УДК 517.5

П. В. Задерей, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов

Найдены достаточные условия (условия Боаса — Теляковского) на коэффициенты кратных тригонометрических рядов, обеспечивающие интегрируемость сумм рассматриваемых рядов. При этих условиях получены оценки интегралов от модулей функций, заданных кратными тригонометрическими рядами.

Дано также сравнение условий Боаса—Теляковского с ранее известными условиями. Доказано, что условия Боаса—Теляковского являются наиболее общими.

Знайдені достатні умови (умови Боаса — Теляковського) на коефіцієнти кратних тригонометричних рядів, які забезпечують інтегровність сум розглядуваних рядів. При цих умовах одержані оцінки інтегралів від модулів функцій, заданих кратними тригонометричними рядами.

Дано також порівняння умов Боаса—Теляковського з раніше відомими умовами. Доведено, що умови Боаса—Теляковського є найбільш загальними.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; $\mathbb{Z}_+^m = \{k \in \mathbb{R}^m,\ k_i = 0, 1, \dots,\ i = \overline{1, m}\}$; $\mathbb{N}^m = \{n \in \mathbb{R}^m,\ n_i = 1, 2, \dots,\ i = \overline{1, m}\}$; $M = \{1, 2, \dots, m\}$; $M \setminus B$ — дополнение множества $B \subset M$ к M (при включении $B \subset M$ возможность равенства $B = M$ не исключается); $|B|$ — число элементов множества B; $T^{|B|} = [-\pi; \pi]^{|B|}$, $T_\varepsilon^m = [\varepsilon; \pi]^m$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i \in M$; $k_B = \{k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_s}\}$ при $B = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$; γ_{k_B} — число координат вектора k_B равных нулю; $\gamma_{k_M} = \gamma_k$, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.

В настоящей работе найдены достаточные условия на коэффициенты $a_k \in \mathbb{R}^1$, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, $m \geqslant 2$ рядов вида

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\gamma_k} a_k \prod_{i \in B} \sin k_i x_i \prod_{j \in M \setminus B} \cos k_j x_j \tag{1}$$

$\left(\text{полагаем } a_k = 0, \text{ если } \prod_{i \in B} k_i = 0\right)$, при выполнении которых эти ряды являются рядами Фурье суммируемых функций.

Везде в дальнейшем сходимость ряда (1) понимается по Прингсхейму, т. е. как сходимость при $\min_{i \in M} n_i \to \infty$ прямоугольных частных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} 2^{-\gamma_k} a_k \prod_{i \in B} \sin k_i x_i \prod_{j \in M \setminus B} \cos k_j x_j.$$

Будем рассматривать такие условия на a_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, при которых ряды сходятся всюду, за исключением, быть может, множества $E_0^{|M \setminus B|} = \left\{x \in T^m \ \prod_{i \in M \setminus B} x_i = 0\right\}$ и сходимость равномерна на любом замкнутом множестве $F \subset T^m \setminus E_\varepsilon^m$, где $E_\varepsilon^m = \{x \in T^m : |x_i| < \varepsilon_i,\ \varepsilon_i > 0,\ i = \overline{1, m}\}$. Тогда вопрос о том, будет ли ряд (1) рядом Фурье, сводится к вопросу об интегрируемости суммы этого ряда, или, как часто говорят, к вопросу об интегрируемости этого ряда (см. по этому поводу [1, с. 790] при $m = 1$; [2, 3] при $m \geqslant 2$). Установленные при этом оценки для величин

$$\mathcal{I}_m(B, a) = \int_{T^m} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\gamma_k} a_k \prod_{i \in B} \sin k_i x_i \prod_{j \in M \setminus B} \cos k_j x_j \right| dx$$

через коэффициенты a_k и их разности находят приложения в ряде вопросов математического анализа.

В настоящее время известно много различных условий интегрируемости как одномерных, так и кратных тригонометрических рядов. Здесь будет дано доказательство достаточности условий интегрируемости кратных тригонометрических рядов, которые являются одними из возможных многомерных аналогов условий, полученных С. А. Теляковским [4], а также сравнение этих условий с ранее известными.

2. Обозначения. Формулировка основных результатов. В 1964 г. С. А. Теляковский [4] доказал, что если коэффициенты a_k тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{2}$$

удовлетворяют условиям

$$a_k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3}$$

$$\mathcal{A}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty, \quad \Delta a_k := a_k - a_{k+1}, \tag{4}$$

$$\mathcal{B}(a) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} \nabla_l (\Delta a_k) \right| < \infty, \quad \nabla_l a_k := a_{k-l} - a_{k+l}, \tag{5}$$

то ряд (2) сходится всюду, за исключением, быть может, точки $x = 0$, является рядом Фурье своей суммы и справедлива оценка

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} + a_k \cos kx \right| dx \leqslant C\,(\mathcal{A}(a) + \mathcal{B}(a)). \tag{6}$$

В соотношении (6) и везде в дальнейшем C обозначает положительную абсолютную, либо зависящую от некоторых «не основных» параметров, постоянную, не обязательно всюду одну и ту же.

В [1] также доказано, что если коэффициенты a_k ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{7}$$

удовлетворяют условиям (3)—(5) (здесь $a_0 = 0$), то ряд (7) будет рядом Фурье в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\mathcal{L}(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty\,. \tag{8}$$

При этом если ряд (8) сходится, то справедлива оценка

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right| dx \leqslant C\,(\mathcal{A}(a) + \mathcal{B}(a) + \mathcal{L}(a)).$$

Как видно, условия интегрируемости сумм рядов (2) и (7) различны. Поэтому эти ряды в рассматриваемой задаче изучаются раздельно.

Приведенные выше результаты являются одними из наиболее общих и имеют богатую историю, которая в случае $m = 1$ достаточно полно освещена в [4]. (Отметим только работы [5—12], появившиеся позже.)

Условия (4), (5) и (8) обобщают условия интегрируемости тригонометрических рядов, полученные Р. П. Боасом [13]. Поэтому их называют условиями Боаса—Теляковского.

Интегрируемость тригонометрических рядов при $m \geqslant 2$ рассматривалась Я. С. Бугровым [14], С. А. Теляковским [15, 16], Ю. Л. Носенко [17—20] и О. И. Кузнецовой [21].

Прежде чем сформулировать некоторые результаты по интегрируемости кратных тригонометрических рядов, введем необходимые обозначения.

Пусть a_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, — числовая последовательность. Обозначим через $\Delta^j a_k$ первую, а через $\nabla_{l_j}^j a_k$ первую симметричную разность по индексу k_j соответственно с шагом 1 и $2l_j$, т. е. $\Delta^j a_k = a_k - a_{k_{M\setminus j},k_j+1}$, $\nabla_{l_j}^j a_k = a_{k_{M\setminus j},k_j-l_j} - a_{k_{M\setminus j},k_j+l_j}$, $j = \overline{1, m}$. Пусть далее $\Delta^B a_k$ и $\nabla_{l_B}^B a_k$ — выражения, которые получаются после последовательного применения операторов Δ^j и $\nabla_{l_j}^j$ к a_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, по всем $j \in B$: $\nabla_{l_M}^M a_k =: \nabla_l^M a_k$, $\Delta^{\varnothing} a_k = \nabla_{l_{\varnothing}}^{\varnothing} a_k = a_k$. Ясно, что операторы Δ^i, Δ^j, $\nabla_{l_\nu}^{\nu}$, $\nabla_{l_s}^{s}$ являются перестановочными, т. е. $\Delta^i(\Delta^j(\nabla_{l_\nu}^{\nu}(\nabla_{l_s}^{s} a_k))) = \Delta^j(\Delta^i(\nabla_{l_s}^{s}(\nabla_{l_\nu}^{\nu} a_k))) = \nabla_{l_s}^{s}(\Delta^i(\nabla_{l_\nu}^{\nu}(\Delta^j a_k))) = \ldots$. Символом $\sum_{\substack{k_i=l_i \\ i\in B}}^{r_i} a_k = \sum_{k_B=l_B}^{r_B} a_k$ $(B = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\})$ обозначим сумму $\sum_{k_{j_1}=l_{j_1}}^{r_{j_1}} \ldots \sum_{k_{j_s}=l_{j_s}}^{r_{j_s}} a_{k_B, k_{M\setminus B}}$ $(a_{k_B, k_{M\setminus B}} = a_k)$, а $dx_B = dx_{j_1} dx_{j_2} \ldots dx_{j_s}$; при $B = M$ вместо $\sum_{\substack{k_i=l_i \\ i\in M}}^{r_i} a_k$ и dx_M будем писать $\sum_{k=l}^{r} a_k$ и dx. Если в этой сумме хотя бы один верхний предел меньше нижнего, то будем считать ее равной нулю. В дальнейшем символ $\prod_{i\in B} x_i$, $B=\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ обозначает произведение $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_s}$ и пусть $\prod_{i\in\varnothing} x_i = 1$.

Для $B\subset M$ и $G\subset M$, $B\cap G=\varnothing$, положим

$$\delta_{B,G}(a):=\sum_{\substack{k_i=1\\ i\in B}}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=2\\ j\in G}}^{\infty}\sum_{\substack{k_s=0\\ s\in M\setminus(B\cup G)}}^{\infty}\prod_{i\in B}\frac{1}{k_i}\left|\sum_{\substack{l_j=1\\ j\in G}}^{[k_j/2]}\nabla_{l_G}^{G}(\Delta^{M\setminus B}a_k)\prod_{j\in G}\frac{1}{l_j}\right|.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если для коэффициентов ряда* (1) *выполняются условия*

$$a_k\to 0,\quad |k|\to\infty, \tag{9}$$

$$\sum_{D\subset B}\sum_{G\subset M}\delta_{D;G}(a)<\infty,\quad D\cap G=\varnothing, \tag{10}$$

то: 1) *этот ряд сходится всюду в* T_0^m, *за исключением, быть может, точек множества* $E_0^{|M\setminus B|}$, *сходимость равномерна в* T_ε^m, $\varepsilon>0$; 2) *функция* $s(x)$, *являющаяся суммой ряда* (1), *интегрируема на* T^m *и выполняется неравенство*

$$\int_{T_0^m}|s(x)|\,dx\leqslant C\sum_{D\subset B}\sum_{G\subset M}\delta_{D,G}(a),\quad D\cap G=\varnothing\,; \tag{11}$$

3) *ряд* (1) *является рядом Фурье функции* $S(x)$.

В одномерном случае условия (9) и (10) представляют собой известные условия С. А. Теляковского (3), (5) и (8), а заключение теоремы — его утверждение. Здесь будет показано, что условия (9) и (10) в кратном случае являются наиболее общими среди известных условий интегрируемости рядов, выраженных через коэффициенты и их разности.

