УДК 517.512

С. Б. Вакарчук, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т геотехн. механики АН Украины, Днепропетровск)

О поперечниках некоторых классов аналитических функций. I

Во введенных В. И. Смирновым пространствах аналитических функций $E_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, где Ω — конечная односвязная область плоскости $\mathbb{C}$ с достаточно гладкой границей γ, получены порядковые оценки некоторых поперечников классов $W^rE_p(\Omega)$ ($p \geqslant 1$, r — натуральное число $\geqslant 2$) при несовпадающих p и q.

У введених В. І. Смірновим просторах аналітичних функцій $E_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, де Ω— скінченна однозв'язна область площини $\mathbb{C}$ з достатньо гладкою межею γ, одержані порядкові оцінки деяких поперечників класів $W^rE_p(\Omega)$ ($p \geqslant 1$, r — натуральне число $\geqslant 2$) при незбіжних p і q.

Вычисление поперечников функциональных классов в несовпадающих метриках является одной из важных задач теории аппроксимации [1]. В пространствах Харди для определенных классов аналитических функций конкретные результаты получены, например, в [2]. Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена нахождению в пространствах, введенных В. И. Смирновым [3], точных порядковых оценок колмогоровских, линейных, александровских и бернштейновских поперечников некоторых функциональных множеств.

1. Приведем необходимые понятия и определения. Всюду далее Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой замкнутой кривой γ, причем дополнением к $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma$ служит односвязная область G, содержащая точку $z = \infty$.

Пусть $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z(s) = x(s) + iy(s),\ 0 \leqslant s \leqslant l,\ z(0) = z(l)\}$, где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на γ, l — длина гладкой кривой γ; $\theta(s)$ — угол между касательной к γ в точке $z(s)$ и положительным направлением оси OX; $\omega(\theta, t)$ — модуль непрерывности функции $\theta(s)$. Если для γ выполнено условие $\int\limits_0^c t^{-1}\omega(\theta, t)\,|\ln t|\,dt < \infty$ или $\int\limits_0^c t^{-1}\omega(\theta, t)\,dt < \infty$, где c — произвольное положительное число, то будем говорить, что кривая принадлежит соответственно классу Γ_* или Γ [4].

Назовем γ кривой Ляпунова с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, если функция $\theta(s)$ принадлежит классу Липшица $\mathrm{Lip}\,\alpha$ [5]. В случаях, когда конкретизировать α нет необходимости, γ будем называть просто кривой Ляпунова. Очевидно, что если $\gamma \in \Gamma_*$, то $\gamma \in \Gamma$, а кривая Ляпунова одновременно является элементом Γ и Γ_* [6].

Пусть $w = \varphi(z)$ — функция, которая конформно и однолистно отображает G на область $|w| > 1$ при условиях $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z)/z = \nu > 0$, $\varphi(\infty) = \infty$. Под $z = \psi(w)$ будем понимать функцию, обратную к $w = \varphi(z)$. Для $\gamma \in \Gamma$ [4, 6] функция $\psi^{(1)}(w)$ непрерывна и отлична от 0 в замкнутой области $|w| \geqslant 1$, причем существуют такие положительные константы c_j, $j = \overline{1, 4}$, зависящие от γ, что

$$0 < c_1 \leqslant |\psi^{(1)}(w)| \leqslant c_2 < \infty, \quad |w| \geqslant 1, \tag{1}$$

$$0 < c_3 \leqslant |(\psi(t) - \psi(w))/(t - w)| \leqslant c_4 < \infty, \quad |t| \geqslant 1, \quad |w| \geqslant 1. \tag{2}$$

Неравенства вида (1), (2) справедливы и для функции $\varphi(z)$, которая в области $\overline{G}$ также имеет непрерывную первую производную $\varphi^{(1)}(z)$.

Символом $E_p(\Omega)$ обозначим [3] пространство аналитических в Ω функций $f(z)$, для каждой из которых существует последовательность замкнутых спрямляемых жордановых кривых $\{\gamma_n\}$, расположенных внутри γ, сходящихся к ней и таких, что $\int\limits_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz|$ ($n \in \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) ограничены конечной величиной, не зависящей от n. Для $f(z) \in E_p(\Omega)$ почти всюду на γ существуют угловые граничные значения и $\lim \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| : n \to \infty \right\} = \int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz|$. При $p \geqslant 1$ $E_p(\Omega)$ — банахово пространство с нормой $\|f\|_{E_p} = \left\{ \int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p}$.

Если граница γ области Ω — кривая Ляпунова, то $f(z) \in E_p(\Omega)$, $p > 0$, разлагается в ряд Фабера $T(f, z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z)$ [7], сходящийся равномерно внутри Ω. Здесь $a_k = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-k-1} f[\psi(t)]\, dt$, $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — многочлены Фабера. Частную сумму первых $n+1$ членов ряда Фабера обозначим $T_n(f, z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$.

