangle / \left(r_l^2 - 1,\ l = \overline{0, N};\ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant N} \alpha_{ij}^{(k)} [r_i, r_j],\ k = \overline{1, N(N-1)/2}\right). \tag{5}$$

Действительно, пусть $N = n(n-1)/2$, $\sum_{l=0}^{N} \alpha_l^{(k)} r_l$, $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, N-n}$ — линейно независимые линейные комбинации r_l. Тогда среди антисимметричных соотношений $\left[r_l, \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^{(k)} r_i\right] = 0$, $l = \overline{0, N}$, $k = \overline{0, N-n}$, означающих, что $\sum_{l=0}^{N} \alpha_l^{(k)} r_l$ принадлежат центру алгебры с образующими r_l, в точности $N(N-1)/2$ линейно независимых, а остальные — их следствия. Таким образом, алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}'$ получается из алгебры вида (5) с описанными выше антисимметричными соотношениями после факторизации по идеалу, порожденному центральными элементами $\sum_{l=0}^{N} \alpha_l^{(k)} r_l - h^{(k)}$.

В п. 3 показано, что в случае общего положения коэффициентов $\alpha_{ij}^{(k)}$ неприводимые $*$-представления алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}''$ имеют размерность не более чем 2.

В [6, 7] построено и изучалось двупараметрическое семейство $*$-алгебр

$$\Lambda(J_{23}, J_{31}, J_{12}) = \mathbb{C}\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle / (i[S_0, S_\alpha] + J_{\beta\gamma}\{S_\beta, S_\gamma\}, \tag{6}$$

$$i[S_\alpha, S_\beta] + \{S_0, S_\gamma\}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}),$$

$$J_{\beta\gamma} \in \mathbb{R}, \quad J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12} J_{23} J_{31} = 0 \tag{7}$$

($\{a, b\} = ab + ba$ — антикоммутатор) с самосопряженными образующими, являющееся деформацией $\mathbb{Z}$-градуированной формы универсальной обертывающей алгебры $U(\mathrm{su}(2))$. В [4] построено другое семейство $*$-алгебр

$$\widetilde{\Lambda}(J_{23}, J_{31}, J_{12}) = \mathbb{C}\langle r_0, r_1, r_2, r_3\rangle / (r_l^2 - 1, \quad l = \overline{0, 3};\ (1 - J_{\beta\gamma})([r_0, r_\beta] -$$

$-[r_\alpha, r_\gamma])+(1+J_{\beta\gamma})([r_0, r_\gamma]-[r_\alpha, r_\beta]), (\alpha, \beta, \gamma)\in\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}), r_l^*=r_l$ (8)

и показано, что задачи унитарной классификации $*$-представлений для обоих семейств сводятся одна к другой. Алгебра $\tilde{\Lambda}$ (J_{23}, J_{31}, J_{12}) имеет вид (5). Однако она не находится в «общем положении» в смысле п. 3. Задача описания $*$-представлений алгебр (6) и (8) при всех значениях параметров $J_{\alpha\beta}$ не решена. Во второй части п. 3 кратко рассмотрены случаи, когда удается дать полную унитарную классификацию неприводимых представлений алгебры (8) либо доказать «дикость» соответствующей задачи.

1. Рассмотрим $*$-алгебру $\tilde{\mathcal{A}}$, определенную равенством (3) с дополнительными ограничениями на коэффициенты $\alpha_l^{(k)}$: 1) для любого $K\subset\subset\{0, 1, ..., N\}$, $\# K = N+1-n$ матрица $(\alpha_l^{(k)})_{l\in K}^{k=\overline{0,N-n}}$ невырождена, т. е. соотношения $\sum_{l=0}^{N}\alpha_l^{(k)}r_l=0$ можно переписать так:

$$r_k=\sum_{k'\in K'}\beta_{k'}^k(K)\,r_{k'},\quad \beta_{k'}^k(K)\in\mathbb{R},\quad K'=\{0, 1, ..., N\}\setminus K,\quad k\in K;\qquad (9)$$

2) для любого $k_0'\in K'$ матрица

$$(\beta_{k_1'}^k(K)\,\beta_{k_2'}^k(K))_{k_1',k_2'\in K'\setminus\{k_0'\},\,k_1'<k_2'}^{k\in K}$$

невырождена. (В случае $n=3$ эти ограничения означают, что коэффициенты $\alpha_l^{(1)}$, $l=\overline{0,3}$, ненулевые.)

