УДК 517.94

М. К. Бугир, канд. физ.-мат. наук (Терноп. ин-т нар. хоз-ва)

Исследование свойств неколеблемости решений уравнений с частными производными методом разделения переменных

Методом разделения переменных исследуются определения колеблемости решений уравнений в частных производных; изучается некорректная краевая задача для полигармонического уравнения четвертого порядка, когда краевые условия задаются на двух вложенных друг в друга прямоугольниках, устанавливаются оценки условной устойчивости и регуляризации.

Методом розподілу змінних досліджується визначення коливальності розв'язків рівнянь з частинними похідними; вивчається некоректна крайова задача для полігармонічного рівняння четвертого порядку, коли крайові умови задаються на двох вкладених один в одного прямокутниках; встановлюються оцінки умовної стійкості і регуляризації.

1. При решении различных практических задач встречаются математические модели уравнений в частных производных в областях, позволяющих разделить переменные. Как правило, при этом имеется возможность исследовать свойства уравнений в частных производных через аналогичные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, их неколеблемость, которая обеспечивает единственность решения некоторых краевых задач. В отличие от скалярных уравнений, для уравнений с част-

ными производными, в основном эллиптического типа, исследованию колеблемости посвящено мало работ, как правило для второго порядка.

Важной задачей при изучении осцилляционных свойств уравнений в частных производных является наиболее естественное определение колеблемости решений, которое хорошо согласуется с определением колеблемости для обыкновенных дифференциальных уравнений, с порядком уравнений и по возможности слабо зависит от типа уравнения. С этой целью в уравнениях (Лапласа и волновом на плоскости) разделим переменные и изучим полученные обыкновенные уравнения, симметрично зависящие от вспомогательного параметра k.

В частности, например, для уравнения Лапласа в разделенной системе уравнений

$$X'' + kX = 0,$$
$$Y'' - kY = 0 \tag{1}$$

при любом действительном значении параметра k одно из уравнений неколеблющееся. Рассмотрим решение (1)

$$u(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_{1k} \sin \lambda_k x + c_{2k} \cos \lambda_k x) \operatorname{sh} (\lambda_k y + \omega), \tag{2}$$

где λ_k — собственное значение некоторой краевой задачи. По переменной x имеем бесконечное число нулей, по y не более одного, следовательно, не существует замкнутой линии в области, на которой решение уравнений Лапласа обращается в нуль. Такая интерпретация указывает, что наиболее естественным определением колеблемости для уравнений эллиптического типа

$$L_2 u = 0 \tag{3}$$

является определение из [1, 2].

Определение 1. *Решение $u(x)$ уравнения (7) назовем колеблющимся в области D, если существует замкнутая линия $\Gamma \subset D$, на которой $u(x)$ обращается в нуль. В дальнейшем такие линии будем называть узловыми.*

Очевидно, неколеблемость обеспечивает единственность задачи Дирихле. При таком определении выбор начала координат не играет существенной роли, так как при существовании замкнутой узловой линии в области E^2 прямая линия пересечет ее по крайней мере в двух точках в любом направлении, т. е. определение колеблемости инвариантно относительно поворота координат. Такая интерпретация колеблемости указывает на неточность определения колеблемости в работах [3, 4], когда колеблющимся названо решение уравнения (3), имеющее бесконечную последовательность нулей в области $E_r = \{x : |x| \geqslant r,\ r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\}$ при любом r. В рассматриваемом случае решение (2) имеет такую последовательность нулей по переменной x, хотя уравнение Лапласа неколеблющееся. На наш взгляд, в этом случае более точным будет следующее определение.

Определение 2. *Решение $u(x)$ уравнения (3) будем называть колеблющимся в пространстве E^n, если для любого r функция*

$$M_r[u(x),\ P_0] = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int \ldots \int_{S_r} u(x) ds \tag{4}$$

колеблющаяся в области E_r, где S_r — сфера радиуса r с центром в точке P_0, ω_n — площадь n-мерной единичной сферы.