Под $W^r E_p(\Omega)$, где $r \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ будем понимать множество функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, r-е производные которых $f^{(r)}(z) = d^r f(z)/dz^r$ принадлежат $E_p(\Omega)$ и удовлетворяют условию $\|f^{(r)}\|_{E_p} \leqslant 1$.

Символом l_p^m, $p \geqslant 1$, обозначим m-мерное банахово пространство упорядоченных систем из m комплексных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с нормой $\|x\|_{l_p^m} = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} |x_j|^p \right\}^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$; $\|x\|_{l_\infty^m} = \max\{|x_j| : j = \overline{1, m}\}$. Полагаем также $\varepsilon B_p^m \overset{\text{def}}{=} \{x \in l_p^m : \|x\|_{l_p^m} \leqslant \varepsilon\}$, $B_p^m \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot B_p^m$.

Пусть X — банахово пространство, S — единичный шар в X, $L_n \subset X$ — подпространство размерности n, $\mathfrak{N} \subset X$ — центрально-симметричный выпуклый компакт. Тогда величины [8]

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{g \in L_n} \|f - g\|_X, \quad b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup_{L_n \subset X} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_n \subset \mathfrak{N}\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \inf_{\Lambda : X \to L_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - \Lambda(f)\|_X, \quad a_n(\mathfrak{N}, X) = \inf \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - U(f)\|_X$$

называют соответственно колмогоровским, бернштейновским, линейным и александровским n-поперечниками. При этом внутренний inf в определении δ_n берется по всем линейным операторам Λ, отображающим X в L_n, а внешний inf в определении d_n — по всем n-мерным комплексам K_n, лежащим в X, и всем непрерывным отображениям U из $\mathfrak{N}$ в K_n. Для указанных поперечников справедливы следующие неравенства:

$$a_n(\mathfrak{N}, X) \leqslant d_n(\mathfrak{N}, X) \leqslant \delta_n(\mathfrak{N}, X), \tag{3}$$

$$b_{n+1}(\mathfrak{N}, X) \leqslant 2a_n(\mathfrak{N}, X), \quad b_{n+1}(\mathfrak{N}, X) \leqslant d_n(\mathfrak{N}, X). \tag{4}$$

2. Докажем необходимые вспомогательные результаты. Для аналитической на множестве $|t| < 1$ функции $g(t)$, имеющей на $|t| = 1$ почти всюду угловые граничные значения, при условии $\int\limits_{|t|=1} |g(t)||\psi^{(1)}(t)||dt| < \infty$ существует интеграл типа Коши $f(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma} (t - z)^{-1} g[\varphi(t)]\, dt$, $z \in \Omega$, который является интегральным оператором Фабера $F_0 : g \to f$ для области Ω, т. е. $f(z) = (F_0 g)(z)$. Выражение вида $g(w) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} (t - w)^{-1} \times f[\psi(t)]\, dt$, $|w| < 1$, называют обратным оператором Фабера [7], который существует, если $\int\limits_{\gamma} |f(t)||\varphi^{(1)}(t)||dt| < \infty$, $g(w) = (F_0^{-1} f)(w)$.

Обозначим $F(t, w) = \psi^{(1)}(t)/(\psi(t) - \psi(w)) - 1/(t - w)$.

Утверждение 1. *Пусть граница γ области Ω является кривой Ляпунова с показателем 1. Тогда операторы F_0 и F_0^{-1}, преобразующие соответственно пространство Харди H_p в пространство $E_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$ и, наоборот, $E_p(\Omega)$ в H_p, имеют конечные нормы.*

Доказательство. Не уменьшая общности, рассмотрим оператор F_0 и запишем уравнение кривой γ в виде $z(s) = z(0) + i\int\limits_0^s e^{i\theta(\sigma)}d\sigma$, где длина дуги s отсчитывается от точки $z(0)$ при обходе γ в положительном направлении (против часовой стрелки). Поскольку $\theta(s) \in \mathrm{Lip}\,1$ и $|z^{(1)}(s_1) - z^{(1)}(s_2)| \leqslant |\theta(s_1) - \theta(s_2)|$, то $\gamma \in C_1^1 \subset C_\alpha^1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \mathrm{const}$, где C_α^m $(m \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leqslant 1)$ — класс кривых γ, у которых функции $z(s)$ непрерывно дифференцируемы m раз и $z^{(m)}(s)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Следовательно, $\psi^{(1)}(w) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ [5].