Лемма 2. *В алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$ с коэффициентами $\alpha_l^{(k)}$, удовлетворяющими условиям* 1, 2, *для любых $i, j\in\{0, 1, ..., N\}$, $i\neq j$, элемент $\{r_i, r_j\}$ принадлежит центру.*

Доказательство. Возьмем K такое, что $\{i, j, k\}\subset K'$. Возводя обе части (9) в квадрат, получаем

$$\sum_{k_1',k_2'\in K',\,k_1'<k_2'}\beta_{k_1'}^k(K)\,\beta_{k_2'}^k(K)\{r_{k_1'}, r_{k_2'}\}=1-\sum_{k'\in M'}(\beta_{k'}^k(K))^2.$$

Учитывая условие 2, антикоммутатор $\{r_i, r_j\}$ можно выразить как линейную комбинацию антикоммутаторов, содержащих r_k:

$$\{r_i, r_j\}=\sum_{k'\in K'\setminus\{k\}}\gamma_{k'}\{r_k, r_{k'}\}+\gamma,\quad \gamma_{k'},\quad \gamma\in\mathbb{R}.$$

Прокоммутировав обе части с r_k, с учетом $[r_k, \{r_k, r_{k'}\}]=0$ получим $[\{r_i, r_j\}, r_k]=0$.

Если алгебру $\tilde{\mathcal{A}}$ профакторизовать по идеалу, порожденному элементами $\{r_i, r_j\}-c_{ij}$, $c_{ij}\in\mathbb{R}$, $0\leqslant i<j\leqslant N$, то полученная алгебра будет конечномерной. Таким образом, если выполнены ограничения 1, 2, то все неприводимые представления $\mathcal{A}$ конечномерны.

Теорема 1. *Неприводимые $*$-представления алгебр $\tilde{\mathcal{A}}$ с коэффициентами $\alpha_l^{(k)}$, удовлетворяющими условиям* 1, 2, *имеют размерность не более чем* 2.

Доказательство. Пусть R_l — оператор, соответствующий образующей r_l. Разложим пространство H в прямую сумму двух собственных подпространств оператора R_0, тогда с учетом того, что $R_l^2=I$, $\{R_i, R_j\}$ — скалярные операторы, все операторы, соответствующие образующим, будут иметь блочную структуру

$$R_l=\begin{pmatrix} I\cos\varphi_l & U\sin\varphi_l\\ U\sin\varphi_l & -I\cos\varphi_l\end{pmatrix},$$

где U — унитарный оператор, отождествляющий два собственных подпространства, если хотя бы один угол $\varphi_l \notin \pi\mathbb{Z}$, и нулевой — в противном случае.

2. В качестве примера рассмотрим семейство $*$-алгебр

$$\mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3\rangle/(ax_\alpha^2 - \{x_\beta, x_\gamma\} + 2(b - ab_\alpha)x_\alpha + 2b_\gamma x_\beta + 2b_\beta x_\gamma + c_\alpha), \quad (10)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}; \qquad a, b, a_i, b_1, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

с самосопряженными образующими. Выбирая новые образующие $x_i \quad + b_i$, получаем $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Если, кроме того, $a \neq 2$, то соотношения, порождающие идеал, можно представить в виде

$$((a-1)x_1 + x_2 + x_3 + b)^2 + (a-2)c_1 = (x_1 + (a-1)x_2 + x_3 + b)^2 + \\ + (a-2)c_2 = (x_1 + x_2 + (a-1)x_3 + b)^2 + (a-2)c_3 = ((a^2 - a + 1)\times \\ \times (x_1 + x_2 + x_3 + (2a-1)b/(a^2 - a + 1))^2 + (a-2)(c_1 + c_2 + c_3) + \\ + a(a-2)^2 b^2/(a^2 - a + 1))/(a+1).$$

(При $a = -1$ первые два равенства сохраняются, кроме того, нужно приравнять нулю числитель в последнем выражении.) Таким образом, задача описания представлений алгебры (10) сводится к классификации четверок корней из единицы, удовлетворяющих (4).