Функция (4) играет важную роль при изучении осцилляционных свойств уравнений эллиптического типа с оператором Лапласа в главной части, особенно высших порядков. Это существенно, потому что для обыкновенных дифференциальных уравнений колеблемость решений по краевым нулям не отображает общей картины. Так, уравнение $y^{\mathrm{IV}} + p^2 y = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $y(a) = y(b) =$

$= 0 = y'(a) = y'(b)$, хотя все его решения имеют на полуоси бесконечную последовательность нулей. Для соответствующего уравнения эллиптического типа указанная задача представляет собой задачу Дирихле

$$u(x)|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0 \tag{5}$$

и определение колеблемости, связанное с краевой задачей (5), будет иметь ограниченное применение. В дальнейшем ограничимся уравнением 4-го порядка

$$\Delta^2 u + c_1 \Delta u + c_2 u = 0. \tag{6}$$

Определение 3. *Решение уравнений* (6) *будем называть колеблющимся в области D, если существуют две непересекающиеся замкнутые линии Γ_1 и Γ_2, ограничивающие области D_1 и D_2, такие, что $D_1 \subset D_2$,*

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \; u|_{\Gamma_2} = 0, \tag{7}$$

и неколеблющимся—в противном случае.

В случае, когда переменные разделяются, это определение эквивалентно колеблемости по всем направлениям координат.

Замечание 1. Определение 3 наиболее естественно для уравнений высших порядков, так как в нем учитывается порядок уравнений (оно легко обобщается на произвольный порядок), и согласуется с определением колеблемости для обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку краевая задача (7) превращается в четырехточечную, имеющую единственное решение для неколеблющихся уравнений [5].

Более сложен случай, когда рассматривается колеблемость решений для волнового уравнения, которые удовлетворяют системе уравнений

$$X'' - kX = 0, \; T'' - a^2 kT = 0 \tag{8}$$

и колеблются при $k < 0$ и не колеблются при $k > 0$, т. е. имеют одновременно колеблющиеся и неколеблющиеся решения, поэтому следует рассматривать свойства колеблемости решений, удовлетворяющих дополнительным условиям: смешаной задаче, Коши и т. п.

Замечание 2. Функцию (4) можно рассматривать как преобразование Радона [6] в эвклидовом пространстве, которое обобщается на пространства с постоянной кривизной, поэтому вместо уравнений (3), (6) можно рассматривать уравнения в частных производных с оператором Лапласа — Бельтрами в главной части. К таким уравнениям, в частности, будут принадлежать уравнения гиперболического типа, если рассмотреть пространство постоянной отрицательной кривизны, как в работе [7].

2. С помощью метода разделения переменных исследуем уравнение (6), которое будет неколеблющимся тогда и только тогда, когда корни уравнения

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0 \tag{9}$$

удовлетворяют неравенствам [7]

$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0. \tag{10}$$

Для этого используем представление решения уравнения (6) в виде

$$u = u_1 + u_2, \tag{11}$$

где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — решения уравнений

$$\Delta u_1 - \lambda_1 u_1 = 0, \; \Delta u_2 - \lambda_2 u_2 = 0, \tag{12}$$

если корни λ_1 и λ_2 уравнения (9) разные и

$$u = u_1 + r \frac{\partial u_2}{\partial n}, \tag{13}$$

когда λ_0 — кратный корень. В этом случае в зависимости от вида области вместо r можно положить x или y, $\partial u/\partial n \to \partial u/\partial x$ или $\partial u/\partial y$.

В силу представлений решений уравнения (6) в форме (11) или (13) более детально исследуем уравнение Гельмгольца

$$\Delta u - \lambda u = 0 \tag{14}$$

в прямоугольнике $D = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$. Разделенные решения удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{cases} X'' + kX = 0, \\ Y'' - (\lambda + k) Y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} X'' - (\lambda + k) X = 0, \\ Y'' + kY = 0, \end{cases} \tag{15}$$

которые при выполнении условий (10) неколеблющиеся при любых значениях параметра k: если $k > 0$, то неколеблющееся второе уравнение первой системы уравнений (15), $k < 0$ — первое, $k = 0$ — оба. Задача Дирихле в прямоугольнике D расщепляется на двухточечные с параметром

$$x(0) = A_0(y),\ X(a) = A(y);\ y(0) = B_0(x),\ y(b) = B(x),$$

причем одна пара из них всегда имеет единственное решение из-за неколеблемости соответствующего уравнения (15). Например, если $k > 0$, то определитель двухточечной задачи

$$\Delta(0,\ \tau) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sh}\sqrt{\lambda + k}\tau & \operatorname{ch}\sqrt{\lambda + k}\tau \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, $\tau \neq 0$.