3. Доказательство теоремы 1 существенным образом опирается на доказанный автором [22] кратный аналог одного результата Боаса—Теляковского [4, 13], который приведем здесь в качестве леммы.

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на T_0^m. Продолжая ее четным образом по переменным x_i, $i\in B$, и нечетным по x_j, $j\in M\setminus B$, получаем функцию, которую обозначим $f_B(x)$ и пусть

$$s[f_B]=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m}2^{-\nu_{k_B}}a_k(f_B)\prod_{i\in B}\cos k_ix_i\prod_{j\in M\setminus B}\sin k_jx_j \tag{12}$$

— ее ряд Фурье.

Лемма 1 [22]. *Если ряды Фурье* (12) *функций* $f_B(x)$ *сходятся абсолютно, то справедливо неравенство*

$$\int_{T_0^m}|f(x)|\prod_{i\in M}\frac{1}{x_i}\,dx\leqslant C\sum_{B\subset M}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m}|a_k(f_B)|<\infty. \tag{13}$$

Отметим, что в дальнейшем будем следовать методу работы [1]. Пусть $\mathcal{D}_{k_i}(x_i)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu_i=1}^{k_i}\cos\nu_ix_i=\sin\left(k_i+\frac{1}{2}\right)x_i/2\sin\frac{x_i}{2}$ — ядро Дирихле порядка k_i, $\mathcal{D}_{-1}(x_i)=0$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_0(x_i)=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_i}{2}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i)=\widetilde{\mathcal{D}}_0(x_i)+$
$+\sum_{\nu_i=1}^{k_i}\sin k_ix_i=-\cos\frac{2k_i+1}{2}x_i/2\sin\frac{x_i}{2}$.

В прямоугольной частной сумме

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-\nu_k} a_k \prod_{i\in B} \sin k_i x_i \prod_{j\in M\setminus B} \cos k_j x_j$$

да (1) по каждой переменной проведем преобразование Абеля, при этом получим

$$S_n(x) = \sum_{W\subset M} \sum_{\substack{k_i=0\\ i\in W}}^{n_i} \Delta^W_{k_W, n_{M/W}+1} \prod_{i\in W\cap B} \widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i) \prod_{j\in W\cap(M\setminus B)} \mathcal{D}_{k_j}(x_j) \times$$

$$\times \prod_{i\in B\setminus(W\cap B)} \widetilde{\mathcal{D}}_{n_i}(x_i) \prod_{j\in (M\setminus B)\setminus(W\cap(M\setminus B))} \mathcal{D}_{n_j}(x_j).$$

В последнем выражении оценим все слагаемые, за исключением того, которое соответствует $W = M$. Поскольку при $x \in T^m_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, равномерно по x_i и k_i

$$|\mathcal{D}_{k_i}(x_i)| \leqslant \frac{\pi}{2\varepsilon_i}, \quad |\widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i)| \leqslant \frac{\pi}{2\varepsilon_i}, \quad i \in M, \tag{14}$$

справедливо неравенство

$$\sum_W := \Bigl| \sum_{\substack{k_i=0\\ i\in W}}^{n_i} \Delta^W a_{k_W, n_{M\setminus W}+1} \prod_{i\in W\cap B} \widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i) \prod_{j\in W\cap(M\setminus B)} \mathcal{D}_{k_j}(x_j) \times$$

$$\prod_{i\in B\setminus(W\cap B)} \widetilde{\mathcal{D}}_{n_i}(x_i) \prod_{j\in (M\setminus B)\setminus(W\cap(M\setminus B))} \mathcal{D}_{n_j}(x_j) \Bigr| \leqslant C \sum_{\substack{k_i=0\\ i\in W}}^{n_i} |\Delta^W a_{k_W, n_{M\setminus W}+1}|.$$

силу соотношения $\Delta^W a_{k_W, n_{M\setminus W}+1} = \sum_{\substack{k_j=n_j+1\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \Delta^M a_k$ при $x \in T^m_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

ıеем $\sum_W \leqslant C \sum_{\substack{k_i=0\\ i\in W}}^{n_i} \sum_{\substack{k_j=n_j+1\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} |\Delta^M a_k|$. Ряд $\delta_{\varnothing;\varnothing}(a)$ сходится в силу условия

) теоремы 1. Отсюда следует, что $\sum_{\substack{k_i=0\\ i\in W}}^{n_i} \sum_{\substack{k_j=n_j+1\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} |\Delta^M a_k| \to 0$ при $\min_{i\in M} n_i \to \infty$

$W \neq M$, как остаток ряда $\delta_{\varnothing,\varnothing}(a)$.

Итак, в выражении для $S_n(x)$ все слагаемые, кроме $\sum_M$, стремятся нулю при $\min_{i\in M} n_i \to \infty$, поэтому

$$\lim_{\substack{\min n_i\to\infty\\ i\in M}} S_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m_+} \Delta^M a_k \prod_{i\in B} \widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i) \prod_{j\in M\setminus B} \mathcal{D}_{k_j}(x_j). \tag{15}$$

Из оценок (14), сходимости $\delta_{\varnothing,\varnothing}(a)$ и равенства (15) следует сходимость ряда (1) всюду в T^m_0, за исключением, быть может, точек множества $E^{|M\setminus B|}$, и равномерная сходимость в T^m_ε, $\varepsilon > 0$. Обозначим сумму ряда (1) через $s(x)$, тогда $s(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m_+} \Delta^M a_k \prod_{i\in B} \widetilde{\mathcal{D}}_{k_i}(x_i) \prod_{j\in M\setminus B} \mathcal{D}_{k_j}(x_j)$.

Используя лемму 1, оценим интеграл $J := \int\limits_{T_0^m} |s(x)|\, dx$. С этой целью преобразуем подынтегральное выражение

$$J = \frac{1}{2^m} \int\limits_{T_0^m} \Bigg(\Bigg| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \Delta^M a_k \prod_{i \in B} \cos\left(k_i + \frac{1}{2}\right) x_i \times$$

$$\times \prod_{j \in M \setminus B} \sin\left(k_j + \frac{1}{2}\right) x_j \Bigg| \Big/ \prod_{i \in M} \sin \frac{x_i}{2} \Bigg)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \int\limits_{T_0^m} \Bigg(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \Delta^M a_k \prod_{i \in B} \cos(2k_i + 1) \frac{x_i}{2} \prod_{j \in M \setminus B} \sin(2k_j + 1) \frac{x_j}{2} \Bigg| \Big/ \prod_{i \in M} x_i \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \int\limits_{T_0^m} \Bigg(\Bigg| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \Delta^M a_k \prod_{i \in B} \cos(2k_i + 1) x_i \prod_{j \in M \setminus B} \sin(2k_j + 1) x_j \Bigg| \Big/ \prod_{i \in M} x_i \Bigg)\, dx.$$

Далее воспользуемся оценкой (13), взяв в качестве $f(x)$ сумму ряда

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \Delta^M a_k \prod_{i \in B} \cos(2_{ki} + 1) x_i \prod_{j \in M \setminus B} \sin(2k_j + 1) x_j. \qquad (16)$$

Поскольку ряд (16) сходится абсолютно (по условию теоремы 1 $\delta_{\varnothing,\varnothing}(a) < \infty$), то он является рядом Фурье своей суммы $f(x)$. Продолжим $f(x)$ четным образом по переменным x_j, $j \in G$, и нечетным по x_i, $i \in \in M \setminus G$. Полученную функцию обозначим через $f_G(x)$. Изменяя $G \subset M$, получим множество функций $\{f_G(x)\}$, $G \subset M$. Разложение функции $f_G(x)$ в ряд Фурье будет иметь вид

$$s[f_G] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m - |W|} \sum_{\substack{k_j = 1 \\ j \in B \cap (M \setminus G)}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j = 0 \\ j \in G \cap (M \setminus B)}}^{\infty} \sum_{l_W \in \mathbb{Z}_+^{|W|}} \Delta^M a_{l_W, k_{M \setminus W}} \times$$

$$\times \prod_{j \in B \cap (M \setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j + 2k_j + 1} - \frac{1}{2l_j - 2k_j + 1} \right) \times$$

$$\times \prod_{j \in G \cap (M \setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j + 2k_j + 1} + \frac{1}{2l_j - 2k_j + 1} \right) \prod_{i \in B \cap G} \cos(2k_i + 1) x_i \times$$

$$\times \prod_{i \in (M \setminus B) \cap G} \cos 2k_i x_i \prod_{i \in B \cap (M \setminus G)} \sin 2k_i x_i \prod_{i \in M \setminus (B \cup G)} \sin(2k_i + 1) x_i,$$

где $W = (B \cup G) \setminus (B \cap G)$.

Согласно лемме 1 справедливо неравенство $J \leqslant C\chi_M(a)$, где

$$\chi_M(a) := \sum_{G \subset M} \sum_{\substack{k_j = 1 \\ j \in B \cap (M \setminus G)}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j = 0 \\ j \in G \cap (M \setminus B)}}^{\infty} \Bigg| \sum_{\substack{l_j = 0 \\ j \in W}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M \setminus W}} \times$$

$$\times \prod_{j \in B \cap (M \setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j + 2k_j + 1} - \frac{1}{2l_j - 2k_j + 1} \right) \times$$

$$\times \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\Bigg|, \quad W=(B\cup G)\setminus(B\cap G).$$

Упростим слагаемые в правой части последнего неравенства, а именно покажем, что

$$\chi_M(a)\leqslant C\sum_{G\subset M}\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\right|,$$

$$W=(B\cup G)\setminus(B\cap G). \tag{17}$$

Пусть $G\cap(M\setminus B)=\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$, тогда

$$\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\right|+$$

$$+\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}}^{\infty}\left|\sum_{l_{j_1}=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus\{j_1\}}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\frac{2}{2l_{j_1}+1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\sum_{k_{j_2}=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1,j_2\}}}^{\infty}\left|\sum_{l_j=0, j\in W}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\times\right.$$

$$\times\prod_{j\in B\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}\right)-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\right|+\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1,j_2\}}}^{\infty}\left|\sum_{l_{j_2}=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_2}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\times\right.$$

$$\times\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)+$$

$$\left.+\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_2}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-k_j+1}\right)\frac{1}{2l_{j_2}+1}\right|+$$

$$
+2\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in G\cap(M\setminus B)}}^{\infty}\Bigg|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_1}}^{\infty}\Delta^M a_{l_{W\setminus j_1},k_{M/(W\setminus j_1)}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\Bigg|\leqslant
$$

$$
\leqslant\sum_{\substack{k_{j_i}=1\\ i=1,2}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1,j_2\}}}^{\infty}\Bigg|\sum_{l_j=0}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\Bigg|+
$$

$$
+2\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in G\cap(M\setminus B)}}^{\infty}\Bigg|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_1}}^{\infty}\Delta^M a_{l_{W\setminus j_1},k_{M\setminus(W\setminus j_1)}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\Bigg|+
$$

$$
+2\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}}^{\infty}\Bigg|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_2}}^{\infty}\Delta^M a_{l_{W\setminus j_2},k_{M\setminus(W/j_2)}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2j_1-2k_{j_1}+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_2}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right).
$$

Продолжая этот процесс далее, получаем неравенство (17).

