УДК 517.946

В. С. Куйбида, соиск., А. К. Прикарпатский, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН Украины, Львов)

Параметрическая интегрируемость по Лаксу нелинейных динамических систем и задача расщепления многосолитонных сепаратрисных многообразий

Развивается новый аналитических подход к описанию класса параметрически интегрируемых по Лаксу нелинейных неоднородных динамических систем на функциональных многообразиях, обобщающий известный асимптотический [1] метод Митропольского. При заданной ε-деформации исходной динамической системы, $\varepsilon \to 0$, изучается проблема расщепления многосолитонных сепаратрисных многообразий на основе понятия обобщенной μ-функции Митропольского — Мельникова. В частном случае нелинейной динамической системы Кортевега—де Фриза—Бюргерса изучена структура расщепления гомоклинической сепаратрисной траектории в зависимости от параметров вложения солитонного многообразия в функциональное пространство.

Розвивається новий аналітичний підхід до опису класу параметрично інтегровних за Лаксом нелінійних неоднорідних динамічних систем на функціональних многовидах, який узагальнює відомий асимптотичний [1] метод Митропольського. При заданій ε-деформації вихідної динамічної системи, $\varepsilon \to 0$, вивчається проблема розщеплення багатосолітонних сепаратрисних многовидів на основі поняття узагальненої μ-функції Митропольського — Мельникова. Зокрема для нелінійної динамічної системи Кортевега—де Фріза—Бюргерса вивчена структура розщеплення гомоклінічної сепаратрисної траєкторії в залежності від параметрів вкладення солітонного многовиду в функціональний простір.

1. Предварительные сведения. Пусть на бесконечномерном функциональном многообразии $M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, где $m \in \mathbb{N}$, задана в общем случае неоднородная нелинейная динамическая система вида

$$u_t = K[u; x, t], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $K: M \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \to T(M)$ — гладкое векторное поле на M, $t \in \mathbb{R}_+$ — эволюционная переменная. С целью изучения интегрируемости динамической системы (1) по Лаксу [1—3] необходимо изучить наличие для нее бесконечной иерархии (неоднородных) законов сохранения $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, а также разрешимости неоднородного уравнения нетеровости $L_K\mathscr{L} + \partial\mathscr{L}/\partial t = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, т. е. операторного уравнения

$$d\mathscr{L}/dt - \mathscr{L}K'^* - K'\mathscr{L} = 0 \tag{2}$$

на многообразии M, где $\mathscr{L} : T^*(M) \to T(M)$ — неоднородный имплектический оператор на M [3].

Уравнение (2) решается стандартным асимптотическим μ-методом малого параметра [3]. Законы сохранения $\gamma_j \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, в случае интегрируемости (1) по Лиувиллю—Лаксу находятся из определяющего уравнения Лакса

$$d\varphi/dt + K'^*\varphi = 0. \tag{3}$$

Здесь $\varphi = \text{grad}\gamma \in T^*(M)$, $\gamma \in \mathscr{D}(M)$ — соответствующий закон сохранения (1), задающийся в явном виде формулой гомотопии Вольтерра:

$$\gamma = \int_0^1 d\lambda\,(\text{grad}\,\gamma\,[u\lambda],\, u), \tag{4}$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ — стандартная билинейная форма на $T^*(M) \times T(M)$.

Уравнение Лакса (3) решается с помощью асимптотического λ-разложения по спектральному параметру $\lambda \in C$ ассоциированной с (1) спектральной задачи типа Лакса $L[u;\lambda] f = 0$, $f \in L_2(\mathbb{R}; C^p)$, $p \in \mathbb{N}$,— некоторое число. Если $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ — пара согласованных на M неоднородных имплектических операторов для (1), решающих (2), то указанный выше L-оператор типа Лакса существует и является присоединенным к следующей эквивалентной спектральной задаче:

$$\Lambda\varphi = \tilde{\lambda}(t;\lambda)\,\varphi, \quad d\varphi/dt = -K'^*\varphi, \quad \tilde{\lambda}(t;\lambda) \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

причем зависимость «спектрального» параметра $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, от параметра $t \in R_+$ однозначно определяется разрешимостью уравнения Лакса (3) в специальном асимптотическом виде. Оператор $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ в (5) — так называемый наследственно рекурсионный оператор динамической системы (1), и для решения $\varphi(\lambda) \in T^*(M)$ справедливо общее представление $\varphi(\lambda) = \text{grad}\,\Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda) = \text{reg Tr}\,R[u;\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{C}$,— регуляризованный след резольвенты соответствующего оператора типа Лакса. Последний определяется по имеющейся информации стандартным градиентно-голономным алгоритмом [1, 2].

Рассмотрим теперь более подробно специальные асимптотические при $|\lambda| \to \infty$ решения уравнения Лакса (3). В общем случае неоднородной динамической системы (1) — оператор типа Лакса, если он существует, зависит явно от независимой переменной $x \in \mathbb{R}$, а спектральный параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, зависит явно от эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}_+$ для всех значений $u \in M$. Это последнее свойство можно использовать с целью определения явной зависимости $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, следующим образом. Пусть задана дуальная к (1) динамическая система $u_\tau = K[u;x,\tau]$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и соответствующая задача Коши $u|_{\tau=1} = \bar{u} \in M$. Тогда при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$ соответствующий спектральный параметр $\tilde{\lambda} \to \tilde{\lambda}(t;\lambda(t,\tau;\lambda))$, где $\lambda(t,\tau;\lambda) \in \mathbb{C}$ — эволюция параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ по переменной $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $t \in \mathbb{R}_+$ — параметр. Так как при $\tau = t \in \mathbb{R}_+$ $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda)$, то $\lambda(t,\tau;\lambda)|_{\tau=t} = \lambda \in \mathbb{C}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ в силу предположения о существовании для (1) представления типа Лакса.

Таким образом, мы имеем для (3) два асимптотических при $|\tilde{\lambda}(t;\lambda)| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, решения: $\tilde{\varphi}(\tau;\tilde{\lambda}) \in T^*(M)$, которое разрешает уравнение Лакса $\tilde{\varphi}_\tau + K'^*\tilde{\varphi} = 0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и $\varphi(t;\lambda) = \tilde{\varphi}(\tau;\tilde{\lambda})|_{\tau=t} \in T^*(M)$, $t \in \mathbb{R}_+$, разрешающее уравнение Лакса $\varphi_t + K'^*\varphi = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Согласованность этих двух решений при произвольном $u \in M$ приводит к однозначному определению зависимости параметра $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, от эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}_+$.