Рассмотрим решение уравнения (14)

$$u(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A_k(y) \sin\frac{k\pi}{a} x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k B_k(x) \sin\frac{k\pi}{b} y, \tag{16}$$

которое можно рассматривать как решение системы уравнений (15), разложенное в ряд Фурье по синусам (отвечающее краевым условиям $X(0) = X(a) = 0 = Y(0) = Y(b)$), $A_k(y)$ и $B_k(x)$ — общие решения второго уравнения первой системы (15) и соответственно первого уравнения второй системы (15) (формулы имеют аналогичную структуру с заменой x на y, a на b)

$$A_k(y) = A_{1k} \operatorname{sh}\sqrt{\lambda + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} y + A_{2k} \operatorname{sh}\sqrt{\lambda + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} y. \tag{17}$$

Коэффициенты $a_k A_{1k}$ и $a_k A_{2k}$ определяются единственным образом из соотношения

$$a_k A_k(y) = c_k = 2/a \int_0^a \varphi(x,\ y) \sin\frac{k\pi}{a} x dx,$$

c_k — коэффициенты Фурье. Для функций $B_k(x)$ рассуждения аналогичны.

Из приведенных для уравнения Гельмгольца рассуждений следует, что решение краевой задачи

$$u(x,\ y)|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x,\ y);\ u(x,\ y)|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x,\ y) \tag{18}$$

можно записать следующим образом:

$$u(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k^1 A_k^1(y) + a_k^2 A_k^2(y)] \sin\frac{k\pi}{a} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} [b_k^1 B_k^1(x) + b_k^2 B_k^2(x)] \sin\frac{k\pi}{b} y. \tag{19}$$

Для определения коэффициентов a_k^i, b_k^i следует разложить краевые условия по синусам и найти решение соответствующей четырехточечной задачи по y, x. Определитель алгебраической системы уравнений имеет вид (не ограничивая общности, рассмотрим первую сумму решения (19))

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{m_1 b_1} & e^{-m_1 b_1} & e^{m_2 b_1} & e^{-m_2 b_1} \\ e^{m_1 b_2} & e^{-m_1 b_2} & e^{m_2 b_2} & e^{-m_2 b_2} \\ e^{m_1 b_3} & e^{-m_1 b_3} & e^{m_2 b_3} & e^{-m_2 b_3} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

$0 < b_1 < b_2 < b_3 \leqslant b$, $m_i = \sqrt{\lambda_i > (k\pi/a)^2}$, $i = 1, 2$. Определитель Δ_k отличен от нуля, поэтому задача (6), (18) имеет не более одного решения. Кроме того, при больших k Δ_k близок к нулю и задача в общем случае становится некорректной. Рассмотрим случай, когда расстояние между точками b_i одинаково, тогда Δ_k является определителем Вандермонда

$$\Delta_k = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} (e^{\lambda_i b} - e^{\lambda_j b}), \ \lambda = \operatorname{col}(m_1, -m_1, m_2, -m_2);$$

$$\min | e^{\lambda_i b} - e^{\lambda_j b} | = | e^{-m_1 b} - e^{-m_2 b} | = e^{-m_1 b} | 1 - e^{(m_1 - m_2) b} | =$$

$$= e^{-m_1 b} \left| 1 - \exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_1 + m_2} \right] \right|;$$

$$| \Delta_k | > e^{-4 m_1 b} \left| 1 - \exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_1 + m_2} \right] \right|.$$

Отсюда для определителя Δ_k имеем оценку

$$| \Delta_k | > C \cdot e^{-kd}. \tag{21}$$

Из приведенных выше рассуждений следует такая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются неравенства*

$$| a_k^i (b_k^i) | < C e^{-kd}, \tag{22}$$

где c и d — положительные константы, тогда задача (6), (18) *имеет единственное решение в классе аналитических функций.*

Лемма 1. *Если корни уравнения* (9) *кратные, то частные решения уравнения* (6) *имеют вид*

$$v_1 = x \cdot \sin \sqrt{k} x \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda + k} y, \ v_2 = y \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda + k} x \cdot \sin \sqrt{k} y. \tag{23}$$

Утверждение леммы следует из представления уравнения (6) в виде системы уравнений

$$\begin{gathered} \Delta v - \lambda_1 v = v_2, \\ \Delta v_1 - \lambda_2 v_1 = 0 \end{gathered} \tag{24}$$

и представления решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения в случае кратных характеристических корней или проверяется непосредственно.