Для слагаемого, соответствующего $l_{j_1}=k_{j_1}$, выполняется соотношение

$$
\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\Bigg|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_1}}^{\infty}\Delta^M a_{l_{W\setminus j_1},k_{M\setminus(W\setminus j_1)}}\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{1}{4k_{j_1}+1}+1\right)\Bigg|\leqslant C\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\Bigg|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_1}}^{\infty}\Delta^M{}_{l_{W\setminus j_1},k_{M\setminus(W\setminus j_1)}}\times
$$

$$
\times\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times
$$

$$
\times\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right).
$$

Ясно, что подобное неравенство будет справедливым при любом $\bar{j} \in W$, поэтому

$$\chi_M(a) \leqslant C \sum_{G\subset M} \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W,\, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M{}_{l_W, k_{M\setminus W}} \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} + \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\right|.$$

В правой части последнего неравенства заменим множители $1/(2l_j+2k_j+1) \pm 1/(2l_j-2k_j+1)$ на $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_j+k_j} \pm \frac{1}{l_j-k_j}\right)$ и покажем, что допущенная при этом погрешность не будет превышать величину $C \sum_{G\subset M, G\neq M} p_G(a)$, где

$$p_G(a) := \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W,\, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{l_j+k_j} - \frac{1}{l_j-k_j}\right) \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{l_j+k_j} - \frac{1}{l_j-k_j}\right)\right|,$$

$W = (B\cup G)\setminus(B\cap G)$.

Таким образом, будет доказано, что

$$\chi_M(a) \leqslant C \sum_{G\subset M} p_G(a). \tag{18}$$

При фиксированном множестве G оценим разность

$$R_G(a) = \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W,\, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \times \right.$$

$$\times \left(\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) - \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j} - \frac{1}{2l_j-2k_j}\right) \times$$

$$\left.\left. \times \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j} + \frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\right)\right|.$$

Для этого представим $R_G(a)$ в виде

$$R_G(a) = \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W,\, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \left(\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) \prod_{j\in (G\cap(M\setminus B))\setminus j_1} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} + \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2l_{j_1}+2k_{j_1}+1} - \frac{1}{2l_{j_1}+2k_{j_1}} + \frac{1}{2l_{j_1}-2k_{j_1}+1} - \frac{1}{2l_{j_1}-2k_{j_1}}\right) +$$

$$+\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\left(\frac{1}{2l_{j_1}+2k_{j_1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2l_{j_1}-2k_{j_1}}\right)-\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j}-\frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\times$$

$$\left.\left.\times\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j}-\frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\right)\right|.$$

Поскольку $\sum\limits_{k_{j_1}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2l_{j_1}\pm 2k_{j_1}}-\frac{1}{2l_{j_1}\pm 2k_{j_1}+1}\right)\leqslant C$, то

$$R_G(a)\leqslant C\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W/j_1}}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M/W}}^{\infty}\sum_{\substack{l_{j_1}=0\\ l_{j_1}\neq k_{j_1}}}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W\setminus j_1,\, l_1\neq k_1}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\times\right.$$

$$\times\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\left.\times\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus j_1}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\right|+$$

$$+\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W,\, l_j\neq k_j}}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\left(\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1,j_2\}}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2l_{j_1}+2k_{j_1}}+\frac{1}{2l_{j_1}-2k_{j_1}}\right)\left(\frac{1}{2l_{j_2}+2k_{j_2}+1}-\frac{1}{2l_{j_2}+2k_{j_2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2l_{j_2}-2k_{j_2}+1}-\frac{1}{2l_{j_2}-2k_{j_2}}\right)+\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\prod_{j\in(G\cap(M\setminus B))\setminus\{j_1,j_2\}}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1}+\frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times\prod_{j=j_1,j_2}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j}+\frac{1}{2l_j-2k_j}\right)-\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\prod_{j\in G\cap(M\setminus B)}\left(\frac{1}{2l_j+2k_j}+\frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\right)\right|. \tag{19}$$

Для упрощения записи в первом слагаемом правой части неравенства (19) заменим l_{j_1} на k_{j_1}. После проведения оценок будем иметь

$$R_G(a) \leqslant C \sum_{\substack{k_j=1 \\ j\in W\setminus j_1}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0 \\ j\in M\setminus (W\setminus j_1)}}^{\infty} \Bigg| \sum_{\substack{l_j=0 \\ j\in W\setminus j_1, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_{W\setminus j_1}, k_{M\setminus (W\setminus j_1)}} \times$$

$$\times \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times \prod_{j\in (G\cap(M\setminus B))\setminus j_1} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\Bigg| +$$

$$+ C \sum_{\substack{k_j=1 \\ j\in W\setminus j_2}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0 \\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \sum_{l_{j_2}=0}^{\infty} \Bigg| \sum_{\substack{l_j=0 \\ j\in W, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \times$$

$$\times \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times \prod_{j\in (G\cap(M\setminus B))\setminus \{j_1, j_2\}} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} + \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\left(\frac{1}{2l_{j_1}+2k_{j_1}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2l_{j_1}-2k_{j_1}}\right)\Bigg| + \sum_{\substack{k_j=1 \\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0 \\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \Bigg| \sum_{\substack{l_j=0 \\ j\in W, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \times$$

$$\times \Bigg(\prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} - \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right)\times$$

$$\times \prod_{j\in (G\cap(M\setminus B))\setminus \{j_1, j_2\}} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j+1} + \frac{1}{2l_j-2k_j+1}\right) \prod_{j=j_1, j_2} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2l_j-2k_j}\right) - \prod_{j\in B\cap(M\setminus G)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j} - \frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\times$$

$$\times \prod_{j\in G\cap(M\setminus B)} \left(\frac{1}{2l_j+2k_j} + \frac{1}{2l_j-2k_j}\right)\Bigg)\Bigg|.$$

Продолжая этот процесс далее, получаем неравенство $R_G(a) \leqslant C \sum\limits_{G\subset M, G\neq M} p_G(a)$. Отсюда следует соотношение (18).

Оценим $p_G(a)$ при каждом фиксированном G. Ради простоты изложения выкладки проведем при $B = \{1\}$, $G = \{2\}$. В этом случае $W = \{1, 2\}$. Представим сумму, стоящую под знаком модуля в выражении для $P_G(a)$, в виде

$$\sum_{\substack{l_j=0 \\ j\in W, l_j\neq k_j}}^{\infty} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \left(\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}} - \frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\right)\left(\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}} + \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}\right) =$$

$$= \sum_{l_j=0}^{[k_j/2]-1} \left(\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}} - \frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\right)\left(\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}} - \frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}\right)+$$

$$+\sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]-1}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{\infty}\left(\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}-\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\right)\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}+$$

$$+\sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]-1}\ \sum_{\substack{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]\\ l_{j_2}\neq k_{j_2}}}^{[3k_{j_2}/2]}\left(\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}-\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\right)\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}+$$

$$+\sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]-1}\ \sum_{l_{j_2}=[3k_{j_2}/2]+1}^{\infty}\left(\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}-\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\right)\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}+$$

$$+\sum_{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=0}^{[k_{j_2}/2]}\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}\left(\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}+\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}\right)+$$

$$+\sum_{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}+\sum_{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]\\ l_{j_2}\neq k_{j_2}}}^{[3k_{j_2}/2]}\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}\times$$

$$\times\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}+\sum_{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=[3k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}-$$

$$-\sum_{\substack{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]\\ l_{j_1}\neq k_{j_1}}}^{[3k_{j_1}/2]}\ \sum_{l_{j_2}=0}^{[k_{j_2}/2]-1}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\left(\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}+\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}\right)-$$

$$-\sum_{\substack{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]\\ l_{j_1}\neq k_{j_1}}}^{[3k_{j_1}/2]}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}-\sum_{\substack{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]\\ l_{j_1}\neq k_{j_1}}}^{[3k_{j_1}/2]}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{[3k_{j_2}/2]}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\times$$

$$\times\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}-\sum_{l_{j_1}=[k_{j_1}/2]}^{[3k_{j_1}/2]}\ \sum_{l_{j_2}=[3k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}-$$

$$-\sum_{l_{j_1}=[3k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=0}^{[k_{j_2}/2]-1}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\left(\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}-\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}\right)-$$

$$-\sum_{l_{j_1}=[3k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}-$$

$$-\sum_{l_{j_1}=[3k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]\\ l_{j_2}\neq k_{j_2}}}^{[3k_{j_2}/2]}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\,\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}-\sum_{l_{j_1}=[3k_{j_1}/2]}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=[3k_{j_2}/2]}^{\infty}\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}\times$$

$$\times\frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}\Bigg)\Delta^{M}a_{l_W,\,k_{M\setminus W}}=:\sum_{i=1}^{16}d_i(a,k).$$

Оценим величины $\mathfrak{D}_i(a)=\sum\limits_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum\limits_{\substack{k_j=1\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}|d_i(a,k)|$, $i=\overline{1,16}$. Поскольку $\frac{1}{l_{j_1}-k_{j_1}}-\frac{1}{l_{j_1}+k_{j_1}}=\frac{2}{k_{j_1}}+\frac{2l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2-l_{j_1}^2)}$, то, подставляя это соотношение в $d_1(a,k)$ и учитывая, что

$$\sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]-1}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}=-\Delta^{M\setminus j_1}a_{[k_{j_1}/2],l_{j_2},k_{M\setminus W}},\quad (a_{0,k_{M\setminus j_1}}=0),$$

будем иметь

$$\mathfrak{D}_1(a)=\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\left|\sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{[k_j/2]-1}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\left(\frac{2}{k_{j_1}}+\frac{2l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}-l_{j_1}^2)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}\right|\leqslant\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\frac{2}{k_{j_1}}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=0}^{[k_{j_2}/2]-1}\left|\Delta^{M\setminus j_1}a_{[k_{j_1}/2],l_{j_2},k_{M\setminus W}}\right|\frac{2l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}+$$

$$+\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{[k_j/2]-1}\left|\Delta^M a_{l_M,k_{M\setminus W}}\right|\frac{2l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2-l_{j_1}^2)}\,\frac{2l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}.$$