Из [7] имеем $\|F_0\| \leqslant \{\Psi_0(\gamma) + \Psi_1(\gamma)$, если $p=1$; $[\Psi_0(\gamma)]^{1/p} + \Psi_{p,q}(\gamma)$, если $1 < p < \infty$; $1 + \Psi_2(\gamma)$, если $p = \infty\}$, где $1/p + 1/q = 1$,

$$\Psi_0(\gamma) = \sup\{|\psi^{(1)}(w)| : |w| = 1\},$$

$$\Psi_1(\gamma) = \sup\left\{(2\pi)^{-1}\int\limits_{|w|=1} |F(t, w)||\psi^{(1)}(w)||dw| : |t| = 1\right\},$$

$$\Psi_2(\gamma) = \sup\left\{(2\pi)^{-1}\int\limits_{|t|=1} |F(t, w)||dt| : |w| = 1\right\},$$

$$\Psi_{p,q}(\gamma) = (2\pi)^{-1}\left\{\int\limits_\gamma\Big[\int\limits_{|t|=1} |F(t, \varphi(z))|^q |dt|\Big]^{p/q}|dz|\right\}^{1/p}.$$

Из (1) и [7] следует, что величины $\Psi_j(\gamma) < \infty$ для $j = 0, 1, 2$. Полагая $I_q = \int\limits_{|t|=1} |F(t, w)|^q |dt|$, из (3) и условия непрерывной дифференцируемости функции $\psi(w)$ запишем неравенство $I_q \leqslant c_3^{-1}\int\limits_{|t|=1} |t - w|^{-2q}|dt| \times \times \left|\int\limits_w^t [\psi^{(1)}(\tau) - \psi^{(1)}(t)]\,d\tau\right|^q$. Используя включение $\psi^{(1)}(w) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(1 - 1/q < \alpha < 1)$ и применяя ко внутреннему интегралу последнего соотношения неравенство Гельдера, для произвольного $w = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, получаем

$$c_3 I_q \leqslant \int\limits_{|t|=1} |t - w|^{q/p - 2q}|dt|\int\limits_w^t \omega^q(\psi^{(1)}, |t - \tau|)|d\tau| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} s^{-q}\omega^q(\psi^{(1)}, s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} s^{q(\alpha-1)}ds < \infty. \qquad (5)$$

Ограниченность величины $\Psi_{p,q}(\gamma)$ сразу следует из (5), это и завершает доказательство утверждения 1.

Замкнутую спрямляемую кривую γ с отображающей функцией $w = \varphi(z)$ называют кривой типа (α_*) [9], если для любых $z \in \gamma$ и $t \in \gamma_R$ выполняется неравенство $|\varphi(t) - \varphi(z)| \leqslant A|t - z|^{1/\alpha_*}$, где γ_R, $R > 1$, — линия уровня кривой γ, соответствующая окружности $|w| = R$; $1 \leqslant \alpha_* \leqslant 2$, A — некоторая постоянная.

Если кривая $\gamma \in \Gamma$, то $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| \leqslant \int\limits_{z_1}^{z_2} |\varphi^{(1)}(t)||dt| \leqslant c_2'|z_2 - z_1|$, где $z_1 \in \gamma$, $z_2 \in \gamma_R$, а это означает, что γ — кривая типа $(\alpha_* = 1)$. Используя данный факт и результаты из [9], получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть область Ω ограничена кривой Ляпунова* и $0 < p < p' \leqslant \infty$. *Тогда для произвольного полинома* $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ *справедливо неравенство*

$$\| p_n \|_{E_{p'}} \leqslant \left(\frac{l^2}{2\pi} \right)^{1/p-1/p'} \left(\frac{n}{A} \right)^{1/p-1/p'} \| p_n \|_{E_p}, \tag{6}$$

где A — абсолютная константа, зависящая лишь от свойств кривой γ.

Используя утверждение 1 и неравенство Бернштейна для полиномов в H_p [10], получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если $p_n(z)$—полином n-й степени и область Ω удовлетворяет условию утверждения 1, то при $p \geqslant 1$ и $r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство*

$$\| p_n^r(z) \|_{E_p} \leqslant B_{p,r}^{*} n(n-1)\dots(n-r+1) \| p_n(z) \|_{E_p}, \tag{7}$$

где $B_{p,r}^{*}$ — константа, зависящая от p и r.

Два следующих результата относятся к пространству Харди H_p, $p \geqslant 1$.

Утверждение 4 [11]. *Для произвольного полинома $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ справедливы неравенства*

$$\| p_n \|_{H_p} \leqslant A_p \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left| p_n \left(\exp \left(i \frac{2\pi j}{n+1} \right) \right) \right|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{8}$$

$$\| p_n \|_{H_p} \geqslant A_p' \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left| p_n \left(\exp \left(i \frac{2\pi j}{n+1} \right) \right) \right|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{9}$$

где A_p' и A_p— константы, не зависящие от n.

Используя теорему 7.28 [11] и ряд матричных неравенств [12], получаем следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть $p_n(z)$ — произвольный полином степени n. Тогда выполняются неравенства*

$$\| p_n \|_{H_\infty} \leqslant A^{*} \max \left\{ \left| p_n \left(\exp \left(i \frac{2\pi j}{n+1} \right) \right) \right| : j = \overline{0, n} \right\}, \tag{10}$$

$$(n+1) \| p_n \|_{H_1} \leqslant A_{*} \sum_{j=0}^{n} \left| p_n \left(\exp \left(i \frac{2\pi j}{n+1} \right) \right) \right|, \tag{11}$$

где константы A^* и A_* не зависят от n.

