УДК 517.9

О. И. Завьялов, М. К. Поливанов, д-ра физ.-мат. наук
(Мат. ин-т им. В. А. Стеклова, Москва)

R-операция Боголюбова — Парасюка и операторные разложения в безмассовых теориях

Методы R-операции Боголюбова — Парасюка применяются для построения операторных разложений в безмассовых квантовых теориях поля.

Методи R-операції Боголюбова — Парасюка застосовуються для побудови операторних розкладів в безмасових квантових теоріях поля.

1. Введение. В 1955 г. Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк впервые описали вычитательную процедуру, позволяющую эксплицитным образом перенормировать диаграммы Фейнмана произвольного порядка и известную сейчас как R-операция [1—4]. По существу тем самым была фактически завершена математически корректная формулировка и квантовой теории поля в целом. Выражая простую физическую идею, согласно которой ультрафиолетовые расходимости можно «упрятать» в константы перенормировки и, следовательно, устранить с помощью специально подобранных «контрчленов» в лагранжиане взаимодействия, R-операция указала и на математический источник таких расходимостей.

Пропагаторы квантовой теории поля представляют собой обобщенные функции, а фейнмановские диаграммы формально определены как некоторые комбинации произведений пропагаторов и их сверток. Понятно, что произведение обобщенных функций естественно задается (локально) лишь в областях, где эти функции регулярны. В общем случае произведение определяется (если это вообще возможно) со значительным произволом. Анализ этого произвола, проведенный Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком применительно к фейнмановским диаграммам, показал, что в последние нужно включать так называемые квазилокальные операторы, которые, собственно, и порождают упоминавшиеся выше контрчлены в лагранжиане взаимодействия. Учет квазилокального произвола и требование ультрафиолетовой конечности матрицы рассеяния определяют вычислительный алгоритм вычитаний.

Помимо основного предназначения комбинаторный аппарат R-операции оказался также полезен для рассмотрения широкого круга квантовополевых проблем, связанных с физикой малых расстояний. Это понятно—асимптотические высокоэнергетические режимы матричных элементов определяются сингулярностями фейнмановских амплитуд при совпадающих координатах, т. е. имеют ту же природу, что и ультрафиолетовые расходимости. В настоящей статье обсуждаются применения теории перенормировок к задачам построения операторных разложений на малых расстояниях и на световом конусе. В п. 2 дан краткий обзор основных формул так называемой контрчленной техники, представляющей собой обобщение рецептов R-операции на формальные степенные ряды квантовополевой теории возмущений «в целом» и разработанной авторами, в частности, именно для нужд физики малых расстояний [5]. В своей исходной форме [5], отвечающей нулевой точке вычитаний в R-операции Боголюбова — Парасюка, контрчленная техника применима лишь к теориям с ненулевыми массами частиц. Между тем практически важные случаи соответствуют именно безмассовым теориям. В п. 3 предложен удобный вариант контрчленной техники, позволяющий избежать инфракрасных сингулярностей при выводе операторных разложений и в реалистических безмассовых теориях. На подиаграммном уровне этот вариант отвечает переходу от R-операции с нулевыми точками вычитания к некоторой модификации перенормировочной схемы с «мягкой массой» [6].

2. Контрчленная техника и разложения произведений токов. Специфическая структура R-операции, применяемой к индивидуальным диаграммам, налагает ограничения на ряд теории возмущений в целом. Коэффициентные функции матрицы рассеяния, токов, билокальных операторов, перенормированных с помощью различных R-операций, связаны друг с другом некоторыми соотношениями (примерами таких соотношений могут служить тождества Циммермана [7], уравнения ренорм-группы [8], уравнения Каллана — Симанзика [9] и т. д.). Конечно, информация о таких соотношениях возникает только из рассмотрения одиночных диаграмм, т. е. можно лишь утверждать, что они выполняются в смысле формальных степенных рядов по константе связи. Тем не менее, в самих этих соотношениях фигурируют ряды «в целом», т. е. как бы полные перенормированные операторы, а не какие-либо приближения к ним. Соответствующая совокупность методов известна как формализм нормальных произведений и ассоциируется главным образом с именами Циммермана и Ловенштейна [10—13]. Опишем альтернативную версию формализма нормальных произведений—упомянутую выше контрчленную технику.