Опишем неприводимые четвертки R_i, связанные соотношением (4). Рассмотрим операторы $A_1 = \alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1$, $A_2 = \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3$. Спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 содержится во множестве $\Delta_1 = [||\alpha_0| - |\alpha_1||, |\alpha_0| + |\alpha_1|] \cup [-(|\alpha_0| + |\alpha_1|), -||\alpha_0| - |\alpha_1||]$. Действительно, если пару R_0, R_1 представить в виде (1), то

$$A_1 = \Big(\bigoplus_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 = \pm 1} (\alpha_0\varepsilon_0 + \alpha_1\varepsilon_1)\Big) \oplus \left(\int A_1(\varphi) \otimes dE(\varphi)\right),$$

где $A_1(\varphi) = \alpha_0 R(\varphi) + \alpha_1 R(-\varphi)$.

Поскольку $\operatorname{tr} A_1(\varphi) = 0$, то $\sigma(A_1(\varphi))$ состоит из двух точек $\pm\sqrt{-\det A_1(\varphi)} = \pm\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1)^2 \cos^2\varphi + (\alpha_0 - \alpha_1)^2 \sin^2\varphi}$. Если φ изменяется в пределах $0 < \varphi < \pi/2$, число $\sqrt{-\det A_1(\varphi)}$ пробегает открытый интервал $(||\alpha_0| - |\alpha_1||, |\alpha_0| + |\alpha_1|)$. Аналогично

$$\sigma(A_2) \subset \Delta_2 = [||\alpha_2| - |\alpha_3||, |\alpha_2| + |\alpha_3|] \cup [-(|\alpha_2| + |\alpha_3|), -||\alpha_2| - |\alpha_3||].$$

Введем отображения $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_i(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in \partial\Delta_i; \\ -t, & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus \partial\Delta_i, \end{cases}$$

где $\partial\Delta_i$ — граница множества Δ_i, $i = 1, 2$.

Лемма 3. *Имеется взаимно однозначное соответствие между классами унитарной эквивалентности пар операторов $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$, $i = 0, 1$, и пар операторов $A_1 = A_1^*$, $U_1 = U_1^* = U_1^{-1}$, связанных соотношением $A_1 U_1 = U_1 f_1(A_1)$, удовлетворяющих дополнительным ограничениям $\sigma(A_1) \subset \Delta_1$, $U_1 \restriction E_{A_1}(\partial\Delta_1) H = I$, где E_{A_1} — разложение единицы оператора A_1. Соответствие сохраняет неприводимость, разложения в прямой интеграл неприводимых.*

Доказательство. Оператор A_1 был определен выше. Положим

$$U_1 = \Big(\bigoplus_{\varepsilon_0, \varepsilon_1 = \pm 1} u_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) I\Big) \oplus \left(\int U_1(\varphi) \otimes dE(\varphi)\right),$$

где $U_1(\varphi) = ((\alpha_0 + \alpha_1 \cos 2\varphi) R(-\varphi) - (\alpha_0 \cos 2\varphi + \alpha_1) R(\varphi))/(\sin 2\varphi \times \times \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_1 \cos 2\varphi})$,

$$u(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{если } \varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 = 0; \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $U_1(\varphi) = U_1^*(\varphi) = U_1(\varphi)^{-1}$, $\{A_1(\varphi), U_1(\varphi)\} = 0$. Операторы $R(\pm\varphi)$ линейно выражаются через $A_1(\varphi), U_1(\varphi)$, поскольку

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -(\alpha_0\cos 2\varphi + \alpha_1) & \alpha_0 + \alpha_1\cos 2\varphi \end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos 2\varphi > 0.$$

Числа ε_0, ε_1 также восстанавливаются по $\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1$ и $u(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$.