На основании утверждения 1 и теоремы Марцинкевича [8, с. 82] получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть область Ω удовлетворяет условиям утверждения 1 и $T_n(f, z)$ — частная сумма ряда Фабера аналитической в Ω функции $f(z)$. Тогда для нормы оператора $T_n : E_p(\Omega) \to E_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, справедливо неравенство*

$$\| T_n \| \leqslant C_p, \tag{12}$$

где константа C_p не зависит от n.

Приведем еще одно утверждение, объединяющее два результата, полученных С. Я. Альпером для $p > 1$ и $p = 1$ [4, 6].

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, принадлежащая $E_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$; Ω — односвязная конечная область, граница которой γ при $p > 1$ принадлежит классу Γ, а при $p = 1$ — классу Γ_*. Если $f^{(r)}(z) \in E_p(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$ и $\| f^{(r)} \|_{E_p} \leqslant M$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r$, существует многочлен $p_n(z)$ степени n такой, что*

$$\| f(z) - p_n(z) \|_{E_p} \leqslant A_{p,\gamma,r}^{*} M (n+1)^{-r}, \tag{13}$$

где константа $A_{p,\gamma,r}^{*}$ зависит от p, γ и r.

З а м е ч а н и е 1. Как следует из [6, 7], многочлены $p_n(z)$ из (13) при всех $p \geqslant 1$ являются результатом действия некоторого линейного оператора Λ_n, переводящего $E_p(\Omega)$ в подпространство Φ_{n+1} полиномов степени n с базисом $\Phi_k(z)$, $k = \overline{0, n}$.

3. Прежде чем перейти к изложению основных результатов, посвященных оценкам поперечников классов $W^r E_p(\Omega)$ в пространствах $E_q(\Omega)$ при несовпадающих p и q, докажем следующую лемму.

Л е м м а 2. *Пусть Ω — конечная односвязная область в $\mathbb{C}$, граница которой γ является кривой Ляпунова с показателем 1. Если $q \geqslant p \geqslant 1$ и натуральное $r > 1/p - 1/q$, то произвольная $f(z)$ из класса $W^r E_p(\Omega)$ принадлежит $E_q(\Omega)$ и при $n \geqslant r$ выполняется неравенство*

$$\| f - \Lambda_n(f) \|_{E_q} \leqslant \widetilde{C}_{p,q,\gamma} (n+1)^{-r+1/p-1/q}, \tag{14}$$

где $\widetilde{C}_{p,q,\gamma}$ — *константа, зависящая от p, q, γ; $\Lambda_n(f)$ определено в замечании* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 для произвольной f из $W^r E_p(\Omega)$ имеем $\| f - \Lambda_n(f) \|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому в смысле сходимости в пространстве $E_p(\Omega)$ функцию $f \in W^r E_p(\Omega)$ можно представить в виде

$$f(z) = \Lambda_n(f, z) + \sum_{k=0}^{\infty} [\Lambda_{2^{k+1}n}(f, z) - \Lambda_{2^k n}(f, z)]. \tag{15}$$

С учетом утверждения 3 имеем

$$\| \Lambda_{2^{k+1}n}(f) - \Lambda_{2^k n}(f) \|_{E_q} \leqslant C^*_{p,q,\gamma} (2^k n)^{1/p-1/q} \| f - \Lambda_{2^k n}(f) \|_{E_p}, \tag{16}$$

где $C^*_{p,q,\gamma}$ — константа, зависящая от p, q и γ.

Из неравенств (15), (16) получаем

$$\| f - \Lambda_n(f) \|_{E_q} \leqslant C^*_{p,q,\gamma} \Big\{ (n+1)^{1/p-1/q} \| f - \Lambda_n(f) \|_{E_p} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{1/p-1/q-1} \| f - \Lambda_k(f) \|_{E_p} \Big\}. \tag{17}$$

В заключение доказательства отметим, что принадлежность $f(z)$ пространству $E_q(\Omega)$ и соотношение (14) непосредственно следуют из неравенств (13) и (17).

Пусть $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_k$, $k = 0, 1, \ldots,$ — подмножества нормированного пространства X. Символ $\mathfrak{N} \subset \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{N}_k$ означает [13], что для любого элемента $f \in \mathfrak{N}$ найдется бесконечный набор элементов $f_k \in \mathfrak{N}_k$, $k = 0, 1, \ldots,$ таких, что $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, где сходимость понимается в смысле нормы X. Из доказательства леммы 2 вытекает следующее замечание.

З а м е ч а н и е 2. Справедливо соотношение $W^r E_p(\Omega) \subset \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$, где $Q_k = \{ f \in \Phi_{2^k r+1} : \| f \|_{E_p} \leqslant C (2^k r + 1)^{-r} \}$, C — абсолютная константа.

Пусть $\{\nu_n\}$ и $\{\mu_n\}$ — две положительные числовые последовательности. Тогда выражение $\nu_n \asymp \mu_n$ означает, что $0 < \inf(\nu_n/\mu_n) \leqslant \sup(\nu_n/\mu_n) < \infty$.