Из леммы следует, что если λ — кратный корень уравнения (9), то квадратные скобки в формуле (19) перепишутся так: $[(a_k^1 + a_k^2 y) \ A_k(y)]$, определитель системы алгебраических уравнений Δ_k отличен от нуля для любого k, а в случае равноудаленных точек имеем определитель Вандермонда, следовательно, справедлива та же оценка и то же утверждение, что и в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Замечание 3. При исследовании задачи (6), (18) на устойчивость удобнее рассматривать решение уравнения (24_1), удовлетворяющее условию $u|_{\Gamma_2} = 0$. Такими будут, например, решения (19), если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и

$$\begin{gathered} A_k^1(y) = \operatorname{sh} m_2 y \cdot \operatorname{sh} m_1 b - \operatorname{sh} m_2 b \cdot \operatorname{sh} m_1 y; \\ A_k^2(y) = [\operatorname{ch} m_1 y - \operatorname{ch} m_2 y] \operatorname{sh} m_1 b - [\operatorname{ch} m_1 b - \operatorname{ch} m_2 b] \operatorname{sh} m_1 y. \end{gathered} \tag{25}$$

Аналогичные формулы справедливы и для кратного корня λ_0 уравнения (9).

3. Исследуем на устойчивость решения (19) с условиями (25) при $\lambda_1 \neq \neq \lambda_2$, что не ограничивает общности задачи вследствие того, что из формы записи уравнения (6) в виде системы уравнений (24) решение представляется следующим образом:

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y), \tag{26}$$

где v_1 удовлетворяет соответствующему однородному уравнению (24_1), а v_2 — неоднородному уравнению (24_1) и условию $v_2(x, y)|_{\Gamma_*} = 0$. Тогда краевая задача (18) распадается на две: $v_1/|_{\Gamma_2} = \varphi_2$, которая всегда имеет единственное решение из-за неколеблемости первого уравнения (12), а для v_2 получим задачу на двух контурах $v_2|_{\Gamma_2} = 0$, $v_2|_{\Gamma_1} = \varphi_1 - u_1|_{\Gamma_1}$. Исследуем на условную устойчивость [8] решение $u(x, y)$ в классах $L_2(0, a)$ и $L_2(0, b)$, используя для этого частное решение (19). Предположим, что точки деления прямоугольников выбраны так, что системы тригонометрических функций $\left\{\sin\frac{k\pi}{a}x\right\}$, $\left\{\sin\frac{k\pi}{b}y\right\}$ ортогональны соответственно на отрезках (a_1, a_2), (b_1, b_2). Для этого достаточно, к примеру, подобрать точки a_i и b_i кратными a и b.

Теорема 2. *Если выполняются оценки*

$$\frac{2}{a}\int_0^a u^2(x, y_i)\,dx < \varepsilon_1^2; \quad \frac{2}{b}\int_0^b u^2(x_i, y)\,dy < \varepsilon_1^2, \quad i = 0,3, \tag{27}$$

$$\frac{2}{a_2 - a_1}\int_{a_1}^{a_2} u^2(x, y_i)\,dx < \varepsilon_2^2; \quad \frac{2}{b_2 - b_1}\int_{b_1}^{b_2} u^2(x_i, y)\,dy < \varepsilon_2^2, \ i = 1,2, \tag{28}$$

$$\frac{2}{a}\int_0^a v^2(x, b)\,dx \leqslant M^2; \quad \frac{2}{b}\int_0^b v^2(a, y)\,dy \leqslant M^2, \tag{29}$$