Аналогично R_2, R_3 заменяем на A_2, U_2. В силу соотношения $A_1 + A_2 = hI$ оба оператора A_1, A_2 выражаются через оператор $A = (A_1 - A_2)/2$. Выполнены коммутационные соотношения

$$AU_1 = U_1(f_1(A + hI/2) - hI/2), \quad AU_2 = U_2(f_2(A - hI/2) + hI/2).$$

Рассмотрим действие ψ группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle s_1, s_2 | s_1^2 = s_2^2 = e\rangle$ на $\mathbb{R}$, заданное на образующих:

$$\psi(s_1): t \mapsto f_1(t + h/2) - h/2, \quad \varphi(s_2): t \mapsto f_2(t - h/2) + h/2.$$

Теорема 2. *Существует сюръективное отображение множества классов унитарной эквивалентности неприводимых наборов операторов $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$, $i = \overline{0, 3}$, удовлетворяющих соотношению* (4), *на множество орбит действия ψ, содержащихся в $(\Delta_1 - h/2) \cap (\Delta_2 + h/2)$. Все такие орбиты конечны. При этом орбите, не содержащей точек $\pm h/2$, отвечает одно неприводимое представление; орбите, содержащей одну из этих точек,— два (обе эти точки не могут принадлежать одной орбите). Размерность неприводимого представления равна мощности соответствующей орбиты.*

Доказательство. Наряду с действием ψ рассмотрим действие ψ_0, заданное на образующих группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ по правилу

$$\psi_0(s_1): t \mapsto -h - t, \quad \psi_0(s_2): t \mapsto h - t.$$

Орбиты действия ψ_0 удобно представлять в виде двусторонних последовательностей $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $t_i \neq \pm h/2$ таких, что

$$t_{i+1} = \begin{cases} \psi_0(s_1)(t_i), & \text{если } i \text{ четно;} \\ \psi_0(s_2)(t_i), & \text{если } i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

При этом $|t_i - t_{i+2}| = 2h$. Кроме того, имеются две орбиты, которые можно записать в виде односторонних последовательностей

$$\{h/2,\ \psi_0(s_1)(h/2) = -3h/2,\quad \psi_0(s_2)(-3h/2) = 5h/2, \ldots\},$$
$$\{-h/2,\ \psi_0(s_2)(-h/2) = 3h/2,\quad \psi_0(s_1)(3h/2) = -5h/2, \ldots\}.$$

Орбиты действия ψ либо совпадают с орбитами ψ_0, либо являются их подмножествами вида $\{t_i | n_1 < i < n_2\}$; $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. При этом «соседние» точки t_i, $t_{i+1} = \psi_0(s)(t_i)$ ($s = s_1$ или s_2) орбиты ψ_0 принадлежат разным орбитам ψ тогда и только тогда, когда t_i, t_{i+1} — неподвижные точки $\psi(s)$.

Действие ψ обладает измеримым сечением (борелевским множеством, содержащим в точности по одному представителю каждой орбиты). Оно получается, если к измеримому сечению $[-|h|/2, |h|/2]$ действия ψ_0 добавить конечное число элементов орбит действия ψ, пересекающихся с $(\partial\Delta_1 - h/2) \cup (\partial\Delta_2 + h/2)$. Поэтому (см., например, [8, 9]) для неприводимого набора A, U_1, U_2 спектр оператора A сосредоточен на орбите действия ψ. В силу ограничения $\sigma(A) \subset (\Delta_1 - h/2) \cap (\Delta_2 + h/2)$ это могут быть лишь конечные «отрезки»

$$\{t_i / n_1 \leqslant i \leqslant n_2\}; \qquad t_{n_1},\ t_{n_2} \in (\partial\Delta_1 - h/2) \cup (\partial\Delta_2 + h/2) \cup \{\pm h/2\}$$

орбит ψ_0.