Ниже рассматривается описанная выше схема доказательства интегрируемости по Лаксу на некоторых типичных примерах нелинейных однородных динамических систем, имеющих приложения в теоретической и математической физике, а также гидродинамике.

2. Параметрически интегрируемая по Лаксу нелинейная неавтономная динамическая система Шредингера. Пусть динамическая система (1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \psi_t &= -\psi/2t + i\psi_{xx} + 2i\psi^*\psi^2 \\ \psi_t^* &= -\psi^*/2t - i\psi_{xx}^* - 2i\psi\psi^{*2} \end{aligned}\right\} = K[\psi, \psi^*; t], \tag{6}$$

где вектор $(\psi, \psi^*)^\tau \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$, $t \in \mathbb{R}_+$ — эволюционная переменная. Оператор $K'^*: T^*(M) \to T^*(M)$ в (5) для (6) имеет вид

$$K'^* = \left\| \begin{matrix} -1/2t + i\partial^2 + 4i\psi^*\psi & -2i\psi^{*2} \\ 2i\psi^2 & -1/2t - i\partial^2 - 4i\psi^*\psi \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

В силу явной зависимости динамической системы (6) от эволюционного параметра $t \in \mathbb{R}_+$ изучим методом работы [3] решения уравнения Лакса (3) при значении параметра $t = \tau \in \mathbb{R}_+$. А именно, считаем, что решение $\varphi(\tau; \tilde{\lambda}(t)) \in T^*(M)$ уравнения Лакса

$$\tilde{\varphi}_\tau + K'^* \cdot \tilde{\varphi} = 0, \quad u_\tau = K[u; \tau], \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

зависит от двух переменных $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, причем зависимость от переменной $t \in \mathbb{R}_+$ индуцирована t-зависимостью L-оператора типа Лакса для (6), а зависимость от переменной $\tau \in \mathbb{R}_+$ — индуцирована τ-зависимостью решения $u = (\psi, \psi^*)^\tau \in M$ в уравнении (8). Спектральный параметр $\tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$ при $\tau = 1$ зависит от произвольного числа $\lambda \in \mathbb{C}$, которое в силу эволюции (8) будет зависеть при $\tau \in [1, t) \subset \mathbb{R}_+$ от переменных $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, т. е. $\lambda = \lambda(t, \tau; \lambda)$, причем $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=1} = \lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=t} = \lambda \in \mathbb{C}$. Последнее равенство означает, что у оператора $L[u; \tilde{\lambda}(t; \lambda)]$ представления типа Лакса для динамической системы (6) при $\tau = t \in \mathbb{R}_+$ спектральный параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$, причем $d\lambda/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим решение уравнения (8) при $|\tilde{\lambda}(t; \lambda)| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\lambda}) = (1, \quad \tilde{b}(\tilde{\lambda}))^\tau \exp[\ln \tau^{1/2} + \tilde{\lambda}x - i\tilde{\lambda}^2\tau + \partial^{-1}\tilde{\sigma}(\tilde{\lambda})], \tag{9}$$

где справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\tilde{b}(\tilde{\lambda}) \cong \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{b}_j[u; x, \tau]\,\tilde{\lambda}^{-j}, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{\lambda}) \cong \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\sigma}_j[u; x, \tau]\,\tilde{\lambda}^{-j}. \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в (8), для всех $j + 2 \in \mathbb{Z}_+$ находим бесконечную систему рекуррентных соотношений вида

$$\begin{gathered} \partial^{-1}\sigma_{j,\tau} + 2i\tilde{\sigma}_{j+1} + i\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_k + i\tilde{\sigma}_{j,x} + 4i\psi^*\psi\delta_{j,0} - 2i\psi^{*2}\tilde{b}_j = 0, \\ \tilde{b}_{j,\tau} + 2\tilde{b}_{j-k}\partial^{-1}\tilde{\sigma}_{k,\tau} - 2i\tilde{b}_{j+2} - 2i\psi^{*2}\tilde{b}_{j-k}\tilde{b}_k + 2i\psi^2\delta_{j,0} - \\ - i\tilde{b}_{j,xx} - 2i\tilde{b}_{j+1,x} - 2i\tilde{b}_{j+1-k,x}\tilde{\sigma}_k = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Разрешая (11), находим

$$\widetilde{b}_0 = \widetilde{b}_1 = 0, \quad \widetilde{\sigma}_1 = -2\psi^*\psi, \quad \widetilde{b}_2 = -\psi^2, \ldots,$$

$$\widetilde{\sigma}_2 = -i\partial^{-1}(\psi^*\psi)/\tau + (\psi_x\psi^* - \psi_x^*\psi) + (\psi^*\psi)_x, \quad \widetilde{b}_3 = -\psi\psi_x, \tag{12}$$

$$\widetilde{\sigma}_3 = i\psi^*\psi/2\tau - 4(\psi^*\psi)^2 - (\psi_x\psi^* - \psi_x^*\psi)_x/2 - (\psi_{xx}\psi^* - \psi_{xx}^*\psi) + \psi_x^*\psi_x - -\partial^{-1}(\partial^{-1}(\psi^*\psi)/\tau^2), \ldots.$$

В силу своего построения, функционал $\widetilde{\gamma}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} dx\widetilde{\sigma}(\widetilde{\lambda}(\tau;\lambda))|_{\tau=t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, должен быть законом сохранения динамической системы (6) при условии априорного существования представления типа Лакса. Отсюда, учитывая явные выражения (12), имеем $\widetilde{\lambda}(t;\lambda) = \lambda t^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, т. е. все функционалы $\widetilde{\gamma}_j = \int\limits_{\mathbb{R}} dx\widetilde{\sigma}_j[u; x, t]\, t^j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — законы сохранения динамической системы (6), т. е. $d\widetilde{\gamma}_j/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая теперь, что функция $\varphi(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\lambda})|_{\tau=t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет уравнению Лакса (3), находим

$$\varphi(\lambda) = (1, b(\lambda))^\tau \exp[\ln t^{1/2} + \lambda x/t + i\lambda^2/t + \partial^{-1}\sigma(\lambda)], \tag{13}$$

где при $|\lambda| \to \infty$

$$b(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j[u; x, t]\,\lambda^{-j}, \quad \sigma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u; x, t]\,\lambda^{-j}. \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в (3), получаем следующую иерархию рекуррентных уравнений:

$$\begin{gathered}\partial^{-1}\sigma_{j,t} - x/t^2\delta_{j,-1} + 2i/t\sigma_{j+1} + i\sigma_{j-k}\sigma_k + 4i\psi^*\psi\delta_{j,0} - 2i\psi^{*2}b_j = 0,\\ b_{j,t} - x/t^2 b_{j+1} - 2i/t^2 b_{j+2} - 2i/t b_{j+1-k}\sigma_k - ib_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_s + b_{j-k}\partial^{-1}\sigma_{k,t} + \\ + 2i\psi^2\delta_{j,0} - ib_{j,xx} - 2i/t b_{j+1,x} - 2ib_{j-k,x}\sigma_k - ib_{j-k}\sigma_{k,x} - 4i\psi^*\psi b_j = 0\end{gathered} \tag{15}$$