Т е о р е м а 1. *Если область Ω и ее граница γ удовлетворяют условиям леммы 2, то для натуральных $n \geqslant r \geqslant 2$ справедливы соотношения*

$$d_n(W^r E_p(\Omega), \quad E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & 1 \leqslant q \leqslant p, \quad 2 \leqslant p \leqslant q; \\ n^{-r+1/p-1/2}, & p \leqslant 2 \leqslant q; \\ n^{-r+1/p-1/q}, & p \leqslant q \leqslant 2, \end{cases}$$

$$\delta_n(W^rE_p(\Omega),\quad E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & 1\leqslant q\leqslant p;\\ n^{-r+1/p-1/q}, & p\leqslant q\leqslant 2,\quad 2\leqslant p\leqslant q;\\ n^{-r+1/p-1/2}, & p\leqslant 2\leqslant q \quad (p'\geqslant q);\\ n^{-r+1/2-1/q}, & p\leqslant 2\leqslant q \quad (p'\leqslant q),\end{cases}$$

$$a_n(W^rE_p(\Omega),\quad E_q(\Omega))\asymp n^{-r},\quad 1\leqslant p,\quad q\leqslant\infty,$$

$$b_{n+1}(W^rE_p(\Omega),\ E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & 1\leqslant q\leqslant p\leqslant 2,\quad p\leqslant q;\\ n^{-r+1/p-1/2}, & q\leqslant 2\leqslant p;\\ n^{-r+1/p-1/q}, & 2\leqslant q\leqslant p,\end{cases}$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство. Получим сначала оценки снизу для рассматриваемых поперечников функциональных классов. Пусть $1 < q < \infty$. Выберем $j \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы

$$4n\leqslant 2^j < 8n. \tag{18}$$

Обозначим $W^0X = \{f\in X : \|f\|_X\leqslant 1\}$. Из (7) и (12) с учетом замечания 1 при $n\geqslant r$ имеем

$$d_n(W^rE_p(\Omega), E_q(\Omega))\geqslant C_q^{-1}d_n(W^rE_p(\Omega)\cap\Phi_{2^j+1}, E_q(\Omega)\cap\Phi_{2^j+1})\geqslant$$
$$\geqslant\{C_q\|F_0^{-1}\|\}^{-1}2^{-jr}d_n(W^0H_p\cap\mathcal{P}_{2^j-r+1}, H_q\cap\mathcal{P}_{2^j-r+1}), \tag{19}$$

где $\mathcal{P}_k$, $k\in\mathbb{N}$, — подпространство полиномов степени $\leqslant n$ с базисом $\{z^j\}_{j=0}^n$.

Используя неравенства (8) — (11), получаем

$$d_n(W^rE_p(\Omega), E_q(\Omega))\geqslant C_{p,q,r}(2^j-r+1)^{-r+1/p-1/q}d_n(B_p^{2^j-r+1}, l_q^{2^j-r+1}). \tag{20}$$

На основании (18), (20) и результатов вычисления поперечников конечномерных множеств [14 — 17] получаем следующие оценки снизу: если $2\leqslant$ $\leqslant p\leqslant q$ или $1<q\leqslant p$, то $d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_q(\Omega))\geqslant C_1^*n^{-r}$; если $p\leqslant 2\leqslant q$, то $d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_q(\Omega))\geqslant C_2^*n^{-r+1/p-1/2}$; и, наконец, если $p\leqslant q\leqslant 2$, то $d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_q(\Omega))\geqslant C_3^*n^{-r+1/p-1/q}$. Здесь C_j^*, $j=1, 2, 3,$ — константы, зависящие от p, q, γ, r.

Пусть теперь $q=\infty$. Тогда при $p\geqslant 2$ $d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_\infty(\Omega))\geqslant$ $\geqslant d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_p(\Omega))\asymp n^{-r}$. Если же $p\leqslant 2$, то $d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_\infty(\Omega))\geqslant$ $\geqslant d_n(W^rE_p(\Omega),\ E_2(\Omega))$ и величина, содержащаяся в правой части последнего неравенства, оценивается согласно (20).

Рассмотрим случай $q=1$ и функции $f(z)\in E_1(\Omega)$ поставим в соответствие полином $V_k^n(f, z) = (n-k)^{-1}\{T_k(f,z)+T_{k+1}(f,z)+\ldots+T_{n-1}(f,z)\}$, где $n>k$, а $T_j(f,z)$ определены в п. 1. Очевидно, что $V_k^n(\Phi_k, z)\equiv\Phi_k(z)$.