В правой части последнего неравенства меняем порядок суммирования, что возможно в силу условий теоремы. Тогда

$$\mathfrak{D}_1(a)\leqslant C\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\frac{1}{k_{j_1}}\sum_{l_{j_2}=0}^{\infty}\ \sum_{k_{j_2}=2l_{j_2}}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\left|\Delta^{M\setminus j_1}a_{[k_{j_1}/2],l_{j_2},k_{M\setminus W}}\right|\frac{l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}+$$

$$+\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_j=2l_j\\ j\in W}}^{\infty}\left|\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\right|\frac{l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2-l_{j_1}^2)}\,\frac{l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\frac{1}{k_{j_1}}\left|\ \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus j_1}}^{\infty}\left|\Delta^{M\setminus j_1}a_k\right|+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+^m\\ j\in W}}|\Delta^M a_k|\right)=C\,(\delta_{1;\varnothing}(a)+\delta_{\varnothing;\varnothing}(a)).$$

Для $\mathfrak{D}_2(a)$ имеем оценку

$$\mathfrak{D}_2(a)=\sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\left|\sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]-1}\ \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{\infty}\Delta^M a_{l_W,k_{M\setminus W}}\left(\frac{2}{k_{j_1}}+\frac{2l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2-l_{j_1}^2)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}\right|\leqslant C\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty}\frac{1}{k_{j_1}}\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\ \sum_{l_{j_2}=0}^{\infty}\ \sum_{k_{j_2}=1}^{2l_{j_2}}|\Delta^{M\setminus j_1}a_{[k_{j_1}/2],l_{j_2},k_{M\setminus W}}|\frac{1}{l_{j_2}+k_{j_2}}+$$

$$+C\sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_j=0\\ j\in W}}^{\infty}\ \sum_{k_{j_1}=2l_{j_1}}^{\infty}\ \sum_{k_{j_2}=1}^{2l_{j_2}}\frac{l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2-l_{j_2}^2)}\,\frac{l_{j_2}}{k_{j_2}^2-l_{j_2}^2}\leqslant C\,(\delta_{1;\varnothing}(a)+\delta_{\varnothing;\varnothing}(a)).$$

Оценим $\mathfrak{D}_3(a)$:

$$\mathfrak{D}_3(a) \leqslant \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \frac{2}{k_{j_1}} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{\substack{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]\\ l_{j_2}\neq k_{j_2}}}^{[3k_{j_2}/2]} \Delta^{M\setminus j_1} a_{[k_{j_1}/2], l_{j_2}, k_{M\setminus W}} \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}} \right| +$$

$$+ \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \sum_{l_{j_1}=0}^{[k_{j_1}/2]} \left| \sum_{\substack{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]\\ l_{j_2}\neq k_{j_2}}}^{[3k_{j_2}/2]} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}} \right| \frac{2l_{j_1}^2}{k_{j_1}(k_{j_1}^2 - l_{j_1}^2)}.$$

В силу неравенства

$$\left| \sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2]}^{[3k_{j_2}/2]} \Delta^M a_{l_W, k_{M\setminus W}} \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}} \right| \leqslant \left| \sum_{l_{j_2}=1}^{[k_{j_2}/2]} \frac{1}{l_{j_2}} \nabla_{l_{j_2}}^{j_2} (\Delta^M a_{l_{j_1}, k_{M\setminus j_1}}) \right| +$$

$$+ |\Delta^M a_{l_{j_1}, k_{j_2}-[k_{j_2}/2], k_{M\setminus W}}| \frac{1}{k_{j_2}-[k_{j_2}/2]},$$

и такого же неравенства для $\displaystyle\sum_{l_{j_2}=[k_{j_2}/2],\, l_{j_2}\neq k_{j_2}}^{[3k_{j_2}/2]} \Delta^{M\setminus j_1} a_{[k_{j_1}/2], l_{j_2}, k_{M\setminus W}} \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}}$.

имеем

$$\mathfrak{D}_3(a) \leqslant C \Bigg(\sum_{k_{j_1}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{j_1}} \sum_{k_{j_2}=2}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \left| \sum_{l_{j_2}=1}^{[k_{j_2}/2]} \frac{1}{l_{j_2}} \nabla_{l_{j_2}}^{j_2} (\Delta^{M\setminus j_1} a_k) \right| +$$

$$+ \sum_{k_{j_1}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{j_1}} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus j_1}}^{\infty} |\Delta^{M\setminus j_1} a_k| + \sum_{k_{j_2}=2}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus j_2}}^{\infty} \left| \sum_{l_{j_2}=1}^{[k_{j_2}/2]} \frac{1}{l_{j_2}} \nabla_{l_{j_2}}^{j_2} (\Delta^M a_k) \right| +$$

$$+ \sum_{k\in \mathbb{Z}_+^m} |\Delta^M a_k| \Bigg) \leqslant C (\delta_{1;2}(a) + \delta_{1;\varnothing}(a) + \delta_{\varnothing;2}(a) + \delta_{\varnothing;\varnothing}(a)).$$

Для $\mathfrak{D}_4(a)$ справедлива оценка

$$\mathfrak{D}_4(a) \leqslant \sum_{\substack{k_j=1\\ j\in W}}^{\infty} \frac{2}{k_{j_1}} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \sum_{l_{j_2}=[3k_{j_2}/2]+1}^{\infty} |\Delta^{M\setminus j_1} a_{[k_{j_1}/2], l_{j_2}, k_{M\setminus W}}| \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k_{j_1}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{j_1}} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus W}}^{\infty} \sum_{l_{j_2}=0}^{\infty} \sum_{k_{j_2}=1}^{[2l_{j_2}/3]} \frac{1}{l_{j_2}-k_{j_2}} |\Delta^{M\setminus j_1} a_{l_{j_2}, k_{M\setminus j_2}}| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k_{j_1}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{j_1}} \sum_{\substack{k_j=0\\ j\in M\setminus j_1}}^{\infty} |\Delta^{M\setminus j_1} a_k| \leqslant C\delta_{1;\varnothing}(a).$$

Аналогично оцениваются и остальные величины $\mathfrak{D}_i(a)$, $i = \overline{5, 16}$. Объединяя неравенства для $\mathfrak{D}_i(a)$, $i = \overline{1, 16}$, получаем оценку для $p_G(a)$, $G \subset \subset M$. Из этих оценок и неравенства (18) следует соотношение (10).

Выше было установлено, что ряд (1) при выполнении условий теоремы 1 сходится всюду в T_0^m, за исключением, быть может, точек множества $E_0^{|M\setminus B|}$ и равномерно сходится в T_ε^m, $\varepsilon > 0$. Тогда на основании результатов А. А. Талаляна (см. [2], утверждение 1, или [3]) заключаем, что ряд (1) является рядом Фурье своей суммы $s(x)$. Теорема 1 доказана.

Частные случаи теоремы 1 были доказаны в [23].

4. Сравнение условий Боаса—Теляковского с другими условиями интегрируемости кратных тригонометрических рядов. Достаточные условия, типа условий Г. А. Фомина [8], для ряда (1) при $B=\varnothing$ получены Ю. Л. Носенко [18, 20]. Он доказал, что если коэффициенты ряда (1) при $B=\varnothing$ удовлетворяют условию (9) и $\exists p>1$, для которого

$$F_{\varnothing}^{m}(p,\ a)=\sum_{k\in\mathbb{N}^m}\Big(\prod_{i\in M}\frac{1}{k_i}\sum_{l=k}^{\infty}|\Delta^M a_l|^p\Big)^{1/p}<\infty, \tag{20}$$

то ряд (1) сходится всюду на T_0^m, кроме, быть может, точек множества E_0^m, является рядом Фурье интегрируемой функции и справедлива оценка

$$\int_{T_0^m}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^m}2^{-\nu_k}a_k\prod_{i\in M}\cos k_ix_i\Big|\,dx\leqslant CF_{\varnothing}^{m}(p,\ a).$$

При $D\subset M$ и $1<p<\infty$ положим

$$F_D^m(p,\ a):=\sum_{k\in\mathbb{N}^m}\prod_{i\in D}\frac{1}{k_i}\Big(\prod_{j\in M\setminus D}\frac{1}{k_j}\sum_{\substack{l_j=k_j\\ j\in M\setminus D}}^{\infty}|\Delta^{M\setminus D}a_{l_{M\setminus D},k_D}|^p\Big)^{1/p}.$$

Теорема 2. *Существует постоянная $C_{p,m}$, зависящая только от p и m такая, что для любых p, $1<p\leqslant 2$, и $D\subset M$ справедливо неравенство*

$$\sum_{G\subset M}\delta_{D,G}(a)\leqslant C_{p,m}F_D^m(p,\ a).$$

При $m=1$ этот результат получен в [8] (лемма 2), при $m>1$ и $B=\varnothing$ — в [24]. В общем случае доказательство сводится к случаю $B=\varnothing$. При этом используется многомерный аналог известного неравенства Гильберта [25]: если $p>1$, $p'=p/(p-1)$, то $\forall\, a_k,\ b_l,\ k,\ l\in\mathbb{N}^m$ и $\forall\, n\in\mathbb{N}^m$ справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}{}'\,a_kb_l\prod_{i\in M}\frac{1}{k_i-l_i}\Big|\leqslant C(p)\Big(\sum_{k=-n}^{n}|a_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{l=-n}^{n}|b_l|^{p'}\Big)^{1/p'}, \tag{21}$$

где штрих у знака суммы обозначает исключение из суммирования членов с $k_i=l_i$, $i\in M$.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть для коэффициентов a_k ряда* (1) *выполняются условия* (9) *и $\exists p>1$ такое, что*

$$\sum_{D\subset B}F_D^m(p,a)<\infty. \tag{22}$$

Тогда: 1) *ряд* (1) *сходится всюду в T_0^m, за исключением, быть может, точек множества $E_0^{|M\setminus B|}$, сходимость равномерна в T_ε^m, $\varepsilon>0$;* 2) *функция $s(x)$, являющаяся суммой ряда* (1), *интегрируема на T_0^m, и выполняется неравенство*

$$\int_{T_0^m}|s(x)|\,dx\leqslant C\sum_{D\subset B}F_D^m(p,a);$$

3) *ряд* (1) *является рядом Фурье функции $s(x)$.*

При $m=1$ этот результат получен в [8], а при $m\geqslant 2$ и $B=\varnothing$ — в [20].