Пусть $J_{\{\mu\}}(x)$ — «затравочный» ток, т. е. некоторый моном по асимптотическому полю $\varphi(x): J_{\{\mu\}}(x) = :\varphi_{(\mu_1)}(x) \ldots \varphi_{(\mu_m)}(x):$, причем $\{\mu\}$ — это мультииндекс $\{\mu\} = \{(\mu_1), \ldots, (\mu_m)\}$, где $(\mu_j) = (\mu_{j0}, \mu_{j1}, \mu_{j2}, \mu_{j3})$, $\varphi_{(\mu_j)}(x) = \partial_0^{\mu_{j0}} \ldots \partial_3^{\mu_{j3}} \varphi(x)$. Составное поле, представляющее перенормированный «ток» $\hat{J}^{(a)}_{\{\mu\}}(x)$, задано равенством

$$\hat{J}^{(a)}_{\{\mu\}}(x) = S^{+} \otimes \{R^{(a)} j_{\{\mu\}}(x)\, E_0(s)\},$$

причем $s = i\int L(x)\, dx$, где L — это затравочный лагранжиан взаимодействия, $E_0(s) = e^s$, а s — это матрица рассеяния $R^a E_0(s)$. Знак $\otimes$ обозначает обычное умножение; все произведения, не помеченные таким знаком, предполагаются хронологически упорядоченными. R-операция $R^{(a)}$ строится на основе вычитающих операторов $M^{(a)}$ (для поддиаграмм, содержащих вершину x) и $M^{(4)}$ (для подграфов без этой вершины), т. е. $M^{(a)}$ совершает в поддиаграмме $a - l + 1$ вычитаний, если $a > l - 1$, l — число внешних линий.

Таким образом, справедливы следующие формулы, полностью разрешающие перенормировочную комбинаторику токов:

$$J^{(a)}_{\{\mu\}}(x) \cong S \otimes \hat{J}^{(a)}_{\{\mu\}}(x) = E_0(s_r)\, \frac{1}{1 + M^{(a)} E_1(s_r)}\, J_{\{\mu\}}(x) \cong$$

$$\cong E_0(s_r)\, {}'J^{(a)}_{\{\mu\}}(x). \tag{1}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $E_1(s) = e^s - 1$, $E_2(s) = e^s - s - 1$, $E_0(s_r)$ — перенормированная матрица рассеяния, так что $s_r = i \int L_r(x)\, dx$, где L_r — это ренормированный лагранжиан взаимодействия. Далее,

$$s_r = s - M^{(4)} E_2(s - M^{(4)} E_2(s - \ldots) \ldots). \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) трактуются как равенства между формальными степенными рядами. Если разложить их по степеням константы связи (т. е. фактически по степеням s), то операторы M никогда не будут встречаться в знаменателях, и типичный член, например, в правой части (2) будет иметь вид $Ms \ldots sMs \ldots sMs \ldots sj(x)$. Но $s \ldots sj(x)$ — это хронологическое произведение токовой вершины $j(x)$ и лагранжевых вершин s. По правилам Фейнмана это произведение порождает функционал

$$F(x) = \sum_l \frac{1}{l} \int dx_1 \ldots dx_l F_l(x \mid y_1, \ldots, y_l) : \varphi(y_1) \ldots \varphi_l(y_l) :. \tag{3}$$

Здесь $F_l(x|y)$ — некоторая сумма диаграмм Фейнмана, на каждой из которых оператор M хорошо определен. Таким образом, $Ms \ldots sj(x)$ — некоторая токовая вершина, можно точно так же перейти к следующему множителю M и в результате получить все перенормированные диаграммы, представляющие левую часть равенства.