где $v(x, y)$ — частное решение (24_1), то справедливы оценки

$$\left[\frac{2}{a}\int_0^a u^2(x, y)\,dx\right]^{1/2} \leqslant 2\varepsilon_1 + \max_{\substack{i=1,2\\0\leqslant k<\infty}}\left|\frac{\Delta_2^i}{\Delta_i}A_k^1(y) + \frac{\Delta_2^i}{\Delta_i}A_k^2(y)\right|;$$

$$\left[\frac{2}{b}\int_0^b u^2(x, y)\,dy\right]^{1/2} \leqslant 2\varepsilon_1 + \max_{\substack{i=1,2\\0\leqslant k<\infty}}\left[\frac{\Delta_1^i}{\Delta_i}B_k^1(x) + \frac{\Delta_2^i}{\Delta_i}B_k^2(x)\right], \tag{30}$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} A_k^1(y_i) & A_k^2(y_i) \\ A_k^1(y_3) & A_k^2(y_3) \end{vmatrix}, \quad i = 1,2,$$

$$\Delta_1^i = \begin{vmatrix} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} & A_k^2(y_i) \\ M & A_k^2(y_3) \end{vmatrix}; \quad \Delta_2^i = \begin{vmatrix} A_k^1(y_i) & \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \\ A_k^1(y_3) & M \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Доказательство. Из представления решения в виде (26), неколеблемости уравнения Гельмгольца (12_1), $u_1(x, y) \geqslant 0$ следует

$$\frac{2}{a}\int_0^a u_1^2(x, y_3)\,dx \leqslant \varepsilon_1^2, \tag{32}$$

а из принципа максимума следует, что (32) верно для всех $0 \leqslant y \leqslant y_3 = b$, $v = u - u_1$. Отсюда $v^2 \leqslant 2(u^2 + u_1^2)$, и в прямоугольнике, ограниченном линией Γ_1, выполняется неравенство

$$\frac{2}{a_2 - a_1}\int_{a_1}^{a_2} v^2(x, y)\,dx \leqslant 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \tag{33}$$

Ввиду принципа максимума неравенство достигается на границе, т. е. $y = y_1$ или y_2. Используя ортогональность функций $\sin \frac{k\pi}{a} x$ и неравенство Минковского, неравенство (33) на интервале (a_1, a_2) можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k^1 A_k^1 (y_i) + a_k^2 A_k^2 (y_i)]^2 \leqslant 2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \tag{34}$$

Используя первое неравенство (29), по аналогии запишем

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k^1 A_k^1 (b) + a_k^2 A_k^2 (b)]^2 \leqslant M^2. \tag{35}$$

В результате получим задачу математического программирования: подобрать a_k^1, a_k^2 так, чтобы они удовлетворяли неравенствам (34) и (35), а функция (19) достигала максимума. Используя условия оптимальности задачи, найдем $\bar{k}$ такое, что $A_{\bar{k}}^i \neq 0$, так как решение должно быть базисным. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_k^1 A_k^1 (y_i) + a_k^2 A_k^2 (y_i) &= \sqrt{2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}, \\ a_k^1 A_k^1 (b) + a_k^2 A_k^2 (b) &= M \end{aligned} \tag{36}$$

с решением $a_k^1 = \Delta_1^i / \Delta_i$, $a_k^2 = \Delta_2^i / \Delta_i$.

Аналогично доказывается второе неравенство (30). Как видно из доказательства, утверждение будет верно и для кратного корня.

Регуляризирующий оператор R_n для задачи (6), (18) состоит из первых n членов ряда (19). Используя оценки (22), можно получить оценки приближенного решения краевой задачи (6), (18), если краевые условия заданы приближенно.

1. *Елементи* якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними / О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробагатько.— К. : Наук. думка 1972.— 175 с.
2. *Swanson C. A.* Comparison and oscillation theory of linear differential equations.— New York London : Acad Press, 1968.— 284 p.
3. *Noussour E. S., Swanson C. A.* Oscillation theory for semilinear sherodinger equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A.— 1975/76.— 75.— P. 67—81.
4. *Kitamura I., Kusano T.* Nonlinear oscillation of a fourth order elliptic equations // J. Different. Equat.— 1978.— 30, N 2.— P. 280—286.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
6. *Хелгасон С.* Преобразование Радона.— М. : Мир, 1983.— 150 с.
7. *Бугир М. К.* О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений в пространстве постоянной кривизны // Дифференц. уравнения.— 1990.— 28 № 11.— С. 1956—1961.
8. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.— М. : Наука, 1980.— 286 с.

Получено 24.04.91