Обозначим через $\widetilde{V}_k^n(t)$, $k<n$, ядро Валле Пуссена. Известно [18], что при $n-k\geqslant\varepsilon n$, где $\varepsilon>0$ — произвольное фиксированное число,

$$\|\widetilde{V}_k^n\|_{L[-\pi,\pi]}\leqslant 2\varepsilon^{-1}\pi. \tag{21}$$

Для $\varphi(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jz^j\in H_1$ полагаем $U_k^n(\varphi, z) = (n-k)^{-1}\{t_k(\varphi,z)+t_{k+1}(\varphi,$ $z)+\ldots+t_{n-1}(\varphi,z)\}$, $n>k$, где $t_m(\varphi,z)=\sum\limits_{j=0}^{m}c_jz^j$. Если $f(z)$ — образ $\varphi(z)$ при отображении $F_0: H_1\to E_1(\Omega)$, то в силу (20) и утверждения 1

$$\|V_k^n(f)\|_{E_1}\leqslant\|F_0\|\,\|U_k^n(\varphi)\|_{H_1}\leqslant\frac{1}{\pi}\|F_0\|\,\|\widetilde{V}_k^n\|_{L[-\pi,\pi]}\|\varphi\|_{H_1}\leqslant\lambda(\varepsilon)\|f\|_{E_1}, \tag{22}$$

где $\lambda(\varepsilon) = 2\varepsilon^{-1} \| F_0 \| \| F_0^{-1} \|$. Полагая $k = 2^j$, $n = 2^{j+1} - r + 2$, $\varepsilon = 2/3$, где j удовлетворяет условию (18), из (22) имеем

$$\Big\| \sum_{j=0}^{2^j} \beta_j \Phi_j(z) - f(z) \Big\|_{E_1} \geqslant \lambda^{-1}(2/3) \Big\| \sum_{k=0}^{2^j} \beta_k \Phi_k(z) - V_{2^j}^{2^{j+1}-r+2}(f, z) \Big\|_{E_1}. \quad (23)$$

Используя соотношение (23), подобно (19) получаем

$$d_n(W^r E_p(\Omega), E_1(\Omega)) \geqslant \alpha_r 2^{-jr} d_n(W^0 H_\infty \cap \mathcal{P}_{2^j - r+1}, H_1 \cap \mathcal{P}_{2(2^j - r+1)}), \quad (24)$$

где α_r — константа, зависящая от r. Оценка снизу $d_n(W^r E_p(\Omega), E_1(\Omega)) \geqslant \geqslant C_4^* n^{-r}$ следует из применения к (24) формул (9), (10) и результатов вычисления поперечников конечномерных множеств [15].

Оценки снизу линейных n-поперечников получены из следующих соображений. Во-первых, из неравенства $\delta_n \geqslant d_n$ следуют оценки для $1 \leqslant q \leqslant \leqslant p$, $p \leqslant q \leqslant 2$ и $p \leqslant 2 \leqslant q$ $(p' \geqslant q)$; во-вторых, случай $p \leqslant 2 \leqslant q$ $(p' \leqslant \leqslant q)$ в силу двойственности поперечников δ_n [16] сводится к $p \leqslant 2 \leqslant q$ $(p' \geqslant q)$; и, наконец, снова на основании двойственности оценка для $2 \leqslant \leqslant p \leqslant q$ следует из оценки для случая $q' \leqslant p' \leqslant 2$ $(1/q + 1/q' = 1)$.

Получение оценок снизу для поперечников $b_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega))$ удобно свести к вычислению величины $h_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) = = \inf \{\sup \{\| f^{(r)} \|_{E_p} / \| f \|_{E_q} : f \in L_{n+1}\} : L_{n+1} \subset E_q(\Omega), \dim L_{n+1} = n+1\}$, которую можно рассматривать как наименьшую константу в неравенстве Бернштейна — Никольского. При этом [19]

$$b_{n+1} = h_{n+1}^{-1}. \quad (25)$$

Используя неравенства (6), (7), утверждение 1 и соотношения (8)—(11), для $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ имеем

$$h_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \alpha_{r,p} \lambda(2) n^{-r} \inf_{L_{n+1} \subset H_q \cap \mathcal{P}_{2n+2}} \sup_{f \in L_{n+1}} \| f \|_{H_p} / \| f \|_{H_q} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{r,p,q} n^{r+1/q-1/p} h_{n+1}(B_p^{2n+2}, l_q^{2n+2}), \quad (26)$$

где $\alpha_{r,p,q}$ — константа, зависящая от нижних индексов.

Воспользовавшись результатом из [20, с. 184, 188], запишем соотношение, связывающее бернштейновские и колмогоровские поперечники конечномерных множеств

$$(b_{n+1}(B_p^N, l_q^N))^{-1} \asymp d_{N-n-1}(B_{p'}^N, l_{q'}^N), \quad N > n, \quad (27)$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Используя (25) — (27) и результаты из [14 — 17] по вычислению колмогоровских поперечников конечномерных множеств, получаем оценки для величин b_{n+1}, а именно: если $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$ или $p \geqslant q$, то $b_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \geqslant \tilde{c}_1 n^{-r}$; если $q \leqslant 2 \leqslant p$, то $b_{n+1} \geqslant \tilde{c}_2 n^{-r+1/p-1/2}$; и, наконец, если $2 \leqslant q \leqslant p$, то $b_{n+1} \geqslant \tilde{c}_3 n^{-r+1/p-1/q}$. Здесь $\tilde{c}_j$, $j = 1, 2, 3$,— константы, зависящие от p, q, r, γ.