Соотношения, аналогичные (1) и (2), верны также для произведения двух (и большего числа) токов. Например,

$$\hat{J}^{(a_1)}_{\{\mu_1\}}(x_1)\, \hat{J}^{(a_2)}_{\{\mu_2\}}(x_2) = S^{+} \otimes (J^{(a_1)}_{\{\mu_1\}}(x_1)\, J^{(a_2)}_{\{\mu_2\}}(x_2))_{+},$$

причем

$$(J^{(a_1)}_{\{\mu_1\}}(x_1)\, J^{(2)}_{\{\mu_2\}}(x_2))_{+} = E_0(s_r)\, \frac{1}{1 + M^{(a)} E_1(s_r)}\, [1 - M^{(a)}]\, {}'J^{(a_1)}_{\{\mu_1\}}(x_1)\, {}'J^{(a_2)}_{\{\mu_1\}}(x_2). \tag{4}$$

Теперь можно обратиться к задаче о разложении произведения токов. Предположим, что в левой части (4) координаты x_1 и x_2 равны $x_1 = x + \xi$, $x_2 = x - \xi$ и $\xi \to 0$ (будем сейчас обозначать токи через J_1 и J_2). Утверждается, что сингулярную (в этом пределе) часть произведения токов можно представить как линейную комбинацию локальных составных полей $J_l(x)$, зависящих от точки x, а коэффициенты $K_l(\xi)$ в этой линейной комбинации представляют собой сингулярные (при $\xi \to 0$) c-числовые функции. Символически

$$\hat{J}_1(x + \xi)\, \hat{J}_2(x - \xi) = \sum_l K_l(\xi)\, \hat{J}_l(x) + \hat{Q}(x, \xi), \tag{5}$$

где остаточный член $\hat{Q}(x, \xi)$ имеет в точке $\xi = 0$ нуль достаточно высокого порядка. Равенства типа (5), собственно, и называются разложениями на малых расстояниях или же разложениями Вильсона.

В рамках контрчленной техники проблема обоснования разложений на малых расстояниях решается полностью. Введем вспомогательный оператор $\mathcal{M}^{(a)}_x$, преобразующий каждое нормальное произведение $:\varphi(y_1) \ldots \varphi(y_l):$ в полином (степени $a - l$) по разностям $(y_j - x)$, равный соответствующему отрезку разложения этой величины в ряд Маклорена. Поскольку каждый полилокальный функционал вида (3) есть сумма по нормальным произведениям полей, оператор $\mathcal{M}_x^{(a)}$ определяется также и непосредственно на полилокальных функционалах $F(x_1, \ldots, x_n)$. Нетрудно показать, что если $F(\underline{x})$ разлагается по диаграммам с определенными свойствами связности, то

$$\lim_{\xi \to 0} \mathcal{M}_x^{(a)} F(x + \xi_1, \ldots, x + \xi_n) = M^{(a)} F(x, \ldots, x).$$

Таким образом, оператор $\mathcal{M}_x^{(a)}$ совершает в соответствующих диаграммах как бы предвычитания, предусмотренные R-операцией. Рассмотрим теперь выражение $Q(x, \xi)$, заданное правой частью равенства (4), где однако оператор $M^{(a)}$ заменен на $\mathcal{M}_x^{(a)}$. Следует ожидать (это ожидание оправдывается подиаграммным анализом, использующим методы параметрических представлений [14]), что при достаточно больших a величина $\hat{Q}(x, \xi) = S^+ \otimes \otimes Q(x, \xi)$ будет иметь нуль высокого порядка при $\xi = 0$. Поэтому эта величина может быть остаточным членом в разложении (5). Простые манипуляции показывают далее, что разность между произведением токов $(J_1 J_2)_+$ и $Q(x, \xi)$ действительно есть конечная сумма локальных составных полей с сингулярными c-числовыми коэффициентами.

Упомянем и о разложении, которое получается в результате применения этого метода к произведению токов в окрестности светового конуса [15]: Именно: пусть теперь в левой части (4) имеем $x_1 = x + \xi$, $x_2 = x - \xi$, и $\xi \to \tilde{\xi}$, где вектор $\tilde{\xi}$ лежит на световом конусе: $\tilde{\xi}^2 = 0$. Анализ показывает, что разложение на световом конусе можно записать в виде (5), где, однако, вместо локальных полей $\hat{J}_l(x)$ должны фигурировать так называемые лучевые поля $\hat{J}_l(x, \xi)$ с более сложными свойствами локальности. Носитель лучевого поля содержится в отрезке прямой, соединяющем точки x и $x + \tilde{\xi}$, что, по-прежнему, обеспечивает факторизацию высокоэнергетической и низкоэнергетической сингулярностей.