для всех $j + 2 \in \mathbb{Z}_+$. Разрешая последовательно соотношения (15), находим

$$\sigma_0 = -ix/2t, \quad \sigma_1 = -2\psi^*\psi t,$$

$$\sigma_2 = ixt + \psi^*\psi + t^2(\psi_x\psi^* - \psi_x^*\psi)/\mathrm{mod}\,(d/dx), \ldots,$$

и т. д., причем, как легко видеть, законы сохранения $\widetilde{\gamma}_j = \gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, где, по определению, для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $|\lambda| \to \infty$

$$\widetilde{\gamma}(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\gamma}_j\lambda^{-j}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} dx\widetilde{\sigma}(\widetilde{\lambda}(t;\lambda))|_{\tau=t} = \widetilde{\gamma}(\lambda), \quad \int\limits_{\mathbb{R}} dx\sigma(\lambda) = \gamma(\lambda).$$

Итак, установлено наличие бесконечной иерархии законов сохранения $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{N}$, динамической системы (6) в рамках градиентно-голономного алгоритма [3], предполагающего существование представления типа Лакса. С целью его явного определения согласно тому же градиентно-голономному алгоритму [2] необходимо определить согласованную неоднородную имплектическую $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пару для (6), решающую уравнение нетеровости (2). При этом в силу неавтономности динамическая система (6) имеет представление $u_t = -\mathcal{L}\varphi_1 = -\mathcal{M}\varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in T^*(M)$ — некоторые специальные решения уравнения Лакса (3).

Применяя к (2) асимптотический μ-метод малого параметра [3], легко установить, что

$$\mathcal{L} = \left\| \begin{matrix} 0 & t^{-1} \\ -t^{-1} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathcal{M} = \left\| \begin{matrix} -2\psi\partial^{-1}\psi & -\partial - x/4t + 2\psi\partial^{-1}\psi^* \\ -\partial + x/4t + 2\psi^*\partial^{-1}\psi & -2\psi^*\partial^{-1}\psi^* \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Ассоциированный L-оператор типа Лакса с $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-парой (16) после несложных вычислений имеет вид

$$L[\psi, \psi^*; x, t; \lambda] = \frac{d}{dx} - \left\| \begin{matrix} \lambda/t + ix/4t & i\psi \\ i\psi^* & -\lambda/t - ix/4t \end{matrix} \right\|, \tag{17}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольный спектральный параметр.

Аналогичные результаты могут быть последовательно установлены в рамках разработанного выше подхода [3] также для следующих нелинейных неоднородных динамических систем на функциональных многообразиях;

а) неоднородная динамическая система Кортевега—де Фриза:

$$u_t = u_{3x} + 6uu_x + \varepsilon(2u + xu_x) = K[u; x, \varepsilon], \tag{18}$$

$u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр. В этом случае для (18) существует представление типа Лакса с L-оператором вида

$$L[u; \tilde{\lambda}] = -\partial^2 + u - \tilde{\lambda}^2(t; \lambda), \tag{19}$$

где спектральный параметр $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda \exp(2\varepsilon t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$;

б) «цилиндрическое» уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = -u_{3x} - uu_x - u/2t = K[u; t], \tag{20}$$

где $u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Динамическая система (20) обладает [3] согласованной имплектической $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-парой вида $\mathcal{L} = t^{-1}\partial$,

$$\mathcal{M} = \partial^3 + u\partial/3 + \partial u/3 - (x\partial + \partial x)/6t \tag{21}$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$, причем ассоциированный L-оператор типа Лакса для (21) имеет вид [4]

$$L[u; \tilde{\lambda}] = -\partial^2 - u/6 + x/(12t) - \tilde{\lambda}(t; \lambda), \tag{22}$$

где $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda/t$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$;

в) неоднородная нелинейная динамическая система Шредингера:

$$\left.\begin{aligned} \psi_t &= i\psi_{xx} + 2i\psi^*\psi^2 - 2\varepsilon ix\psi \\ \psi_t^* &= -i\psi_{xx}^* - 2i\psi\psi^{*2} + 2\varepsilon ix\psi^* \end{aligned}\right\} = K[\psi, \psi^*; x], \tag{23}$$

где $u = (\psi, \psi^*)^\tau \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр. Динамическая система (23) интегрируема по Лаксу на M, причем L-оператор типа Лакса задается выражением

$$L[u; \tilde{\lambda}] = d/dx - \left\| \begin{matrix} -i\tilde{\lambda} & \psi^* \\ \psi & i\tilde{\lambda} \end{matrix} \right\|,$$

где $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda + 2\varepsilon t$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$;

г) неоднородная гидродинамическая система типа Бенни — (I):

$$\left.\begin{aligned} u_t &= -uu_x - v_x \\ v_t &= -[(v - \varepsilon x)u]_x - u_{3x} \end{aligned}\right\} = K_{(1)}[u, v; x], \tag{24}$$

где $(u, v)^\tau \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — произвольный действительный параметр. Динамическая система (24) на M — интегрируема по Лаксу, причем соответствующий L-оператор задается выражением

$$L[u, v; \tilde{\lambda}] = -\partial^2 + i\tilde{\lambda}u/2 + (v - \varepsilon x)/4 - u^2/16 + \tilde{\lambda}^2,$$

где $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda + i\varepsilon t/4,\ \lambda \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$;

д) неоднородная гидродинамическая система типа Бенни — (II):

$$\left.\begin{aligned} u_t &= -(xu^2)_x/2 - (xv)_x - v \\ v_t &= -(xuv)_x - (xu)_{3x} - uv \end{aligned}\right\} = K_{(11)}[u, v; x], \tag{25}$$

где $(u, v)^\tau \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Соответствующий (25) L-оператор типа Лакса задается следующим явным выражением:

$$L[u, v; \tilde{\lambda}] = -\partial^2 + i\tilde{\lambda}u/2 + v/4 - u^2/16 + \tilde{\lambda}^2,$$

где $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = 1/(2i(t + \lambda)),\quad \lambda \in \mathbb{C}/\{-t\},\ t \in \mathbb{R}$;