Переходя к нахождению оценки снизу александровских поперечников отметим, что при $p \leqslant q$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$ из (5) следует $2a_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \geqslant \tilde{c}_1 n^{-r}$. Используя [21] и проводя цепочку преобразований, подобных (19) и (24), для остальных $p \geqslant q$ получаем $a_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \geqslant c_5 n^{-r}$.

Оценим сверху рассматриваемые поперечники. Из лемм 1 и 2 следует, что если $p \geqslant q$, то $\delta_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \beta_1 n^{-r}$; если же $p \leqslant q \leqslant$ или $2 \leqslant p \leqslant q$, то $\delta_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \beta_2 n^{-r+1/p-1/q}$. Здесь β_1, β_2—константы, зависящие от p, q, r. Из этих неравенств и (3), (4) получаем оценки для колмогоровских ($p \geqslant q$ и $p \leqslant q \leqslant 2$), александровских ($p \geqslant q$) и бернштейновских ($1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$) поперечников.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$. Используя замечание 2, лемму 1 и лемму В. Е. Майорова [13], находим

$$d_m(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r + 1)^{-r} d_{n_k}(W^0 E_p(\Omega) \cap \Phi_{2^k r+1},$$

$$E_q(\Omega) \cap \Phi_{2^k r+1}) \leqslant C \| F_0 \| \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r + 1)^{-r} d_{n_k}(W^0 H_p \cap \mathcal{P}_{2^k r+1}, H_q \cap \mathcal{P}_{2^k r+1}), \tag{28}$$

где n_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — произвольная последовательность целых неотрицательных чисел такая, что $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$; C — константа. На основании (8) и (10) из (28) имеем

$$d_m(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant C^* \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r + 1)^{1/p - r} d_{n_k}(B_2^{2^k r+1}, l_\infty^{2^k r+1}). \tag{29}$$

Полагая

$$n_k = \{2^k r + 1, \text{ если } k < [\log_2 n]; \ [2^{-kt} n^{1+t}], \text{ если } [\log_2 n] \leqslant k \leqslant [(1 + t^{-1}) \times \log_2 n]; \ 0, \text{ если } k > [(1 + t^{-1}) \log_2 n]\}, \tag{30}$$

где $[\cdot]$ — означает целую часть числа, имеем $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \leqslant [C_t] n$. Здесь C_t — некоторая константа, зависящая от фиксированного числа $t > 0$, выбор которого уточнен ниже. Подставляя n_k в (29) и используя [15], получаем

$$d_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant C_t^* \Big\{ n^{-(1+t)/2} \sum_{k=[\log_2 n]}^{[(1+t^{-1}) \log_2 n]} 2^{k(1/p - r + 1/2)} + \sum_{k=[(1+t^{-1}) \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{k(1/p - r)} \Big\}. \tag{31}$$

Полагая $t \in (0, r - 1/p)$ достаточно малым, из (31) имеем

$$d_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant c_{t,r,p,q} n^{-r + 1/p - 1/2}. \tag{32}$$

Если $2 \leqslant p \leqslant q$, то учитывая (32), получаем $d_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant d_n(W^r E_2(\Omega), E_\infty(\Omega)) \leqslant c_{t,r,2,\infty} n^{-r}$. Отсюда и из (4), (5) следуют оценки сверху поперечников a_n и b_{n+1}.

Поскольку для линейных поперечников справедлив аналог леммы [13], то на основании подобных рассуждений при $p \leqslant 2 \leqslant q$ $(p' \geqslant q)$ имеем $\delta_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \tilde{c}_{t,r,p,q} n^{-r+1/p-1/2}$. Используя это неравенство и двойственность поперечников δ_n [16], для $p \leqslant 2 \leqslant q$ $(p' \leqslant q)$ запишем $\delta_n(W^r \times E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \tilde{c}^*_{t,r,p,q} n^{-r+1/2-1/q}$.

Для оценки сверху величин $a_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega))$ в случае $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ и $p \leqslant 2 \leqslant q$ применим аналог леммы Майорова [13] для александровских поперечников. В результате получим соотношение вида (29), в котором d_k заменены на a_k. Подставляя в него числа n_k, определенные выше, и используя оценки поперечников конечномерных множеств [21], при фиксированном $t \in (0, r - 1/p)$ имеем $a_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant \beta_{t,r,p,q} n^{-r}$. Здесь $\beta_{t,r,p,q}$ — константа, зависящая от нижних индексов. Соотношение (4) и полученные для a_n результаты позволяют оценить сверху поперечники $b_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega))$ при $p \leqslant q$.