Для неприводимых наборов $\sigma(A)$ имеет постоянную кратность (это всегда так в случае действия группы на спектре оператора, см. [8]). Пусть $t \in \sigma(A)$, St_t — стабилизатор точки t при действии ψ, $\pi(\mathrm{St}_t)$ — его образ при представлении $\pi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathfrak{B}(H)$, $\pi(s_1) = U_1$, $\pi(s_2) = U_2$. В силу того, что $U_1 \restriction E_A(\partial\Delta_1 - h/2) H = I$, $U_2 \restriction E_A(\partial\Delta_2 + h/2) H = I$, все операторы из $\pi(\mathrm{St}_t) \restriction E(\{t\}) H$ коммутируют, а значит, $\sigma(A)$ для неприводимых наборов однократен. В случае $\pm h/2 \notin \sigma(A)$ неприводимый набор полностью восстанавливается по $\sigma(A)$. В случае, когда, например, $-h/2 \in \sigma(A)$, нужно учесть две возможности $U_1 \restriction E_A(\{-h/2\}) H = \pm I$.

Пример. Описание орбит φ из $(\Delta_1 - h/2) \cap (\Delta_2 + h/2)$ при различных α_i, h сводится к простому, но громоздкому перечислению. Поэтому ограничимся случаем $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $h > 0$. К нему сводится задача классификации представлений $*$-алгебры

$$\mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3\rangle/(\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = x_1, \quad \{x_3, x_1\} = x_2), \quad x_i^* = x_i, \quad (11)$$

получающейся, если в (10) положить $a = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $b = 1/2$. Алгебра (11) является $\mathbb{Z}$-градуированным аналогом $U(\mathrm{su}(2))$. Другим способом ее представления описывались в [10]. В [4] устанавливается связь между представлениями алгебры (11) и $U(\mathrm{su}(2))$. Итак, в рассматриваемом случае $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = [-2, 2]$, $\partial\Delta = \{\pm 2\}$

$$(\Delta - h/2) \cap (\Delta + h/2) = \begin{cases} \varnothing, & h > 4; \\ [-2 + h/2;\ 2 - h/2], & 0 < h \leqslant 4. \end{cases}$$

Орбиты, содержащиеся в $[-2 + h/2,\ 2 - h/2]$, в точности следующие: 1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $h = 2/n$ по две орбиты мощности n, одна из которых содержит точку $h/2$, другая — точку $-h/2$; 2) для каждого $n \in 2\mathbb{N} - 1$ и $h = 4/n$ по одной орбите мощности n, не содержащей точек $\pm h/2$. Каждой орбите первого типа соответствует по два неприводимых представления, орбитам второго типа — по одному.

3. Частный случай следующей теоремы содержится в работе [4].

Теорема 3. *Если для всех $l = \overline{0, N}$ матрица*

$$(\alpha_{ij}^{(k)})_{0 \leqslant i < j \leqslant N;\, i, j \neq l}^{k = \overline{1, N(N-1)/2}}$$

из коэффициентов, содержащихся в (5), *невырождена, то образующие алгебры $\tilde{\mathcal{A}}''$ удовлетворяют соотношениям $r_i r_j r_k = r_k r_j r_i$. Неприводимые $*$-представления алгебры $\tilde{\mathcal{A}}''$ в этом случае не более чем двумерны.*

Доказательство. Зафиксируем $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. Взяв антикоммутатор r_k с каждым из $N(N-1)/2$ антисимметричных соотношений с учетом того, что $\{[x, r_k], r_k\} = 0$ для любого элемента x, получим систему из $N(N-1)/2$ однородных линейных уравнений с невырожденной матрицей, связывающих $N(N-1)/2$ элементов $\{[r_i, r_j], r_k\}$, $0 \leqslant i < j \leqslant N$; $i, j \neq k$. Отсюда $\{[r_i, r_j], r_k\} = 0$. Из трех соотношений $\{[r_i, r_j], r_k\} = \{[r_j, r_k], r_i\} = \{[r_k, r_i], r_j\} = 0$ получаем $r_i r_j r_k = r_k r_j r_i$. Выберем новые образующие $r = r_0$ и попарно коммутирующие унитарные $u_i = r_0 r_i$, $i = \overline{1, N}$, связанные соотношениями $r u_i = u_i^{-1} r$. Совместный спектр унитарных операторов, соответствующих образующим u_i, однократный, одно- или двухточечный.