Если $\prod_{i\in B}k_i\neq 0$, то положим $b_k=a_k\prod_{i\in B}\frac{1}{k_i}$, где a_k, $k\in\mathbb{Z}_+^m$, — коэффициенты ряда (1). Если же $\prod_{i\in B}k_i=0$, то числа b_k можно задать произвольно, в частности, считать $b_k=0$.

Представляя ряд (1) как почленно продифференцированный по переменным x_i, $i \in B$, ряд из косинусов с коэффициентами b_k и исследуя условия интегрируемости последнего, С. А. Теляковский [16] доказал, что если коэффициенты a_k ряда (1) удовлетворяют условию (9) и существуют числа q_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, такие, что $q_k \to 0$, при $|k| \to \infty$, $|\Delta^M b_k| \leqslant q_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+^m$,

$$T_m(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{i \in B} k_i \prod_{j \in M} (k_j + 1) |\Delta^M q_k| < \infty, \tag{23}$$

то ряд (1) сходится равномерно в каждом кубе T_ε^m, $\varepsilon > 0$; функция $s(x)$, являющаяся суммой ряда (1), интегрируема на T_0^m и справедлива оценка

$$\int_{T_0^m} |s(x)|\, dx \leqslant 2^m T_m(q).$$

Покажем, что условие (23) является более ограничительным, чем (10). Для этого установим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты a_k ряда (1) удовлетворяют условию (9) и существуют числа q_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, такие, что $q_k \to 0$ при $|k| \to \infty$; $|\Delta^M b_k| \leqslant q_k$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+^m$, и выполняется условие (23). Тогда существует постоянная C_m, зависящая только от m, такая, что справедливо неравенство*

$$\sum_{D \subset B} \sum_{G \subset M} \delta_{D;G}(a) \leqslant C_m T_m(q).$$

Для доказательства этой теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $B = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset M$. Для любых векторов $\nu_B = (\nu_{j_1}, \nu_{j_2}, \ldots, \nu_{j_s})$, $\mu_B = (\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \ldots, \mu_{j_s}) = (\mu_{j_1}(k_{j_1}), \mu_{j_2}(k_{j_2}), \ldots, \mu_{j_s}(k_{j_s}))$, где $ck_i \leqslant \mu_i(k_i) \leqslant k_i$, $0 < c < 1$, $i \in B$, $\nu_B, \mu_B \in \mathbb{N}^{|B|}$, и чисел α_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, таких, что $|\alpha_k| \leqslant 1$, выполняется неравенство*

$$\sum_{\substack{k_i=1\\ i \in B}}^{\nu_i} \Big| \sum_{\substack{l_i=1\\ i \in B}}^{\mu_i(k_i)} \prod_{i \in B} \frac{1}{l_i} \nabla_{l_B}^{B} \alpha_k \Big| \leqslant C \prod_{i \in B} \nu_i. \tag{24}$$

Доказательство леммы проведем для $M = \{1, 2\}$ (в общем случае оно аналогично). При $m = 1$ и $\mu(k) = [k/2]$ эта лемма доказана в [6].

Положим $r_i = \nu_i + \mu_i(k_i)$, $r = (r_1, r_2)$, $P_d = \{k \in \mathbb{N}^2 \colon 1 \leqslant k_i \leqslant d_i,\ i = 1,2\}$,

$$x_k = \begin{cases} \operatorname{sign} \sum\limits_{\substack{l_i=1\\ i=1,2}}^{\mu_i(k_i)} \dfrac{1}{l_1 l_2} \nabla_l^{1,2} \alpha_k & \text{при } k \in P_\nu, \\ 0 & \text{при } k \in P_r / P_\nu, \end{cases}$$

$$y_l = y_{l_1,-l_2} = y_{-l_1,l_2} = y_{-l} = \alpha_l,\ l_i = 1, 2, \ldots, r_i,\ l = (l_1, l_2),\ y_{0,l_2},$$
$$y_{0,l_2} = y_{l_1,0} = y_{0,0} = 0.$$

Используя неравенство (21), при $p = 2$ будем иметь

$$\Big| \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{x_k y_l}{(k_1 - l_1)(k_2 - l_2)} \Big| \leqslant C \nu_1 \nu_2. \tag{25}$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{x_k y_l}{(k_1 - l_1)(k_2 - l_2)} = \sum_{k=1}^{\nu} x_k \Big(\sum_{l=-r}^{k-1} \frac{y_l}{(k_1 - l_1)(k_2 - l_2)} +$$

$$+\sum_{l_1=-r_1}^{k_1-1}\sum_{l_2=k_2+1}^{r_2}\frac{y_l}{(k_1-l_1)(k_2-l_2)}+\sum_{l_1=k_1+1}^{r_1}\sum_{l_2=-r_2}^{k_2-1}\frac{y_l}{(l_1-k_1)(l_2-k_2)}+$$

$$+\sum_{l=k+1}^{r}\frac{y_l}{(l_1-k_1)(l_2-k_2)}\Bigg)=\sum_{k=1}^{\nu}x_k\Bigg(\sum_{l=1}^{r+k}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k_1-l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=1}^{r_2+k_2}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+\sum_{l=1}^{r-k}\frac{y_{k+l}}{l_1l_2}\Bigg)=\sum_{k=1}^{\nu}x_k\sum_{l=1}^{\mu(k)}\frac{1}{l_1l_2}\nabla_l^{1,2}\alpha_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}x_k\Bigg(\sum_{l=\mu(k)+1}^{r+k}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2+k_2}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{y_{k_1-l_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k_1-l_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k_1-l_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2+k_2}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2+k_2}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+$$

$$+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k+l}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{y_{k+l}}{l_1l_2}+\sum_{l=\mu(k)+1}^{r-k}\frac{y_{k+l}}{l_1l_2}\Bigg)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}\left|\sum_{l=1}^{\mu(k)}\frac{1}{l_1l_2}\nabla_l^{1,2}\alpha_k\right|+\sum_{k=1}^{\nu}x_k\rho_k(r).$$

Из этого равенства на основании (25) получаем

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left|\sum_{l=1}^{\mu(k)}\frac{1}{l_1l_2}\nabla_l^{1,2}\alpha_k\right|\leqslant C\nu_1\nu_2+\sum_{k=1}^{\nu}|\rho_k(r)|.$$

Чтобы оценить сумму $\sum_{k=1}^{\nu}|\rho_k(r)|$, представим ее в виде

$$\sum_{k=1}^{\nu}|\rho_k(r)|=\sum_{k=1}^{\nu}\Bigg|\sum_{l=\mu(k)+1}^{2k+\mu(k)}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{2k_1+\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=2k_2+\mu_2(k_2)+1}^{k_2+r_2}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+$$

$$+\sum_{l_1=2k_1+\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{2k_2+\mu_2(k_2)}\frac{\nabla_{l_1}^{1}y_{k-l}}{l_1l_2}+\sum_{l=2k+\mu(k)+1}^{r+k}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+$$

$$+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{2k_2+\mu_2(k_2)}\frac{\nabla_{l_1}^{1}y_{k_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=2k_2+\mu_2(k_2)+1}^{r_2+k_2}\frac{\nabla_{l_1}^{1}y_{k_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+$$

$$+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{2k_1+\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{\nabla^2_{l_2}y_{k_1-l_1,k_2}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=2k_1+\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{\nabla^2_{l_2}y_{k_1-l_1,k_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{\nabla^1_{l_1}y_{k_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{\nabla^2_{l_2}y_{k_1+l_1,k_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{2k_1+\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k_1-l_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=2k_2+\mu_2(k_2)+1}^{r_2+k_2}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}-$$

$$-\sum_{l_1=2k_1+\mu_1(k_1)+1}^{r_1+k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{y_{k_1-l_1,k_2+l_2}}{l_1l_2}-\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{2k_2+\mu_2(k_2)}\frac{y_{k_1+l_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+$$

$$+\sum_{l=\mu(k)+1}^{r-k}\frac{y_{k+l}}{l_1l_2}.$$

Изменяя пределы суммирования и объединяя отдельные члены, **находим**

$$\sum_{k=1}^{\nu}|\rho_k(r)|=\sum_{k=1}^{\nu}\Bigg|\sum_{l=\mu(k)+1}^{2k+\mu(k)}\frac{y_{k-l}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{2k_1+\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{l_2+2k_2}-\frac{1}{l_2}\right)\times$$

$$\times y_{k_1-l_1,k_2+l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{2k_2+\mu_2(k_2)}\left(\frac{1}{l_1+2k_1}-\frac{1}{l_1}\right)\frac{1}{l_2}y_{k_1+l_1,k_2-l_2}+$$

$$+\sum_{l=\mu(k)+1}^{r-k}\left(\frac{1}{l_1+2k_1}-\frac{1}{l_1}\right)\left(\frac{1}{l_2+2k_2}-\frac{1}{l_2}\right)y_{k+l}+$$

$$+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{2k_2+\mu_2(k_2)}\frac{\nabla^1_{l_1}y_{k_1,k_2-l_2}}{l_1l_2}+\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=\mu_2(k_2)+1}^{r_2-k_2}\frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{l_2+2k_2}-\frac{1}{l_2}\right)\times$$

$$\times\nabla^1_{l_1}y_{k_1,k_2+l_2}+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{r_1-k_1}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\left(\frac{1}{l_1+2k_1}-\frac{1}{l_1}\right)\frac{1}{l_2}\nabla^2_{l_2}y_{k_1+l_1,k_2}+$$

$$+\sum_{l_1=\mu_1(k_1)+1}^{2k_1+\mu_1(k_1)}\sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)}\frac{\nabla^2_{l_2}y_{k_1-l_1,k_2}}{l_1l_2}\Bigg|.$$

Отсюда получаем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\nu}|\rho_k(r)|\leqslant C\Bigg(\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l=[c_1k]}^{[c_2k]}\frac{1}{l_1l_2}+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l_1=[c_1k_1]}^{[c_2k_1]}\sum_{l_2=[c_1k_2]}^{\infty}\frac{1}{l_1}\frac{k_2}{l_2(l_2+2k_2)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l_1=[c_1k_1]}^{\infty}\sum_{l_2=[c_1k_2]}^{[c_2k_2]}\frac{k_1}{l_1(l_1+2k_1)}\frac{1}{l_2}+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l=[ck]}^{\infty}\frac{k_1}{l_1(l_1+2k_1)}\frac{k_2}{l_2(l_2+2k_2)}+$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\nu_2}\sum_{l_2=[c_1k_2]}^{[c_2k_2]}\frac{1}{l_2}\sum_{k_1=1}^{\nu_1}\left|\sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)}\frac{1}{l_1}\nabla^1_{l_1}y_{k_1,k_2-l_2}\right|+\sum_{k_1=1}^{\nu_1}\sum_{l_1=[c_1k_1]}^{[c_2k_1]}\frac{1}{l_1}\times$$

$$\times \sum_{k_2=1}^{\nu_2} \left| \sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)} \frac{1}{l_2} \nabla^2_{l_2} y_{k_1-l_1,k_2} \right| + \sum_{k_2=1}^{\nu_2} \sum_{l_2=[c_1k_2]}^{\infty} \frac{k_2}{l_2(l_2+2k_2)} \times$$

$$\times \sum_{k_1=1}^{\nu_1} \left| \sum_{l_1=1}^{\mu_1(k_1)} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1} y_{k_1,k_2+l_2} \right| + \sum_{k_1=1}^{\nu_1} \sum_{l_1=[c_1k_1]}^{\infty} \frac{k_1}{l_1(l_1+2k_1)} \times$$

$$\times \sum_{k_2=1}^{\nu_2} \left| \sum_{l_2=1}^{\mu_2(k_2)} \frac{1}{l_2} \nabla^2_{l_2} y_{k_1+l_1,k_2} \right| \Bigg),$$

где C, c_1, c_2 — абсолютные положительные постоянные, не обязательно всюду одни и те же.