3. Инфракрасная проблема. Из-за инфракрасных особенностей описанная выше схема, к сожалению, не переносится буквально на теории с безмассовыми частицами. Чтобы разобраться в механизме возникновения инфракрасных бесконечностей, рассмотрим простейший пример перенормировки в безмассовой теории — перенормировку примитивно расходящегося графа γ, (неперенормированная) регуляризованная амплитуда которого равна $\hat{G}^\gamma(k)$, посредством вычитающего оператора Боголюбова — Парасюка:

$$M(\gamma) = \sum_{n=0}^{\omega_\gamma} \frac{1}{n!} M_n(\gamma), \tag{6}$$

где ω_γ — индекс расходимости, а

$$M_n(\gamma) \tilde{G}^\gamma(\underline{k}) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n \tilde{G}^\gamma(\lambda k)\,|_{\lambda=0}. \tag{7}$$

Рассмотрим амплитуду $\tilde{G}^\gamma(k)$ В α-представлении:

$$\tilde{G}^\gamma(\underline{k}) = \int_0^\infty \prod_l d\alpha_l \chi(\underline{\alpha}) \frac{1}{D^2(\underline{\alpha})} \exp\left\{-\frac{A(k, \alpha)}{D(\underline{\alpha})}\right\}. \tag{8}$$

Здесь α_l — фейнмановский параметр, сопоставленный l-й линии, $D(\underline{\alpha})$ и $A(\underline{k}, \underline{\alpha})$ — известные определители α-представления, $\chi(\underline{\alpha})$ — регуляризующая функция, имеющая хороший нуль в ультрафиолетовой области малых $\underline{\alpha}$. Инфракрасной области отвечают большие $\underline{\alpha}$. Чтобы контролировать обе области, сделаем следующую замену переменных:

$$\alpha_l \to \lambda \alpha_l, \ \Pi d\alpha_l \to \lambda^{L-1} d\lambda \Pi d\alpha_l \delta(1 - \Sigma \alpha_l), \tag{9}$$

где L — число внутренних линий диаграммы; D и A — однородные функции параметров α. В новых переменных будем иметь

$$\widetilde{G}(\underline{k}) = \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1+\omega/2}} \int\limits_0^\infty \Pi d\alpha_i \chi(\lambda\underline{\alpha}) \frac{\delta(1-\Sigma\alpha)}{D^2(\underline{\alpha})} \exp\left\{-\lambda \frac{A(k,\alpha)}{D(\underline{\alpha})}\right\}. \quad (10)$$

Сингулярность при малых λ подавляется регуляризующей функцией χ, а сходимость на верхнем пределе обеспечивается экспоненциальным фактором.

Теперь представим себе, что произойдет в результате применения R-операции $R = 1 - M$ к этой амплитуде и устранения ультрафиолетового обрезания $\chi \to 1$. Находим (так как A квадратична по импульсам k)

$$R\widetilde{G} = (1 - M)\,\widetilde{G} = \left(1 - \sum_{n=0}^{\omega\gamma} \frac{1}{n!} M_n(\gamma)\right)\widetilde{G} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1+\omega/2}} \int\limits_0^\infty \Pi d\alpha \frac{\delta(1-\Sigma\alpha)}{D^2(\underline{\alpha})} \left[\exp\left\{-\lambda \frac{A(k,\alpha)}{D(\underline{\alpha})}\right\} - 1 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - \frac{1}{(\omega/2)!}\left(-\lambda\left(\frac{A}{D}\right)^{\omega/2}\right)\right]. \quad (11)$$

Мы видим, что новое подынтегральное выражение действительно интегрируемо в ультрафиолетовой области, поскольку выражение в квадратных скобках убывает при $\lambda \to 0$ быстрее, чем $\lambda^{\omega/2}$. Однако теперь «контрчлены» в квадратных скобках не содержат более «режущего» фактора $\exp(-\lambda A/D)$, заведомо обеспечивающего сходимость в инфракрасной области. И в самом деле, последний член инфракрасно расходится.