е) модифицированная неоднородная нелинейная динамическая система Шредингера:

$$\left.\begin{aligned} \psi_t &= i(x\psi)_{xx} - (x\psi^*\psi^2)_x - i\psi/2 \\ \psi_t^* &= -i(x\psi^*)_{xx} - (x\psi\psi^{*2})_x + i\psi^*/2 \end{aligned}\right\} = K[\psi, \psi^*; x], \tag{26}$$

где $u = (\psi, \psi^*)^\tau \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R};\ \mathbb{C}^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Динамическая система (26) также интегрируема по Лаксу, причем соответствующий L-оператор имеет вид

$$L[u; \tilde{\lambda}] = \frac{d}{dx} - \begin{Vmatrix} i\tilde{\lambda}^2 & i\tilde{\lambda}\psi \\ i\tilde{\lambda}\psi^* & -i\tilde{\lambda}^2 \end{Vmatrix},$$

где $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda/(1 - 2\lambda^2 t)^{1/2},\ \lambda \in \mathbb{C}/\{\pm(2t)^{-1/2}\},\ t \in \mathbb{R}_+$.

Во всех рассмотренных выше случаях нелинейных динамических систем установлена параметрическая по спектральному параметру $\tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, интегрируемость по Лаксу, включающая, в частности, наличие бесконечной иерархии глобальных по $t \in \mathbb{R}$ законов сохранения, находящихся в инволюции относительно согласованной имплектической $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пары неавтономных нетеровых операторов. В этом случае эволюция динамической системы (1) сохраняет априори существующую солитонную структуру ее орбит неизменной, несмотря на разрушенную в общем случае ее гамильтоновость. Ниже мы рассмотрим другой важный случай ε-возмущения гамильтоновости интегрируемой нелинейной динамической системы, в котором происходит разрушение исходной многосолитонной сепаратрисной структуры. В этом случае, естественно, динамическая система уже не имеет глобальной по $t \in \mathbb{R}$ иерархии законов сохранения, что характеризует ее как диссипативную систему, в которой возможна динамическая стохастизация траекторий [5, 6], лежащая в основе описания таких сложных физических явлений как турбулентность, фрактальная неустойчивость и др.

3. Расщепление многосолитонных сепаратрисных многообразий нелинейной динамической системы Кортевега — де Фриза — Бюргерса. Пусть на бесконечномерном гладком функциональном многообразии $M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ задана нелинейная автономная ε-деформация Бюргерса динамической системы Кортевега — де Фриза:

$$u_t = -6uu_x - u_{xxx} + \varepsilon u_{xx} = K[u; \varepsilon], \tag{27}$$

где $u \in M$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ — малый параметр, $\varepsilon \to 0$, $t \in \mathbb{R}$ — эволюционная переменная. При $\varepsilon = 0$ динамическая система (27), как известно [1, 7], имеет на многообразии M многосолитонные решения, представляющие собой гетероклинические сепаратрисные орбиты, соединяющие между собой особые точки (27) на ассоциированном топологическом джет-многообразии $J^{(\infty)}_{\mathrm{top}}$ ($\mathbb{R}$;

$\mathbb{R}$), которое в случае локальности на M ассоциированной бесконечной иерархии законов сохранения совпадает [2, 8] с обычным дифференциальным джет-многообразием $J^{(\infty)}_{\mathrm{diff}}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Предположим теперь, что при $\varepsilon \neq 0$ на M заданы данные Коши для (27) из конечномерного подмногообразия $M_n \subset\to M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которое определяется следующим образом:

$$M_n = \left\{u \in M : -\operatorname{grad}\gamma_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n} c_{nj}\operatorname{grad}\gamma_j\right\}, \tag{28}$$

где $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — законы сохранения интегрируемой по Лаксу [1, 7] динамической системы Кортевега — де Фриза (27) при $\varepsilon = 0$, $c_{nj} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, 2n}$, — некоторые фиксированные числа, определяющие n-солитонное подмногообразие в M, т. е. $\lim\limits_{|x|\to\infty} u_{mx}(x, t) = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$.

В этом случае при $\varepsilon = 0$ динамическая система (27) обладает представлением типа Лакса [1, 7], L-оператор Лакса которого имеет вид

$$L[u;\lambda] = -\partial^2 + u - \lambda, \tag{29}$$

причем $\lambda \in \mathbb{C}$, $d\lambda/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, спектр $\sigma(L)$ операции (29) в $L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ состоит из $n-1 \in \mathbb{Z}_+$ собственных отрицательных значений, удовлетворяющих условию изоспектральности: $d\sigma(L)/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим динамическую систему (27) при $\varepsilon \neq 0$. Тогда в общем случае возможны только две ситуации: или существует, возможно, отличный от (29), L-оператор типа Лакса с глобальной параметрической изоспектральной зависимостью $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольный спектральный параметр, $t \in \mathbb{R}$, или для любого возможного L-оператора типа Лакса, в частности для (29), индуцированная спектральная зависимость $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, не является глобальной по эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}$ и зависит явным образом от множества данных Коши для (27). В последнем случае интегрируемость по Лаксу динамической системы (27) априори будет нарушена, оставаясь таковой при $\varepsilon = 0$. В связи с этим возникает чрезвычайно важная для приложений проблема описания динамической структуры этого процесса разрушения устойчивых солитонных и квазипериодических лиувиллевских инвариантных многообразий.

Пусть $L[u; \tilde{\lambda}(t; \lambda)]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — произвольный, гладкий по Фреше оператор типа Лакса на многообразии M, ассоциированный с динамической системой (27) при $\varepsilon \neq 0$. Тогда в предположении интегрируемости (27) по Лаксу функция $\tilde{\varphi}(\tau; \tilde{\lambda}) = \operatorname{grad} \operatorname{tr} S(x; \tilde{\lambda}(t; \lambda)) \in T^*(M)$, $S(x; \tilde{\lambda})$ — матрица монодромии соответствующего L-оператора типа Лакса на оси $\mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению Лакса (3) для всех значений $t, \tau \in \mathbb{R}$ и данных Коши для (27) по переменной $\tau \in \mathbb{R}$. В этом случае всегда [1] существует его асимптотическое по $|\tilde{\lambda}(t; \lambda)| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, решение вида

$$\tilde{\varphi}(\tau; \tilde{\lambda}) = \exp[\tilde{\lambda}x - (\tilde{\lambda}^3 + \varepsilon\tilde{\lambda}^2)(\tau - ct) + \partial^{-1}\tilde{\sigma}(\tau; \tilde{\lambda})], \tag{30}$$

где $c \in \mathbb{R}$ — некоторый числовой параметр, и

$$\tilde{\sigma}(\tau; \tilde{\lambda}) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\sigma}_j[u]\,\tilde{\lambda}^{-j}. \tag{31}$$

Отметим здесь еще раз, что априори для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено следующее условие: $\tilde{\lambda} = \lambda(t; \lambda) \in \mathbb{C}$, где $\lambda = \lambda(t, \tau; \lambda)$, причем $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=0} = \lambda(t, \tau; \lambda)|_{t=\tau} = \lambda \in \mathbb{C}$.