Пример. Пусть антисимметричные соотношения из (5) имеют вид

$$\Big[\sum_{i=0}^{N} \alpha_i^{(k)} r_i,\ \sum_{j=0}^{N} \alpha_j^{(l)} r_j\Big] = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant N} \alpha_{ij}^{(kl)} [r_i, r_j] = 0,$$

$$\alpha_{ij}^{(kl)} = \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(l)} - \alpha_j^{(k)} \alpha_i^{(l)}, \quad 1 \leqslant k < l \leqslant N,$$

где $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i^{(k)} r_i$, $k = \overline{1, N}$, — линейно независимые линейные комбинации образующих. Тогда для любого $m \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$\det(\alpha_{ij}^{(kl)})_{0 \leqslant i < j \leqslant N;\, i, j \neq m}^{1 \leqslant k < l \leqslant N} = \pm (\det(\alpha_i^{(k)})_{0 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m}^{1 \leqslant k \leqslant N})^{N-1}.$$

(Обе части равенства одинаково ведут себя при элементарных преобразованиях матрицы, определитель которой фигурирует в правой части. Равенство легко проверяется, когда эта матрица диагональна.) Таким образом, теорема

3 применима в случае, когда все матрицы

$$(\alpha_i^{(k)})_{0\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}^{1\leqslant k\leqslant N}$$

невырождены.

Для алгебры $\widetilde{\Lambda}(J_{23}, J_{31}, J_{12})$ условия теоремы 3 на коэффициенты есть в точности отрицание условия (7). Ниже отмечены случаи, когда условие (7) выполнено и удается либо получить полную унитарную классификацию $*$-представлений, либо доказать «дикость» такой задачи. Представления алгебры (6) в случаях 1, 2 изучены в [4], в случае 3 — в [11]. Для операторов $R_l = R_l^* = R_l^{-1}$, $l = \overline{0, 3}$, в которые при представлении переходят образующие r_l, выписываем антисимметричные соотношения из (8).

1) $J_{12} = 1$, $J_{23} = J$, $J_{31} = -1$ (для удобства считаем $J \neq \pm 1$):

$$(1 - J)[R_0, R_2] = (1 - J)[R_3, R_1] = (1 + J)[R_3, R_0] = \\ = (1 + J)[R_0, R_2].$$

При этом операторы $\{R_0, R_1\}$, $\{R_2, R_3\}$ коммутируют, а операторы $[R_0, R_2]$, $[R_3, R_1]$, $[R_3, R_0]$, $[R_0, R_2]$ антикоммутируют со всеми R_i, т. е. при изучении неприводимых представлений можно считать первые скалярными, вторые — либо нулевыми, либо пропорциональными

$$\begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Во втором случае

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos\Phi_i & \sin\Phi_i \\ \sin\Phi_i & -\cos\Phi_i \end{pmatrix}$$

где $\Phi_i = \Phi_i^*$, $\sigma(\Phi_i) \subset [0; 2\pi]$. После этого несложно найти возможный вид операторов Φ_i.

2) $J_{12} = -1$, $J_{23} = J$, $J_{31} = 1$:

$$[R_0, R_1] = [R_2, R_3] = 0, \quad [R_0 - R_1, R_2 + R_3] = J[R_0 + R_1, R_2 - R_3].$$

Для описания представлений можно использовать аналоги соотношений для алгебры (6), приведенных в [4].