Рассмотренный пример показывает, как можно видоизменить вычитающий оператор, чтобы избежать инфракрасных проблем и вместе с тем получить удобную формулировку разложений на малых расстояниях. Положим (имеем в виду перенормировку с a^γ перевычитаниями)

$$R\widetilde{G} = (1 - \widetilde{M})\,\widetilde{G} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{1+\omega/2}} \int\limits_0^\infty \Pi d\alpha \frac{\delta(1-\Sigma\alpha)}{D^2(\alpha_-)} \left[\exp\left\{-\lambda \frac{A(k,\alpha)}{D(\alpha_-)}\right\} -\right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{(\omega+a^\gamma)/2} \frac{1}{(n)!} f_{2n}(\lambda\underline{\alpha})\left(-\lambda \frac{A}{D}\right)^n\right]. \quad (12)$$

От выражения (11) последнее соотношение отличается только наличием функций $f_{2n}(\lambda\alpha)$ в соответствующих «контрчленах». Эти функции должны быть вещественными, быстро убывать при $\lambda \to \infty$, а при малых λ должны удовлетворять следующим условиям:

1) функция $f_{2n}(\lambda\alpha)$ равна 1 при $\lambda = 0$;

2) при $\lambda = 0$ обращаются в нуль первые $\left[\frac{1}{2}(\omega + a^\gamma - n)\right]$ производных (по λ) функции $f_{2n}(\lambda\underline{\alpha})$ (здесь символ $[N]$ обозначает целую часть числа N).

Нетрудно убедиться, что такой выбор удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым a priori к вычитающему оператору: вычитания не вносят инфракрасных расходимостей, ультрафиолетовые расходимости исчезают, а контрчлены полиномиальны по импульсам.

Далее будем пользоваться следующими конкретными выражениями для функций $f_m(\alpha)$, заимствованными из перенормировочной схемы Вайнберга [16]:

$$f_n(\underline{\alpha}) = \sum_{l=0}^{\omega_\gamma + a_\gamma - n} \frac{1}{l!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^l \exp\{-\Sigma\alpha_l\mu_l^2(1-\lambda)^2\}|_{\lambda=0}. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что так определенная функция $f_n(\alpha)$ действительно удовлетворяет условиям 1,2. С другой стороны, появление экспоненты из правой части (13) в α-параметрическом представлении означает, что на линиях диаграммы «возникли» массы $\mu_l(1-\lambda)$ и вычитающий оператор $\widetilde{M}$ разлагает амплитуду не только по степеням внешних импульсов, но и по степеням этой новой вспомогательной массы μ_l. Подведем теперь итог, дав определение инфракрасно безопасного оператора $\widetilde{M}$, сразу для «массивного» случая, т. е. случая, когда часть линий диаграммы с самого начала несет ненулевую массу m.

Пусть $\widetilde{G}_{\underline{m}}(\underline{k})$ — это фейнмановская амплитуда подграфа γ, входящего в диаграмму, причем $\underline{m}$ символизирует истинные («жесткие») массы теории: $\underline{m} = m_1, \ldots, m_l \ldots$ (все они или их часть могут быть нулевыми). Пусть ω_γ — индекс расходимости, а a^γ — число перевычитаний в подграфе γ. Тогда определим вычитающий оператор $\widetilde{M}(\gamma)$ соотношением

$$\widetilde{M}(\gamma)\,\widetilde{G}_{\underline{m}}(\underline{k}) = \sum_{n=0}^{\omega_\gamma + a^\gamma} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\widetilde{G}_{\underline{\mu}+\lambda(\underline{m}-\underline{\mu})}(\lambda\underline{k})|_{\lambda=0},$$

где масса на l-й линии диаграммы G в правой части равна $\mu + \lambda(m_l - \mu)$.

Построим теперь «глобальный» аналог $\widetilde{M}^{(a)}$ оператора $\widetilde{M}(\gamma)$, применимый непосредственно к «непертурбативным» одноточечным функционалам $F(x)$ типа $E_1(s_r)\,j(x)$. На индивидуальных диаграммах, дающих вклад в этот функционал, $\widetilde{M}^{(a)}$ действует как $\widetilde{M}(\gamma)$ с числом вычитаний, определяемым из соотношения $a^\omega + \omega_\gamma = a - l$, где l — число внешних линий диаграммы γ. В целом это условие эквивалентно следующему определению:

$$\widetilde{M}^{(a)}F(x) =$$

$$= \sum_{\{\lambda\};\, l+\Sigma|\lambda_l| < a} \frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_l)!\,l!}\, j_{\{\lambda\}}(x)\left(\sum_{n=0}^{a-l-\Sigma|\lambda_j|}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\right) <$$

$$< F(0)\,\widetilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0)\ldots\widetilde{\varphi}^{(\lambda_l)}(0) >_{\substack{\text{prop}\\ \underline{\mu}+\lambda(\underline{m}-\underline{\mu})}}|_{\lambda=0}. \tag{14}$$