Для оценки сверху величин b_{n+1} при $q \leqslant 2 \leqslant p$ или $2 \leqslant q \leqslant p$ необходимо следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть X — банахово пространство, $W \subset X$, $W_k = \{f \in X : \|f\|_X \leqslant c_k\}$, $c_k = \text{const}$; n_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \leqslant m$. Тогда*

$$b_{m+1}(W, X) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} b_{n_k+1}(W, X). \qquad (32')$$

Действительно, из определения sup следует, что для произвольного $\nu > 0$ существует подпространство L_{m+1}^{*}, для которого

$$b_{m+1}(W, X) \leqslant \sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{m+1}^{*} \subset \sum_{k=0}^{\infty} W_k\right\} + \nu = \varepsilon_{*} + \nu. \qquad (33)$$

Очевидно, существует $\varphi_\nu(z) \in L_{m+1}^{*} \cap \sum_{k=0}^{\infty} W_k$, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon_{*} - \nu \leqslant \|\varphi_\nu\|_X \leqslant \varepsilon_{*}$. В силу соотношения $L_{m+1}^{*} \cap \sum_{k=0}^{\infty} W_k = \sum_{k=0}^{\infty} (W_k \cap L_{m+1}^{*})$ имеем $\varphi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k,\nu}(z)$, где $\varphi_{k,\nu}(z) \in W_k \cap L_{m+1}^{*}$. Из неравенства $\|\varphi_\nu\|_X \leqslant$ $\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k,\nu}\|_X$ и (33) получаем

$$b_{m+1}(W, X) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{m+1}^{*} \subset W_k\} + 2\nu. \qquad (34)$$

Обозначим через $\{g_i(z)\}_{i=0}^{m}$ базис в L_{m+1}, а через $L_{n_k+1}^{*}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots,$ — подпространства, порожденные $n_k + 1$ элементами $\{g_{i_j}\}_{i=0}^{n_k} \subset \{g_i\}_{i=0}^{m}$, и потребуем, чтобы $L_{m+1}^{*} \subset \sum_{k=0}^{\infty} L_{n_k+1}^{*}$. Из включения $L_{n_k+1}^{*} \subset L_{m+1}^{*}$ следует, что для всех $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условию $\varepsilon S \cap L_{m+1}^{*} \subset W_k$, $\varepsilon S \cap$ $\cap L_{n_k+1}^{*} \subset W_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Отсюда и из (34) получаем $b_{m+1}(W, X) \leqslant$ $\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n_k+1}^{*} \subset W_k\} + 2\nu$. Используя данное в п. 1 определение величины b_n, учитывая последнее неравенство и произвольность $\nu > 0$, получаем (32′), что и завершает доказательство утверждения 6.

Оценки $b_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant c_6 n^{-r+1/p-1/2}$, $q \leqslant 2 \leqslant p$, и $b_{n+1}(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \leqslant c_7 n^{-r+1/p-1/q}$, $2 \leqslant q \leqslant p$, получаем на основании рассуждений, аналогичных случаю d_n, $p \leqslant 2 \leqslant q$, с использованием неравенств (32′), (30) и (27). Здесь c_6 и c_7 — константы, зависящие от r, p, q, γ. Теорема доказана.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Вакарчук С. Б.* Поперечники классов аналитических функций // Тез. Междунар. симп. по оптимал. алгоритмам. Болг. Акад. Наук. София.— 1989.— С. 146—147.
3. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости.— М. : Наука, 1975.— 296 с.
4. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1955.— 19, № 3.— С. 423—444.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1959.— 628 с.
6. *Альпер С. Я.* О приближении в среднем аналитических функций класса E_p // Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— С. 273—286.

7. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера.— М. : Наука, 1984.— 336 с.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые задачи теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
9. *Мамедханов Дж. И.* Неравенства типа С. М. Никольского для многочленов комплексного переменного на кривых // Докл. АН СССР.— 1974.— **214**, № 1.— С. 37—39.
10. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки.— 1977.— **22**, № 2.— С. 285—294.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1985.— Т. 2.— 538 с.
12. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ.— М. : Мир, 1989.— 656 с.
13. *Майоров В. Е.* О наилучшем приближении классов $W^r(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$ // Мат. заметки.— 1976.— **19**, № 5.— С. 699—706.
14. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— **41**, № 2.— С. 334—351.
15. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб.— 1983.— **120**, № 2.— С. 180—189.
16. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн.— 1974.— **29**, № 3.— С. 161—178.
17. *Hollig K.* Diameters of classes of smoth functions // Quant. Approxim.— New York, 1980.— P. 163—175.
18. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
19. *Галеев Э. М.* Бернштейновские поперечники классов периодических функций многих переменных // Дифференц. уравнения, гарм. анализ и прил : Материалы 13 тем. конф. ученых мех-мат. фак. Моск. ун-та (март, 1986 г.) — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1987.— С. 75—78.
20. *Пухов С. В.* Некоторые соотношения между поперечниками. Алгебраич. системы.— Иваново, 1981.— С. 183—194.
21. *Ходулев А. Б.* Замечание об александровских поперечниках конечномерных множеств // Функцион. анализ и его прил.— 1989.— **23**, № 2.— С. 94—95.

Получено 29.11.90