В случае интегрируемости по Лаксу динамической системы (27) последнее указанное выше равенство должно выполняться для всех данных Коши в (8) в инвариантном виде.

Подставляя (30), (31) в (8), находим бесконечную иерархию рекуррентных уравнений

$$\partial^{-1}\tilde{\sigma}_{j,\tau}+\tilde{\sigma}_{j,xx}+3\tilde{\sigma}_{j-k,x}\tilde{\sigma}_k+3\tilde{\sigma}_{j+1,x}+3\tilde{\sigma}_{j+2}+3\tilde{\sigma}_{j+1-k}\tilde{\sigma}_k+2\varepsilon\tilde{\sigma}_{j+1}+$$
$$+\varepsilon\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_k+\varepsilon\tilde{\sigma}_{j,x}+6u\delta_{j,-1}+6u\tilde{\sigma}_j-\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_{k-s}\tilde{\sigma}_s=0,$$

где $j+2\in\mathbb{Z}_+$, разрешая которую, находим

$$\tilde{\sigma}_0=0,\quad \tilde{\sigma}_1=-2u,\quad \tilde{\sigma}_2=4\varepsilon u/3+2u_x,$$
$$\tilde{\sigma}_3=-2u^2-2u_{xx}-4\varepsilon u_x/3-8\varepsilon^2u/9,$$
$$\tilde{\sigma}_4=2u_{3x}+8uu_x-4\varepsilon u^2/3+4\varepsilon u_{xx}/3+8\varepsilon^2u_x/9+16\varepsilon^3u/27,\ \ldots,$$

и т. д. В силу общего алгоритма п. 1 настоящей работы функционал $\tilde{\gamma}(\tilde{\lambda})=\int\limits_{\mathbb{R}}dx\tilde{\sigma}(\tau;\tilde{\lambda}(t;\lambda))\in\mathcal{D}(M)$ при $\tau=t\in\mathbb{R}$ должен быть инвариантом исходной нелинейной динамической системы (27). Чтобы реализовать это условие, положим, что при $|\lambda|\to\infty$

$$\tilde{\lambda}^{-1}(t;\lambda)|_{\tau=t}\simeq s_1(t)\lambda^{-1}+s_2(t)\lambda^{-2}+s_3(t)\lambda^{-3}+\ldots, \tag{32}$$

где функции $s_j\in C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{N}$, в случае интегрируемости по Лаксу динамической системы (27) должны зависеть от переменной $t\in\mathbb{R}$ глобально и не зависеть от исходных данных Коши для (27).

Пусть, по определению, функционал $\gamma(\lambda)=\tilde{\gamma}(\tilde{\lambda})|_{\tau=t}$, $t\in\mathbb{R}$, и разложим его в бесконечный асимптотический ряд при $|\lambda|\to\infty$:

$$\gamma(\lambda)\simeq\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\gamma_j\lambda^{-j}, \tag{33}$$

где в силу (30) функционалы $\gamma_j\in\mathcal{D}(M)$, $j\in\mathbb{Z}_+$,—законы сохранения динамической системы (27). Подставляя (33) в (31), находим следующие функциональные соотношения:

$$\gamma_1=\int\limits_{\mathbb{R}}dxs_1(t)\tilde{\sigma}_1[u],\quad \gamma_2=\int\limits_{\mathbb{R}}dx\,(s_2(t)\tilde{\sigma}_1[u]+s_1^2(t)\tilde{\sigma}_2[u]),$$
$$\gamma_3=\int\limits_{\mathbb{R}}dx\,(s_3(t)\tilde{\sigma}_1[u]+2s_1(t)s_2(t)\tilde{\sigma}_2[u]+s_1^3(t)\tilde{\sigma}_3[u]),\ \ldots \tag{34}$$

и т. д., дающие возможность последовательно определить набор функций $s_j\in C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{N}$, из условий инвариантности $d\gamma_j/dt=0$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, имеем: для всех $t\in\mathbb{R}$

$$s_2(t)=1,\quad s_2(t)=0,\quad ds_3(t)/dt=2\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}}dxu_x^2/\int\limits_{\mathbb{R}}dxu,\ \ldots, \tag{35}$$

и т. д. Результат (35), в частности, свидетельствует, что в рамках спектральных разложений (32) для L-операторов типа Лакса динамическая система (27) при $\varepsilon\neq0$ в общем случае произвольных данных Коши не является интегрируемым по Лаксу полупотоком на M $t\in\mathbb{R}_+$. Итак, установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Нелинейная динамическая система Кортевега — де Фриза — Бюргерса на функциональном многообразии $M=C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ не интегрируема по Лаксу при всех $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ в классе L-операторов типа Лакса, регулярных при $\varepsilon\to0$.*

Приведенные выше рассуждения полностью доказывают теорему 1, если заметить только, что функция $s_3(t)$, $t\in\mathbb{R}$, согласно (35), зависит явно от данных Коши $u|_{t=0} \in M$ для (27), если функционал $\gamma_1 \in \mathcal{D}(M)$ не равен тождественно нулю. В последнем же случае функция $s_3(t)$, $t \in \mathbb{R}$, необходимо сингулярна, что эквивалентно неопределенности глобального по $t \in \mathbb{R}$ асимптотического разложения (32), регулярного при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 1. В общем случае произвольной нелинейной динамической системы $u_t = K[u; \varepsilon]$, $\varepsilon \to 0$, с заданной интегрируемой по Лаксу главной частью при $\varepsilon = 0$ соотношения вида (34) вместе с разложением (32) могут быть определяющими при альтернативной классификации [9] интегрируемых по Лаксу с точностью $O(\varepsilon^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ нелинейных динамических систем на многообразии M.

Установив неинтегрируемость по Лаксу динамической системы (27) при $\varepsilon \to 0$, можно предположить, согласно (32)—(35), что априорная при $\varepsilon = 0$ солитонная структура решений (27) при $t \to \infty$ и $\varepsilon \neq 0$ будет сильно разрушаться, т. е. становиться неустойчивой, приводя при определенных условиях на данные Коши (38) к явлению динамической стохастизации [5] орбит (27). С целью дальнейшего изучения этого явления воспользуемся методом работы [10], позволяющим дать эффективные критерии так называемого трансверсального расщепления гетероклинических сепаратрисных многообразий при $\varepsilon \to 0$.