Все символы здесь имеют тот же смысл, что и выше. Индекс $\underline{\mu} + \lambda(\underline{m} - \underline{\mu})$ снова обозначает, что соответствующий матричный элемент рассчитывается по диаграмме с массой $\mu + \lambda(m_l - \mu)$ на l-й линии. Композитное поле $\widetilde{J}^{(a)}_{\{\mu\}}(x)$ строится по вычитающему оператору $\widetilde{M}$. Именно:

$$\widetilde{J}^{(a)}_{\{\mu\}}(x) = E_0(s_r)\,\frac{1}{1 + \widetilde{M}^{(a)}E_1(s_r)}\, j_{\{\mu\}}(x). \tag{15}$$

Теперь понятно, что «предвычитающий» оператор $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)}$ должен определяться соотношением

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)}\,\Phi(x+\xi_1,\ x+\xi_2) =$$

$$= \sum_{\{\lambda\}: l+\Sigma|\lambda_l|<a} \frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_l)!\,l!} \tilde{j}_{\{\lambda\}}(x) \left(\sum_{n=0}^{a-l-\Sigma|\lambda_j|} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} \right) <$$

$$< \Phi(\xi_1, \xi_2)\, \widetilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0) \ldots \widetilde{\varphi}^{(\lambda_l)}(0) >_{\substack{\text{prop} \\ \underline{\mu}+\lambda(\underline{m}-\underline{\mu})}} |_{\lambda=0}. \tag{16}$$

Можно показать, что этот оператор обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\xi_1\to 0,\, \xi_2\to 0} \widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)} \Phi(x+\xi_1, x+\xi_2) = \widetilde{M}^{(a)} \Phi(x, x), \tag{17}$$

$$[1 - \widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)}]\, '\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\rho\xi_1)\, '\widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\rho\xi_2) = O(\rho^{a-a_1-a_2+1}). \tag{18}$$

Совершая теперь стандартные преобразования «массивной контрчленной техники» [15] с заменой $M \to \widetilde{M}$, $\mathfrak{M} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$, $J \to \widetilde{J}$, получаем следующее представление для T-произведения двух составных полей $\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}$ и $\widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}$:

$$(\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)\, \widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2)]_+ = E_0(s)_r\, '\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)\, \widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2) =$$

$$= E_0(s_r) \frac{1}{1+\widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)} E_1(s_r)} \widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)} E_0(s_r)\, '\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)\, '\widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2) +$$

$$+ Q(x+\xi_1\ x+\xi_2), \tag{19}$$

где $(\xi_1 - \xi_2)^2 \neq 0$, и

$$Q(x+\xi_1, x+\xi_2) = E_0(s_r) \frac{1}{1+\widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)} E_1(s_r)} \times$$

$$\times [1 - \widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)}]\, '\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)\, '\widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2). \tag{20}$$

Остаточный член $Q(x+\xi_1, x+\xi_2)$ имеет глубокий нуль при $\xi_1 \to 0$, $\xi_2 \to 0$ в силу соотношения (18). Член $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(a)} E_0\, 'J'J$, будучи преобразованным в соответствии с (16), порождает линейную комбинацию локальных мономов $j_{\{\lambda\}}(x)$. Под воздействием операторов, стоящих в формуле (19) левее этого выражения, локальные мономы $j_{\{\lambda\}}(x)$ превращаются в составные поля $'\widetilde{J}^{(a)}_{\{\lambda\}}(x)$, и мы получаем следующее операторное разложение на малых расстояниях (сформулируем его в терминах полей $\hat{J} = S^+ x\widetilde{J}$).