Повторяя те же рассуждения, которые применялись при доказательстве леммы 2 из [6], получаем

$$\sum_{r_i=1}^{\nu_i} \left| \sum_{l_i=1}^{\mu_i(k_i)} \frac{1}{l_i} \nabla^i_{l_i} y_k \right| \leqslant C\nu_i, \quad i = 1, 2. \tag{26}$$

На основании этих неравенств находим оценку $\sum_{k=1}^{\nu} |\rho_k(r) \leqslant C\nu_1\nu_2$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что для каждого слагаемого $\delta_{D;G}(a)$ справедлива оценка $\delta_{D;G}(a) \leqslant CT_m(q)$, $D \cap G = \varnothing$. Рассуждения будем проводить для $m = 2$ и $B = M$. (В общем случае они аналогичны.)

Поскольку

$$\Delta^M a_k = k_1k_2\Delta^M b_k - k_2\Delta^2 b_{k_1+1,k_2} - k_1\Delta^1 b_{k_1,k_2+1} + b_{k+1}, \tag{27}$$

то

$$\delta_{\varnothing;\varnothing}(a) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_+} k_1k_2 |\Delta^M b_k| + \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_+} k_2 |\Delta^2 b_{k_1+1,k_2}| + \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_+} k_1 |\Delta^1 b_{k_1,k_2+1}| +$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_+} |b_{k+1}| \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_+} k_1k_2q_k \leqslant CT_2(q).$$

Далее

$$\delta_{\varnothing;1}(a) \leqslant \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_2 \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1}(k_1\Delta^M b_k) \right| + \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_2 \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1}(\Delta^2 b_{k_1+1,k_2}) \right| +$$

$$+ \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} (k_1\Delta^1 b_{k_1,k_2+1}) \right| + \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1} b_{k+1} \right| = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(a).$$

Положим $q^*_k = \max_{l\geqslant k} q_l$, $\alpha_k = \frac{\Delta^M b_k}{q^*_k}$, тогда

$$\beta_1(a) \leqslant \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_2 \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1}(k_1q^*_k\alpha_k) \right| \leqslant \sum_{k_1=2}^{\infty} k_1 \sum_{k_2=0}^{\infty} k_2q^*_k \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} \nabla^1_{l_1}\alpha_k \right| +$$

$$+ \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_2 \left| \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1} ((k_1-l_1)\, q^*_{k_1-l_1,k_2} - k_1q^*_k)\, \alpha_{k_1-l_1,k_2} \right| +$$

$$+\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\left|\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\frac{1}{l_1}(k_1q_k^*-(k_1+l_1)q^*_{k_1+l_1,k_2})\alpha_{k_1+l_1,k_2}\right|=:\beta_1'(a)+\beta_1''(a)+\beta_1'''(a). \quad (28)$$

Оценим $\beta_1''(a)+\beta_1'''(a)$, изменив для этого порядок суммирования

$$\beta_1''(a)+\beta_1'''(a)\leqslant C\sum_{k_1=2}^{\infty}k_1\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\frac{1}{l_1}\nabla^1_{l_1}q_k^*=C\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}k_1k_2\times$$

$$\times\left(\sum_{l_1=k_1-[k_1/2]}^{k_1-1}\frac{q^*_{l_1,k_2}}{k_1-l_1}-\sum_{l_1=k_1+1}^{k_1+[k_1/2]}\frac{q^*_{l_1,k_2}}{l_1-k_1}\right)\leqslant C\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\sum_{l_1=1}^{\infty}l_1q^*_{l_1,k_2}\leqslant CT_2(q). \quad (29)$$

Для оценки $\beta_1'(a)$ возпользуемся приемом, с помощью которого доказывалась теорема 3 из [6]. После преобразования Абеля получим

$$\beta_1'(a)=\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\sum_{k_1=1}^{\infty}(k_1q_k^*-(k_1+1)q^*_{k_1+1,k_2})\sigma_{k_1}(k_2),\ \text{где}\ \sigma_{k_1}(k_2)=$$

$$=\sum_{\nu_1=2}^{k_1}\left|\sum_{l_1=1}^{[\nu_1/2]}\frac{1}{l_1}\nabla^1_{l_1}\alpha_h\right|.$$

В силу соотношения (26) (см. также [6], лемма 2) будем иметь $\sigma_{k_1}(k_2)\leqslant Ck_1$. Используя это неравенство, находим

$$\beta_1'(a)\leqslant C\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1(k_1q_k^*-(k+1)q^*_{k_1+1,k_2})\leqslant CT_2(q). \quad (30)$$

Из соотношений (28) — (30) следует $\beta_1(a)\leqslant CT_2(q)$.

Для $\beta_2(a)$ получаем оценку

$$\beta_2(a)=\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2\left|\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\frac{1}{l_1}\nabla^1_{l_1}\left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\Delta^{1,2}b_{\nu_1,k_2}\right)\right|\leqslant\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2\times$$

$$\times\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\frac{1}{l_1}\sum_{\nu_1=k_1+1-l_1}^{k_1+l_1}|\Delta^{1,2}b_{\nu_1,k_2}|\leqslant C\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}q^*_{k_1+1-l_1,k2}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k_1=2}^{\infty}k_1\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2q^*_{[k_1/2],k_2}\leqslant CT_2(q).$$

Аналогично оцениваются $\beta_3(a)$ и $\beta_4(a)$. В результате имеем $\delta_{\varnothing;1}(a)\leqslant\leqslant CT_2(q)$. Такая же оценка справедлива и для $\delta_{\varnothing;2}(a):\delta_{\varnothing;2}(a)\leqslant CT_2(q)$. Далее оценим $\delta_{\varnothing;\{1,2\}}(a)$. Учитывая равенство (27), имеем

$$\delta_{\varnothing;\{1,2\}}(a)\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l_1l_2}\nabla^{1,2}_l(k_1k_2\Delta^{1,2}b_h)\right|+\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l_1l_2}\nabla^{1,2}_l(k_2\Delta^2b_{k_1+1,k_2})\right|+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l_1l_2}\nabla^{1,2}_l(k_1\Delta^1b_{k_1,k_2+1})\right|+\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l_1l_2}\nabla^{1,2}_lb_{k+1}\right|=:\sum_{i=1}^{4}d_i(a). \quad (31)$$

Поскольку

$$\nabla_l^{1,2}(k_1k_2\Delta^{1,2}b_k) = (k_1 - l_1)(k_2 - l_2)\Delta^{1,2}b_{k-l} - (k_1 - l_1)(k_2 + l_2)\Delta^{1,2}b_{k_1-l_1,k_2+l_2} - $$
$$- (k_1 + l_1)(k_2 - l_2)\Delta^{1,2}b_{k_1+l_1,k_2-l_2} + (k_1 + l_1)(k_2 + l_2)\Delta^{1,2}b_{k+l},$$

то

$$d_1(a) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k_1k_2 \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l_1l_2} \nabla_l^{1,2}(\Delta^{1,2}b_k)\Big| + \sum_{k=2}^{\infty} k_1 \sum_{l_2=1}^{[k_2/2]}\Big|\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1}\nabla_{l_1}^1(\Delta^{1,2}b_{k_1,k_2-l_2})\Big| +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} k_1 \sum_{l_2=1}^{[k_2/2]}\Big|\sum_{l_1=1}^{[k_1/2]} \frac{1}{l_1}\nabla_{l_1}^1(\Delta^{1,2}b_{k_1,k_2+l_2})\Big| + \sum_{k=2}^{\infty} k_2 \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\Big|\sum_{l_2=1}^{[k_2/2]} \frac{1}{l_2}\nabla_{l_2}^2(\Delta^{1,2}b_{k_1-l_1,k_2})\Big| +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} k_2 \sum_{l_1=1}^{[k_1/2]}\Big|\sum_{l_2=1}^{[k_2/2]} \frac{1}{l_2}\nabla_{l_2}^2(\Delta^{1,2}b_{k_1+l_1,k_2})\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}(|\Delta^{1,2}b_{k-l}| +$$
$$+ |\Delta^{1,2}b_{k_1-l_1,k_2+l_2}| + |\Delta^{1,2}b_{k_1+l_1,k_2-l_2}| + |\Delta^{1,2}b_{k+l}|) =: \sum_{i=1}^{6} h_i(b). \quad (32)$$