3) $J_{23} = 0$, $J_{31} = -J_{12} = J$ (алгебра (6) при $J > 0$, $J \neq 1$ есть $\mathbb{Z}$-градуированная форма квантовой деформации $U_q(\mathrm{su}(2))$, $q = (1 - \sqrt{J})/(1 + \sqrt{J})$):

$$[R_0 - R_1, R_2 + R_3] = 0,$$

$$[R_0 + R_1, ((R_0 - R_1) - (R_2 + R_3)) + J((R_0 - R_1) + (R_2 + R_3))] = 0,$$

$$[R_2 - R_3, ((R_0 - R_1) - (R_2 + R_3)) - J((R_0 - R_1) + (R_2 + R_3))] = 0.$$

Оператор $((R_0 - R_1) - (R_2 + R_3))^2 - J((R_0 - R_1) + (R_2 + R_3))^2$ коммутирует со всеми R_i, т. е. можно считать его скалярным. Рассмотрим случай $J = -\mathrm{tg}^2\varphi < 0$. Тогда

$$(R_0 - R_1) - (R_2 + R_3) = 2a\sin\varphi\cos\Phi, \quad (R_0 - R_1) + (R_2 + R_3) = 2a\cos\varphi\sin\Phi,$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\Phi = \Phi^*$, $\sigma(\Phi) \subset [0; 2\pi]$, $R_0 - R_1 = a\sin(\Phi + \varphi I)$, $R_2 + R_3 = a\sin(\Phi - \varphi I)$, $[R_0 + R_1, \cos(\Phi + \varphi I)] = 0$, $[R_2 - R_3, \cos(\Phi - \varphi I)] = 0$. Два последних соотношения означают, что задача свелась к описанию орбит действия $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 + s_2^2 = e\rangle$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : s_1 : t \mapsto 2\varphi - t$, $s_2 : t \mapsto -2\varphi - t$. В частности, при $\varphi \notin \pi\mathbb{Q}$ задача унитарной классификации представлений становится «дикой»: мера Лебега эргодична, инвариантна, но не сосредоточена на орбите; имеется набор R_i, порождающий C^*-алгебру не типа I.

4) Интересно рассмотреть предельный случай, когда $J_{23} = \infty$, $J_{31} = J$, $J_{21} = -J^{-1}$ (соотношения, в которых содержится J_{23}, поделим на J_{23} и положим $J_{23}^{-1} = 0$). Заметим, что алгебры $\Lambda(0, J, -J)$ и $\Lambda(\infty, J, -J^{-1})$

неизоморфны. И, кроме того, способ вычисления представлений первой, предложенный в [11], не подходит для второй. Однако $\tilde{\Lambda}(0, J, -J) \tilde{\to} \tilde{\Lambda}(\infty, J, -J^{-1})$ $(r_0 \mapsto r_2, r_1 \mapsto r_3, r_2 \mapsto r_0, r_3 \mapsto r_1)$. Таким образом, вместо того, чтобы изучать представления двух различных алгебр, достаточно рассматривать одну.

1. *Halmos P.* Two sabspaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— **144**.— P. 381—389.
2. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил.— 1980.— **14**, вып. 1.— С. 60—62.
3. *Беспалов Ю. Н., Самойленко Ю. С.* Алгебраические операторы и пары самосопряженных операторов, связанных полиномиальным соотношением // Там же.— 1991.— **25**, вып. 4.— С. 72—74.
4. *Беспалов Ю. Н.* О самосопряженных представлениях алгебр Склянина // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 11.— С. 1567—1574.
5. *Беспалов Ю. Н.* Представления некоторых инволютивных алгебр // XV всесоюз. шк. по теории операторов в функцион. пространствах: Тез. докл.— Ульяновск, 1990.— С. 37.
6. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— **16**, вып. 4.— С. 27—34.
7. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. Представления квантовой алгебры // Там же.— 1983.— **17**, вып. 4.— С. 34—48.
8. *Макки Дж.* Представления групп в гильбертовом пространстве // Математические проблемы релятивистской физики / И. Сигал.— М. : Мир, 1986.— С. 165—189.
9. *Вайслеб Э. Е., Самойленко Ю. С.* Представления операторных соотношений неограниченными операторами и многомерные динамические системы // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 8.— С. 1011—1019.
10. *Городний М. Ф., Подколзин Г. Б.* Неприводимые представления градуированной алгебры Ли // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 66—77.
11. *Вайслеб Э. Е.* Бесконечномерные *-представления алгебры Склянина в вырожденном случае (квантовой алгебры U_q (sl (2)) // Методы функционального анализа в задачах математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 50—62.

Получено 20.11.91