Теорема. *Для каждого x и для $(\xi_1 - \xi_2)^2 \neq 0$ хронологическое произведение двух составных полей $\hat{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)$ и $\hat{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2)$ допускает следующее разложение на малых расстояниях:*

$$\hat{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(x+\xi_1)\, \hat{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(x+\xi_2) = \sum_{\{\lambda\}: l+\Sigma|\lambda_l|<a} \widetilde{K}^{\{\lambda\}}(\xi_1, \xi_2)\, \hat{J}^{(a)}_{\{\lambda\}}(x) + \hat{Q}(x+\xi_1,$$

$$x+\xi_2),$$

где остаточный член $\hat{Q}(x+\xi_1, x+\xi_2)$ имеет нуль (по ξ) порядка $a - a_1 - a_2$, а С-числовые коэффициенты $\widetilde{K}^{\{\lambda\}}(\xi_1, \xi_2)$ заданы формулами

$$\widetilde{K}^{\{\lambda\}}(\xi_1, \xi_2) =$$

$$= \sum_{\{\lambda\}: l+\Sigma|\lambda_l|<a} \frac{(-i)^{\Sigma|\lambda_j|}}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_l)!\,l!} \left(\sum_{n=0}^{a-l-\Sigma|\lambda_j|} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} \right) <$$

$$< (\widetilde{J}^{(a_1)}_{\{\lambda_1\}}(\xi_1)\, \widetilde{J}^{(a_2)}_{\{\lambda_2\}}(\xi_2))_+\, \widetilde{\varphi}^{(\lambda_1)}(0) \ldots \widetilde{\varphi}^{(\lambda_l)}(0) >\xi - \operatorname*{prop}_{\underline{\mu}+\lambda(\underline{m}-\underline{\mu})} |_{\lambda=0}\,.$$

Здесь индекс $\underline{\mu} + \lambda(\underline{m} - \underline{\mu})$ *обозначает, что каждой* (l-*й*) *линии диаграммы приписана масса* $\mu_l + \lambda(m_l - \mu_l)$, *причем* m_l*—первоначальная «жесткая» масса соответствующей частицы, а* μ_l*—вспомогательная «мягкая» масса.*

Аналогичным способом, освобождающим теорию от инфракрасных сингулярностей, можно переписать и конусные разложения [15].

1. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций // Докл. АН СССР.— 1955.— **100**.— С. 25—28.
2. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* К теории умножения причинных сингулярных функций // Там же.— С. 429—432.
3. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* О вычитательном формализме при умножении причинных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**.— С. 585—610.
4. *Парасюк О. С.* К теории *R*-операции Боголюбова // Укр. мат. журн.— 1960.— **12**, № 3.— С. 287—307.
5. *Anikin S. A., Polivanov M. C., Zavialov O. I.* Renormalized composite fields in quantum field theory // Fortschr. Phys.— 1977.— **27**.— P. 459—500.
6. *Lowenstein J. H., Zimmermann W.* Regularization and renormalization of zero mass theories // Communs Math. Phys.— 1976.— **44**.— P. 73—92.
7. *Zimmermann W.* Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space // Communs Math. Phys.— 1969.— **15**.— P. 208—234.
8. *Lowenstein J. H.* Differential vertex operations in Lagrangian field theory//Ibid.— 1972.— **24**.— P. 1—21.
9. *Callan C.* Equations for renormalized Green functions // Phys. Rev. D.— 1970.— **12**.— P. 1541—1563.
10. *Zimmermann W.* Composite operators in the perturbation theory of renormalizable interaction // Ann. Phys.— 1973.— **77**.— P. 536—570.
11. *Lowenstein J. H.* Convergence theorems for renormalized Feynman integrals with zero mass propagators // Communs Math. Phys.— 1976.— **47**.— P. 58—68.
12. *Lowenstein J. H.* Normal product quantization of currents in Lagrangian field theory // Phys. Rev. D.— 1971.— **4**.— P. 2281—2290.
13. *Lowenstein J. H., Zimmermann W.* On the formulation of theories with zero mass propagators // Nucl. Phys. B.— 1975.— **86**.— P. 77—103.
14. *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979.— 360 с.
15. *Anikin S. A., Zavialov O. I.* Short-distance and light-cone expansions for products of currents // Ann. Phys.— 1978.— **116**.— P. 135—166.
16. *Weinberg S.* Soft mass renormalization // Phys. Rev. D.— 1974.— **1**.— P. 838—861.

Получено 25.07.91