Легко видеть, что для $h_6(b)$ справедливо соотношение

$$h_6(b) \leqslant CT_2(q). \quad (33)$$

Далее оценим $h_1(b)$. Для этого положим $\gamma_k := \operatorname{sign}\sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l_1l_2}\nabla_l^{1,2}(\Delta^{1,2}b_k)$, $\varphi(l) = (\varphi_1(l_1), \varphi_2(l_2))$, $\psi(l) = (\psi_1(l_1), \psi_2(l_2))$, где $k_i = \varphi_i(l_i)$ и $k_i = \psi_i(l_i)$ — функции обратные к $l_i = k_i - [k_i/2]$ и $l_i = k_i + [k_i/2]$. Тогда

$$h_1(b) = \sum_{k=2}^{\infty} k_1k_2\gamma_k \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l_1l_2}\nabla_l^{1,2}(\Delta^{1,2}b_k) = \sum_{l=1}^{\infty}\Delta^{1,2}b_l\Big(\sum_{k=l+1}^{\varphi(l)} \frac{k_1k_2\gamma_k}{(k_1-l_1)(k_2-l_2)} -$$
$$- \sum_{k_1=l_1+1}^{\varphi_1(l_1)}\sum_{k_2=\psi_2(l_2)}^{l_2-1} \frac{k_1k_2\gamma_k}{(k_1-l_1)(k_2-l_2)} - \sum_{k_1=\psi_1(l_1)}^{l_1-1}\sum_{k_2=l_2+1}^{\varphi_2(l_2)} \frac{k_1k_2\gamma_k}{(l_1-k_1)(l_2-k_2)} +$$
$$+ \sum_{k=\psi(l)}^{l-1} \frac{k_1k_2\gamma_k}{(l_1-k_1)(l_2-k_2)}\Big) = \sum_{l=1}^{\infty} l_1l_2\Delta^{1,2}b_l\Big(\sum_{k=1}^{\varphi(l)-l} \frac{\gamma_{l+k}}{k_1k_2} -$$
$$- \sum_{k_1=1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)} \frac{\gamma_{l_1+k_1,l_2-k_2}}{k_1k_2} - \sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\sum_{k_2=1}^{\psi_2(l_2)-l_2} \frac{\gamma_{l_1-k_1,l_2+k_2}}{k_1k_2} + \sum_{k=1}^{l-\psi(l)} \frac{\gamma_{l-k}}{k_1k_2}\Big) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} l_1\Delta^{1,2}b_l\Big(\sum_{k=1}^{\varphi(l)-l} \frac{1}{k_1}\gamma_{l+k} + \sum_{k_1=1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)} \frac{1}{k_2}\gamma_{l_1+k_1,l_2-k_2} -$$
$$- \sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\sum_{k_2=1}^{\varphi_2(l_2)-l_2} \frac{1}{k_2}\gamma_{l_1-k_1,l_2+k_2} - \sum_{k=1}^{l-\psi(l)} \frac{1}{k_1}\gamma_{l-k}\Big) + \sum_{l=1}^{\infty} l_2\Delta^{1,2}b_l\Big(\sum_{k=1}^{\varphi(l)-l} \frac{1}{k_2}\gamma_{l+k} -$$
$$- \sum_{k_1=1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)} \frac{1}{k_2}\gamma_{l_1+k_1,l_2-k_2} + \sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\sum_{k_2=1}^{\varphi_2(l_2)-l_2} \frac{1}{k_2}\gamma_{l_1-k_1,l_2+k_2} -$$

$$-\sum_{k=1}^{l-\psi(l)}\frac{1}{k_2}\gamma_{l-k}\Bigg)+\sum_{l=1}^{\infty}\Delta^{1,2}b_l\Bigg(\sum_{k=1}^{\varphi(l)-l}\gamma_{l+k}+\sum_{k_1=1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)}\gamma_{l_1+k_1,l_2-k_2}+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\sum_{k_2=1}^{\varphi_2(l_2)-l_2}\gamma_{l_1-k_1,l_2+k_2}+\sum_{k=1}^{l-\psi(l)}\gamma_{l-k}\Bigg)=\sum_{i=1}^{4}\eta_i(b). \qquad (34)$$

Поскольку

$$l_i-2\leqslant\varphi_i(l_i)-l_i\leqslant l_i,\quad \left[\frac{l_i-2}{3}\right]\leqslant l_i-\psi_i(l_i)\leqslant\left[\frac{l_i+3}{3}\right]+1,\quad i=1,2, \qquad (35)$$

то

$$|\eta_4(b)|\leqslant C\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2q_l\leqslant C\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2\sum_{\nu=l}^{\infty}|\Delta^{1,2}q_l|\leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}|\Delta^{1,2}q_\nu|\sum_{l=1}^{\nu}l_1l_2\leqslant CT_2(q). \qquad (36)$$

Теперь оценим $\eta_1(b)$:

$$|\eta_1(b)|=\left|\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2\Delta^{1,2}b_l\right|\Bigg(\sum_{k=1}^{l-\psi(l)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_l-\sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\sum_{k_2=l_2-\psi_2(l_2)+1}^{\varphi_2(l_2)-l_2}\frac{1}{k_1k_2}\times$$

$$\times(\gamma_{l_1-k_1,l_2+k_2}-\gamma_{l+k})-\sum_{k_1=l_1-\psi_1(l_1)+1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)}\frac{1}{k_1k_2}(\gamma_{l_1+k_1,l_2-k_2}-\gamma_{l+k})+$$

$$+\sum_{k=l-\psi(l)+1}^{\varphi(l)-l}\frac{1}{k_1k_2}\gamma_{l+k}\Bigg)\Bigg|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2q_l\left|\sum_{k=1}^{l-\psi(l)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_l\right|+$$

$$+C\sum_{l=1}^{\infty}l_1q_l\sum_{k_2=l_2-\psi_2(l_2)+1}^{\varphi_2(l_2)-l_2}\left|\sum_{k_1=1}^{l_1-\psi_1(l_1)}\frac{1}{k_1}\nabla_{k_1}^{1}\gamma_{l_1,l_2+k_2}\right|+C\sum_{l=1}^{\infty}l_2q_l\sum_{k_1=l_1-\psi_1(l_1)+1}^{\varphi_1(l_1)-l_1}\times$$

$$\times\left|\sum_{k_2=1}^{l_2-\psi_2(l_2)}\frac{1}{k_2}\nabla_{k_2}^{2}\gamma_{l_1+k_1,l_2}\right|+C\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2q_l=\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{3}\chi_i+\sum_{l=1}^{3}l_1l_2q_l\right). \qquad (37)$$

После применения преобразования Абеля для χ_1 получим неравенство

$$\chi_1=\sum_{l=1}^{\infty}l_1l_2\Delta^{1,2}q_l\sum_{\nu=1}\left|\sum_{k=1}^{\nu-\psi(\nu)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_k\right|-\sum_{l_1=1}^{\infty}l_1\Delta^1q_{l_1,l_2+1}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\nu-\psi(\nu)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_\nu\right|-\sum_{l=1}^{\infty}l_2\Delta^2q_{l_1+1,l_2}\sum_{\nu=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{\nu-\psi(\nu)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_k\right|+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}q_{l+1}\sum_{\nu=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{\nu-\psi(\nu)}\frac{1}{k_1k_2}\nabla_k^{1,2}\gamma_k\right|.$$

В силу соотношений (35) и (24) будем иметь

$$\chi_1\leqslant\Bigg(\sum_{l=1}^{\infty}(l_1^2l_2^2|\Delta^{1,2}q_l|+l_1^2l_2|\Delta^1q_{l_1,l_2+1}|+l_1l_2^2|\Delta^2q_{l_1+1,l_2}|+l_1l_2q_{l+1}\Bigg)\leqslant CT_2(q). \qquad (38)$$

Проводя преобразование Абеля по l_1 в выражении для χ_2, находим

$$\chi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} l_1 \Delta^1 q_l \sum_{k_2=l_2-\psi_2(l_2)+1}^{\varphi_2(l_2)-l_2} \sum_{\nu_1=1}^{l_1} \left| \sum_{k_1=1}^{\nu_1-\psi_1(\nu_1)} \frac{1}{k_1} \nabla^1_{k_1} \gamma_{\nu_1, l_2+k_2} \right| -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} q_{l_1+1, l_2} \sum_{k_2=l_2-\psi_2(l_2)+1}^{\varphi_2(l_2)-l_2} \sum_{\nu_1=1}^{l_1} \left| \sum_{k_1=1}^{\nu_1-\psi_1(\nu_1)} \frac{1}{k_1} \nabla^1_{k_1} \gamma_{\nu_1, l_2+k_2} \right|.$$

На основании неравенств (35) и (26) заключаем, что

$$\chi_2 \leqslant C \left(\sum_{l=1}^{\infty} l_1^2 l_2 \right) \Delta^1 q_l | + \sum_{l=1}^{\infty} l_1 l_2 q_{l_1+1, l_2} \Big) \leqslant C T_2(q). \tag{39}$$

В силу симметрии такая же оценка справедлива и для χ_3:

$$\chi_3 \leqslant C T_2(q). \tag{40}$$

Из соотношений (37) — (40) следует

$$|\eta_1(b)| \leqslant C T_2(q). \tag{41}$$

Таким же образом находятся оценки

$$|\eta_i(b)| \leqslant C T_2(q), \quad i = 2, 3. \tag{42}$$

На основании равенства (34), оценок (36), (41) и (42) заключаем, что

$$|h_1(b)| \leqslant C T_2(q). \tag{43}$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при оценке $h_1(b)$, находим

$$|h_i(b)| \leqslant C T_2(q), \quad i = \overline{2, 5}. \tag{44}$$

Объединяя соотношения (32), (33), (43) и (44), получаем

$$d_1(a) \leqslant C T_2(q). \tag{45}$$

Аналогично оцениваются величины $d_i(a)$

$$d_i(a) \leqslant C T_2(q), \quad i = 2, 3, 4. \tag{46}$$

Согласно (31), (45) и (46) имеем $\delta_{\varnothing;\{1,2\}}(a) \leqslant C T_2(q)$, что и завершает доказательство теоремы 3.

Из теорем 1 и 3 вытекает такое следствие.

Следствие 2 [16]. *Пусть коэффициенты a_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, ряда* (1) *удовлетворяют условиям* (9) *и $\exists$ числа q_k, $k \in \mathbb{Z}_+^m$, такие, что $q_k \to 0$, при $|k| \to \infty$, $|\Delta^M b_k| \leqslant q_k$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+^m$ и сходится ряд $T_m(q)$. Тогда ряд* (1) *сходится равномерно в каждом кубе T_ε^m, $\varepsilon > 0$: функция $s(x)$, являющаяся суммой ряда* (1), *интегрируема на T_0^m и справедлива* оценка

$$\int_{T_0^m} |s(x)| \, dx \leqslant C T_m(q).$$

В заключение приведем пример тригонометрического ряда, для которого условия Боаса—Теляковского (10) выполняются, а условия (22) и (23) не выполняются.