Пусть сначала $n = 1$; тогда условие (28) принимает вид $\operatorname{grad} \mathcal{L}_1[u] = 0$, $u \in M$, где $\mathcal{L}_1[u] = u_x^2/2 - u^3 + c_{11}(-u/2) + c_{12}(-u^2/2)$, $c_{11}, c_{12} \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, или $u_{xx} + 3u^2 + c_{11}/2 + c_{12}u = 0$, $u \in M_1 \hookrightarrow M$.

При $\varepsilon=0$ динамическая система (27) на $M_n \hookrightarrow M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, гамильтонова [1], причем на M_1 имеем

$$u_0 = u \in M_1, \quad p_0 = \partial \mathcal{L}_1/\partial u_x = u_x \in M_1,$$
$$du_0/dx = p_0 = \{h_2, u_0\},$$
$$dp_0/dx = -3u_0^2 - c_{12}u_0 - c_{11}/2 = \{h_1, p_0\}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} du_0/dt &= c_{12}p_0 = \{f_1, u_0\}, \\ dp_0/dt &= c_{12}(-3u_0^2 - c_{12}u_0 - c_{11}/2) = \{f_1, p_0\} \end{aligned} \tag{36}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Здесь $\{\cdot, \cdot\}$ — каноническая скобка Пуассона [1, 8, 11] на M и

$$h_1(u_0, p_0) = p_0 du_0/dx - \mathcal{L}_1(u_0, p_0),$$
$$f_1(u_0, p_0) = c_{12}h_2(u_0, p_0)$$

— соответствующие функции Гамильтона для векторных полей d/dx и d/dt на M_1, $x, t \in \mathbb{R}$.

Решая уравнения (36) в случае $c_{11} = 0$, находим стандартное односолитонное решение уравнения (27) при $\varepsilon = 0$:

$$u_0^s(x, t - t_0) = -c_{12}/2\operatorname{ch}^2(\sqrt{-c_{12}}(x + c_{12}(t - t_0))/2), \tag{37}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ и $c_{12} \in \mathbb{R}_-$; $x \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$ в (27) и рассмотрим многообразие M, т. е. множество сепаратрисных решений (37), в качестве данных Коши для (27). В силу доказанной выше интегрируемости (27) при $\varepsilon \neq 0$ многообразие $M_1 \hookrightarrow M$ неинвариантно относительно потока (27), поэтому при $t \to \infty$ исходная сепаратриса (37) на многообразии M_1 будет разрушаться, приводя к ее расщеплению и дальнейшей стохастизации в области гиперболической особой точки векторного поля (27). Таким образом, на подмногообразии M_1 динамическая система (27) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} du_0/dt &= c_{12}p_0 - \varepsilon u_0(3u_0 + c_{12}) \\ dp_0/dt &= -c_{12}u_0(3u_0 + c_{12}) - \varepsilon p_0(6u_0 + c_{12}) \end{aligned}\right\} = K(u_0, p_0; \varepsilon), \tag{38}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$. Представим далее для удобства векторное поле (38) на

M_1 в виде

$$(u_0, p_0)_t^\tau = K(u_0, p_0; \varepsilon) = K(u_0, p_0) + \varepsilon F(u_0, p_0), \tag{39}$$

где $F \in T(M_1)$ — так называемое эффективное диссипативное возмущение гамильтоновой системы (36) на M_1, $\varepsilon \to 0$. Чтобы установить, согласно методу работы [10], трансверсальность расщепления гомоклинической сепаратрисы (37) на M_1, прежде всего заметим, что векторное поле $K(u_0, p_0) \in T(M_1)$ на M_1 имеет две особые точки: $(\bar{u}_0, \bar{p}_0) = (0, 0) \in M_1$ — гиперболическая седловая точка и $(-c_{12}/3, 0) \in M_1$ — эллиптическая — типа центр.

Обозначим через $\sigma_\varepsilon^\pm(t, t_0) \in T(M_1)$ компоненты расщепления входящего и выходящего «усов» $\Gamma^\pm(t, t_0)$ сепаратрисы (37) при $\varepsilon \to 0$ и $t \to \pm\infty$. Тогда можно записать [10], что

$$\sigma_\varepsilon^\pm(t, t_0) = \bar{\sigma}_0(t, t_0; t_0)\, \pi^\pm(t_0) + \int\limits_{\pm\infty}^{t} d\tau \bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0)\, F(\tau - t_0) + O(\varepsilon). \tag{40}$$

Здесь $\varepsilon \to 0$, $\bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0)$ — фундаментальное решение линейного неоднородного уравнения в «вариациях постоянной» по $\operatorname{mod} O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, т. е. $\bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0)|_{\tau=t} = 1$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, и

$$d\sigma_\varepsilon^\pm/dt = K' \cdot \sigma_\varepsilon^\pm + F(t - t_0) + O(\varepsilon), \tag{41}$$

где $K' = K'(u_0^s(t - t_0), p_0^{(s)}(t - t_0))$ — матрица Якоби, $\pi^\pm \in T(M_1)$ — нормировочные постоянные векторы, $t, t_0 \in \mathbb{R}$. В терминах компонент расщепления (40) условие трансверсальности «усов» $\Gamma^\pm(t, t_0)$ в момент $t = t_0 \in \mathbb{R}$ записывается как

$$\sigma_\varepsilon^+(t_0, t_0) - \sigma_\varepsilon^-(t_0, t_0) = O(\varepsilon), \tag{42}$$

причем равенство (42) по параметру $t_0 \in \mathbb{R}$ имеет простые нули. Чтобы эффективно сформулировать условие (42), рассмотрим следующую μ-функцию Митропольского — Мельникова: $\mu(t_0; s) = \mu(t, t_0; s)|_{t=t_0}$, $s \in \mathbb{R}$,

$$\mu(t, t_0; s) = \det \| \alpha_0 + sK,\ \sigma_\varepsilon^+ - \sigma_\varepsilon^- \| (t, t_0), \tag{43}$$

где $\alpha_0 \in T(M_1)$ — второе линейно-независимое с $K \in T(M_1)$ векторное поле на M_1, коммутирующее с ним, т. е. $d\alpha/dt - K' \cdot \alpha = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим здесь также, что фундаментальная матрица $\bar{\sigma}_0(t, \tau;, t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, состоит именно из таких векторов, т. е. справедливо соотношение

$$\bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0) = \| K, \alpha_0 \| (t - t_0) \| K, \alpha_0 \|^{-1} (\tau - t_0) \tag{44}$$