Пусть $m = 2$ и $B = \varnothing$. Положим $a_0 = a_{0,1} = a_{1,0} = a_1 = 1$; $a_{k_1,0} = a_{k_1,1} = \frac{1}{s_1^2}$ при $2^{s_1-1} < k_1 \leqslant 2^{s_1}$; $a_{0,k_2} = a_{1,k_2} = \frac{1}{s_2^2}$ при $2^{s_2-1} < k_2 < 2^{s_2}$;

$a_k = \frac{1}{s_1^2 s_2^2}$ при $2^{s_i} < k_i \leqslant 2^{s_i}$, $i = 1, 2$. Для ряда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} a_k \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \tag{47}$$

условия Боаса — Теляковского (10) выполняются. Действительно, так как $\Delta^{1,2} a_{2^{s_1}, 2^{s_2}} = \frac{(2s_1+1)(2s_2+1)}{s_1^2 (s_1+1)^2 s_2^2 (s_2+1)^2}$ и $\Delta^{1,2} a_k = 0$ для $k_i \neq 2^{s_i}$, $i = 1, 2$, то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} |\Delta^{1,2} a_k| = \sum_{s \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1 = 2^{s_1 - 1}+1}^{2^{s_1}} \sum_{k_2 = 2^{s_2-1}+1}^{2^{s_2}} |\Delta^{1,2} a_k| = \sum_{s \in \mathbb{N}^2} \frac{(2s_1+1)(2s_2+1)}{s_1^2 (s_1+1)^2 s_2^2 (s_2+1)^2} < \infty,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Big| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l_1 l_2} \nabla_l^{1,2} (\Delta^{1,2} a_k) \Big| = \sum_{k=2}^{\infty} \Big| \sum_{l_i = k_i - [k_i/2]}^{k_i + [k_i/2]} \frac{\Delta^{1,2} a_l}{(k_1 - l_1)(k_2 - l_2)} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{l \in \mathbb{N}^2} |\Delta^{1,2} a_l| \ln l_1 \ln l_2 = C \sum_{s \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_i = 2^{s_i - 1}+1}^{2^{s_i}} |\Delta^{1,2} a_k| \ln k_1 \ln k_2 <$$

$$\leqslant C \sum_{s \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{s_1^2 s_2^2} < \infty.$$

Таким же способом доказываются неравенства $\delta_{\varnothing;1}(a) < \infty$ и $\delta_{\varnothing;2}(a) < \infty$.

Поскольку при $p > 1$ условия $F_{\varnothing}^m (p; a) < \infty$ эквивалентны условиям $\sum_{s \in \mathbb{N}^2} 2^{s_1} 2^{s_2} \Big(\frac{1}{2^{s_1 - 1}} \frac{1}{2^{s_2 - 1}} \sum_{k_i = 2^{s_i - 1}+1}^{2^{s_1}} |\Delta^{1,2} a_k|^p \Big)^{1/p} < \infty$ (этот факт при $m = 1$ доказан в [8], а при $m > 1$ — в [24]), то проверим выполнение последних для приведенного выше ряда. При этом имеем

$$\sum_{s \in \mathbb{N}^2} 2^{s_1} 2^{s_2} \Big(\frac{1}{2^{s_1 - 1}} \frac{1}{2^{s_2 - 1}} \frac{(2s_1+1)^p (2s_2+1)^p}{(s_1(s_1+1) s_2 (s_2+1))^{2p}} \Big)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{\frac{2}{p}} \sum_{s \in \mathbb{N}^2} \frac{2^{s_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)} 2^{s_2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}}{s_1^2 (s_1 + 1) s_2^2 (s_2 + 1)} = \infty.$$

Пусть q_k, $k \in \mathbb{Z}_+^2$, таковы, что $q_k \to 0$ при $k_1 + k_2 \to \infty$ и $|\Delta^{1,2} a_k| \leqslant \leqslant q_k$. Покажем, что тогда $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} (k_1 + 1)(k_2 + 1) |\Delta^{1,2} q_k| = \infty$.

Поскольку справедливы неравенства

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} (k_1 + 1)(k_2 + 1) |\Delta^{1,2} q_k| \geqslant \sum_{s \in \mathbb{N}^2} 2^{s_1 - 1} 2^{s_2 - 1} \Big| \sum_{k_1 = 2^{s_1 - 1}}^{2^{s_1 - 1}} \sum_{k_2 = 2^{s_2 - 1}}^{2^{s_2 - 1}} \Delta^{1,2} q_k \Big| =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{N}^2} 2^{s_1 - 1} 2^{s_2 - 1} | q_{2^{s-1}} - q_{2^{s_1 - 1}, 2^{s_2}} - q_{2^{s_1}, 2^{s_2 - 1}} + q_{2^s} |,$$

то достаточно доказать расходимость последнего ряда. Допустим противное, т. е. что этот ряд сходится. Тогда должно выполняться соотношение

$\lim\limits_{s\to\infty} 2^{s_1-1}2^{s_2-1}\,|q_{2^{s}-1}-q_{2^{s_1}-1,2^{s_2}}-q_{2^{s_1},2^{s_2}-1}+q_{2^s}|=0$. Другими словами: $\forall\varepsilon>0\ \exists s^0=(s_1^0,s_2^0)$ такое, что $\forall s=(s_1,s_2)>s^0$ $(s>s^0\Rightarrow s_1>s_1^0,\ s_2>s_2^0)$ выполняются неравенства $-\dfrac{\varepsilon}{2^{s_1-1}2^{s_2-1}}<q_{2^s-1}-q_{2^{s_1}-1,2^{s_2}}-q_{2^{s_1};2^{s_2}-1}+q_{2^s}<$ $<\dfrac{\varepsilon}{2^{s_1-1}2^{s_2-1}}$. Складывая их при $s_i=s_i^0+1,\ s_i^0+2,\dots,s_i^0+k_i,\ i=1,2,$ $k_i\in\mathbb{N}$, получаем

$$q_{2^{s^0}}-q_{2^{s_1^0+k_1},2^{s_2^0}}-q_{2^{s_1^0},2^{s_2^0+k_2}}+q_{2^{s^0+k}}<\varepsilon\sum_{l_1=1}^{k_1-1}\frac{1}{2^{s_1^0+l_1}}\sum_{l_2=1}^{k_2-1}\frac{1}{2^{s_2^0+l_2}}\,.$$

Поскольку $\dfrac{(2s_1^0+1)(2s_2^0+1)}{(s_1^0(s_1^0+1)s_2^0(s_2^0+1))^2}\leqslant q_{2^{s^0}}$ и

$$\frac{(2(s_1^0+k_1)+1)(2(s_2^0+k_2)+1)}{((s_1^0+k_1)(s_1^0+k_1+1)(s_2^0+k_2)(s_2^0+k_2+1))^2}\leqslant q_{2^{s_0+k}},$$

то

$$\lim_{k_1+k_2\to\infty}(q_{2^{s_1^0+k_1},2^{s_2^0}}+q_{2^{s_1^0},2^{s_2^0+k_2}})\geqslant\frac{(2s_1^0+1)(2s_2^0+1)}{(s_1^0(s_1^0+1)s_2^0(c_2^0+1))^2}-\frac{\varepsilon}{2^{s_1-1}2^{s_2-1}}>0$$

при достаточно больших s_i^0, $i=1,2$. А это противоречит условию $\lim\limits_{k_1+k_2\to\infty} q_k=0$. Таким образом доказано, что для ряда (47) не существует чисел q_k, для которых бы выполнялись условия (23).

Теоремы 2 и 3, а также пример тригонометрического ряда (47), показывают, что условия Боаса—Теляковского (10) обобщают условия (22) и (23). Однако условия (22) и (23) в ряде случаев более удобны в применении, поскольку они являются более простыми, а значит, и более легко проверяемыми.

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
2. *Талалян А. А.* О единственности двойных тригонометрических рядов // Изв. АН АрмССР. Сер. мат.— 1985.— **20**, № 6.— С. 426—462.
3. *Талалян А. А.* О некоторых свойствах единственности кратных тригонометрических рядов и гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— **52**, № 3.— С. 621—650.
4. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Там же.— 1964.— **28**, № 6.— С. 1209—1236.
5. *Kano T.* Coefficients of some trigonometric series // J. Fac. Sci. Shinshu Univ.— 1968.— 3, N 2.— P. 153—162.
6. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки.— 1973.— **14**, № 3.— С. 317—328.
7. *Mazhar S. M.* On generalised quasi — convex seguence and its applications // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1977.— 8, N 6.— P. 784—790.
8. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки.— 1978.— 23, № 2.— С. 213—222.
9. *Теляковский С. А.* Об интегрируемости рядов по синусам // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— **163**.— С. 229—233.
10. *Фомин Г. А.* Об условиях интегрируемости тригонометрических рядов // Применение функцион. анализа в теории приближений.— Калинин: Калинин. ун-т, 1986.— С. 134—139.
11 *Хажалия В. Г.* *L*-интегрируемость тригонометрических рядов // Мат. анализ: Науч. тр. Тбил. политех. ин-та.— 1987.— № 2.— С. 92—98.
12. *Castav V.* Stanojevic, Vera B. Stanojevic. Generalizations of the Sidon — Telyakovskii theorem // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— **101**, N 4.— P. 679—684.
13. *Boas R. P.* Absolute convergence and integrability of trigonometric series // J. Rat. Mech. and Anal.— 1956.— 5, N 4.— P. 621—632.
14. *Бугров Я. С.* Приближение тригонометрическими полиномами функций многих переменных // Тр. науч. об-ния преподавателей физ.-мат. фак. пед. ин-тов Дальнего Востока. Хабаровск. 1962.— 1 : Математика.— С. 28—49.
15. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.— 1964.— **63**, № 3.— С. 426—444.

16. *Теляковский С. А.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Тр. Мат ин-та АН СССР.— 1983.— **164**.— С. 180—188.
17. *Носенко Ю. Л.* Об условиях типа Сидона интегрируемости двойных тригонометрических рядов // Теория функций и отображений.— Киев : Наук. думка, 1978.— С. 132—149.
18. *Носенко Ю. Л.* Достаточные условия интегрируемости двойных тригонометрических рядов // Теория функций и приближений: Тр. 2-й Саратов. зим. шк.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.— С. 55—59.
19. *Носенко Ю. Л.* Достаточные условия интегрируемости двойных тригонометрических рядов из косинусов // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— **180**.— С. 166—168.
20. *Носенко Ю. Л.* О достаточных условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Сарат. зим. шк. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990.— Ч. 3.— С. 45—47.
21. *Кузнецова О. И.* Об одном условии интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Докл. расшир. заседаний сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.— 1985.— **1**, № 2.— С. 87—90.
22. *Задерей П. В.* О многомерном аналоге одного результата Р. Боаса // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 380—383.
23. *Задерей П. В.* Условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов.— Киев, 1986.— С. 3—48.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.20).
24. *Задерей П. В.* Условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов и их сравнение // Некоторые вопросы приближения функций и их прил.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 50—60.
25. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.

Получено 22.02.91