для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Предположим в (43) $t = t_0$. Тогда, очевидно, $\mu(t_0; s) = 0$, $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$, в точке пересечения «усов» $\Gamma^\pm(t, t_0)$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Вычисляя функцию $\mu(t_0; s)$, $s \in \mathbb{R}$, методом Мельникова [12], находим

$$\mu(t_0; s) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt\, | \alpha_0 + sK,\ F | (t, t_0) + \Delta\mu(t_0; s), \tag{45}$$

где $| \ldots | = \det \| \ldots \|$ и для всех $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\Delta\mu(t_0; s) = \lim_{t \to \infty} | \alpha_0 + sK,\ \sigma_\varepsilon^+ | (t, t_0) - \lim_{t \to -\infty} | \alpha_0 + sK, \sigma_\varepsilon^- | (t, t_0), \tag{46}$$

и при выводе мы учли, что $\operatorname{tr} K' = 0$ в силу гамильтоновости (38) при $\varepsilon = 0$.

В силу произвольности параметра $s \in \mathbb{R}$ из (45) находим, что для $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$

$$\mu(\bar{t}_0; 0) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt\, | \alpha_0, F | (t, \bar{t}_0) + \Delta\mu(\bar{t}_0; 0) = 0, \tag{47}$$

$$\mu'(\bar{t}_0; 0) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt\, | K, F | (t, \bar{t}_0). \tag{48}$$

Условие (47) следует из того, что $|\Delta\mu(t_0; s)| < \infty$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, так как $\det\|\alpha_0, K\|(t - t_0) = \text{const} \neq 0$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, а также в силу очевидных асимптотических условий при $t \to \pm\infty$

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t - t_0) = 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} |\alpha_0(t - t_0)| = \infty. \tag{49}$$

Необходимо также отметить, что условие (47) существенно, поскольку оно гарантирует отсутствие особенностей в поведении системы при ненулевом возмущении в (38). В противном случае один из пределов в (46) неопределен и происходит бифуркация сепаратрисы в окрестности особой точки. Мы этот случай рассматривать не будем.

Итак, выше установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть параметр* $t = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ *таков, что выполнены условия* (47), (48), *причем равенство* (48) *в точке* $\bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ *имеет простой нуль. Тогда в возмущенной динамической системе* (38) *происходит трансверсальное расщепление сепаратрисы* (37). *В противном случае, когда нарушены условия* (47), (48), *в частности,* $\mu'(t_0; 0) > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, *расщепленный «ус»* $\Gamma^-(t, t_0)$ *при* $t \to \infty$ *навивается вокруг второй эллиптической особой точки динамической системы* (38), *а «ус»* $\Gamma^+(t, t_0)$ *при* $t \to -\infty$ *уходит в неограниченную область многообразия* M_1. *При* $\mu'(t_0; 0) < 0$ *все, описанное выше, аналогично с точностью до замены «уса»* $\Gamma^+(t, t_0)$ *на «ус»* $\Gamma^-(t, t_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$. *Если же* $\mu'(t_0; 0) = 0$ *для всех* $t_0 \in \mathbb{R}$, *происходит только деформация формы сепаратрисы* (37) *без ее расщепления.*

Замечание 2. В силу явного вида (37) односолитонного решения динамической системы (27) при $\varepsilon = 0$, условие (48), очевидно, является условием как на числовой параметр $c_{12} \in \mathbb{R}_-$, так и на пространственную координату $x \in \mathbb{R}$, при которых может происходить явление расщепления. В частности, расщепление может происходить при условии, что $c_{12} = c_{12}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, т. е. может распространяться в пространстве по оси $\mathbb{R}$, что приводит к новой форме пространственной стохастизации орбит (27), индуцированной из стохастизации динамической.

Как видно из приведенных выше выражений (47), (48), при определении условий реализации трансверсального расщепления сепаратрисы (37) необходимо выполнить ряд глобальных интегрирований по параметру $t \in \mathbb{R}$ с компонентами весовой матричной функции $\bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$,— фундаментального решения уравнения (41). В общем случае легко заметить, что если $\alpha_1, \alpha_2 \in T(M_1)$ — базисные решения линейного уравнения $\alpha_t = K'(u_0, p_0)\,\alpha$, $t \in \mathbb{R}$, то всегда в роли $\alpha_1 \in T(M_1)$ можно взять само векторное поле $K(u_0, p_0) \in T(M_1)$, т.е. $\alpha_1 = K(u_0, p_0)$ и в роли $\alpha_2 \in T(M_1)$ — любое линейно независимое с $\alpha_1 \in T(M_1)$ выражение вида $\alpha_2 = (\alpha_{1,1}\partial_t^{-1} \times (\alpha_{1,1})^{-2}, (\alpha_{1,1}\partial^{-1}(\alpha_{1,1})^{-2})_x)^\tau$, $x \in R$. Пусть $f^+ \in W_2^{(2)}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ — решение линейного уравнения типа Лакса

$$-f_{xx} - u_0 f = c_{12} f, \tag{50}$$

являющееся собственной функцией оператора Лакса $L(u; \lambda)$. Так как $\alpha_1 = ((f^+)^2_x, (f^+)^2_{xx})^\tau$, $x \in \mathbb{R}$, где $f^\pm \in W_2^{(2)}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$—собственная функция уравнения (50), всегда определяемая для n-солитонных, $n \in \mathbb{Z}_+$, решений (27) в явном виде [7], в частном случае $n = 1$ находим $-f^+_{xx} - u_0 f^+ = c_{12} f^+$ и

$$f^+(x, t) = \sqrt{-c_{12}}/\operatorname{ch}\{-2\sqrt{-c_{12}}(x + c_{12}(t - t_0))\}, \tag{51}$$

причем $u_0(x, t) = (f^+(x, t))^2/2$, $x, t \in \mathbb{R}$.

Чтобы найти теперь решение $f^- \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ уравнения (50), достаточно воспользоваться методом вариации постоянных $f^-(x, t) = f^+(x, t)\, g(x, t)$, где функция $g(\cdot, t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, определяется явно из следующего линейного уравнения первого порядка $g_x = k(f^+)^{-2}$, k — некоторая ненулевая постоянная. Таким образом, окончательно получаем результат (см. (44))

$$\bar{\sigma}_0(t, \tau; t_0) = \|\alpha_1(x, t), \quad \alpha_2(x, t)\|\, C(\tau, t_0), \quad k = 1, \tag{52}$$

где матрица констант $C(\tau, t_0)$, $\tau, t_0 \in \mathbb{R}$, определяется однозначно по формуле

$$C(\tau, t_0) = \| \alpha_1(x, \tau), \alpha_2(x, \tau) \|^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Полученные явные выражения для сепаратрисы (37) и фундаментального решения (52) уравнения (41) дают возможность установить аналитическим путем поведение ее расщепленных ветвей $\Gamma^+(t, t_0)$, $\Gamma^-(t, t_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$. При этом если μ-функция (48) тождественно равна нулю, то сепаратриса $\Gamma(t, t_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, не разрушается, а только деформируется; если же μ-функция (48) знакоопределена при всех $t_0 \in \mathbb{R}$, то происходит расщепление сепаратрисы, причем одна из ветвей, Γ^-, выходит из гиперболической особой точки и наматывается по спирали на вторую (эллиптическую) особую точку при $t \to \infty$, а вторая ветвь, Γ^+, проходит из некомпактной области многообразия M_1 и входит в гиперболическую особую точку при $t \to \infty$. Именно последний случай реализуется в общем случае в динамической системе Кортевега — де Фриза — Бюргерса (27) при $\varepsilon \to 0$, так как в этом случае происходит диссипация энергии системы в сторону ее уменьшения. В частности, из формул (35) следует, что $d\tilde{\lambda}/dt > 0$ при $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, что приводит к уменьшению по модулю собственного значения уравнения типа Лакса (50), а тем самым, к уменьшению амплитуды и скорости движения солитона по орбите Γ^+. Особый случай сепаратрисы (37), когда выражение (48) равно нулю, будет рассмотрен в следующем разделе.

З а м е ч а н и е 3. Как указывалось выше, в случае n-солитонных данных Коши для динамической системы (27), $n \in \mathbb{Z}_+$, уравнение типа Лакса

$$-f_{j,xx} + u(x, t) f_j = \tilde{\lambda}_j(t) f_j, \tag{53}$$

$j = \overline{1, n}$, при $\varepsilon = 0$ обладает ровно $n \in \mathbb{Z}_+$ явными решениями — собственными функциями $f_j^+ \in W_2^{(2)}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $j = \overline{1, n}$, определяемыми по методу обратной задачи теории рассеяния [7], поскольку в этом случае $d\tilde{\lambda}_j/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$. Так как для построения фундаментального решения уравнения (41) на многообразии $T(M_n)$ размерности $2n \in \mathbb{Z}_+$ необходимо найти еще $n \in \mathbb{Z}_+$ решений уравнений (53), то эти недостающие решения находятся таким образом, как показано выше, в случае $n = 1$. А именно, каждому уравнению (53) можно сопоставить еще одно, «дуальное» решение $f_j^-(x, t) = f_j^+(x, t)\, g_j(x, t)$, $x, t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, где $dg_j/dx = k_j (f_j^+)^{-2}$, $k_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$,— произвольные ненулевые константы. Тем самым, в некотором роде сложная проблема определения фундаментального решения уравнения (41) в случае вполне интегрируемых при $\varepsilon = 0$ уравнений (1) при любом многосолитонном подмногообразии данных Коши $M_n \hookrightarrow M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, разрешена полностью в явном виде.

4. С у б г а р м о н и ч е с к а я ф у н к ц и я М и т р о п о л ь с к о г о — М е л ь н и к о в а и у с л о в и я р а з р у ш е н и я п е р и о д и ч е с к и х т р а е к т о р и й. Динамическая система (27) на инвариантном подмногообразии $M_n \hookrightarrow M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при $\varepsilon = 0$ кроме n-солитонных решений гетероклинического типа, являющих собою сепаратрисные орбиты, обладает еще бесконечным числом периодических (квазипериодических) решений в окрестности эллиптических особых точек. При $\varepsilon \neq 0$ эти квазипериодические решения будут деформироваться или совсем разрушаться. Условия реализации этих явлений представляют значительный интерес для приложений [6], в связи с чем воспользуемся для их исследования обобщением методов работы [10] в сочетании с подходом, примененным в работах [12, 13].

Пусть $\sigma_\varepsilon(t, t_0) \in T(M_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \to 0$ — компонента расщепления T_h-периодического решения $u^{(h)}(t - t_0) \subset M_n$, $h \in \mathbb{R}$, динамической системы (27) на многообразии $M_n \hookrightarrow M$, имеющей в общем случае вид

$$(u, p)_t^\tau = K(u, p) + \varepsilon F(u, p), \tag{54}$$

где $u=(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})^\tau$, $p=(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})^\tau \in M_n$, причем для всех $j=\overline{0, n-1}$ $du_j/dx = u_{j+1}$, $p_k = \partial \mathscr{L}_n[u]/\partial u_{j+1} - \frac{d}{dx}\partial\mathscr{L}_n[u]/\partial u_{j+2}+\ldots$ вследствие гамильтоновости (54) при $\varepsilon=0$ [1, 7, 8] относительно канонической симплектической структуры $\omega^{(2)}=\sum_{j=0}^{n-1} dp_j \wedge du_j \in \Lambda^2(M_n)$. Обозначим через $\alpha_j^{\pm}(t-t_0)\in T(M_n)$, $j=\overline{1,n}$, набор решений уравнения $\alpha_t = K'\cdot\alpha$, $\alpha\in T(M_n)$, причем «сепаратрисные» решения с меткой «+» убывают при $t\to\pm\infty$ к нулю, а решения с меткой «—» расходятся к бесконечности. Такое разделение в гамильтоновых интегрируемых системах всегда существует [1, 7], причем в силу условия $\operatorname{tr} K'(t-t_0)=0$, $t\in\mathbb{R}$, всегда $\det\|\alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_n^+, \alpha_n^-\|(t, t_0) = \mathrm{const}\neq 0$ для всех $h\in\mathbb{R}$, $t, t_0\in\mathbb{R}$.

Введем теперь по аналогии следующую субгармоническую μ-функцию Митропольского — Мельникова: $\mu_{m/q}(t_0; s)=\mu_{m/q}(t, t_0; s)|_{t=t_0}$, $t_0\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}^{2n-1}$ — набор параметров:

$$\mu_{m/q}(t, t_0;\ s) = |\alpha_1^+ + s_1^+K,\ \alpha_1^- + s_1^-K, \ldots, \alpha_0 + s_0K,$$
$$\sigma_\varepsilon(t+mT, t_0) - \sigma_\varepsilon(t, t_0)|, \tag{55}$$

где $\alpha_n^- = \alpha_0$, $\alpha_n^+ = K$; m, $q\in\mathbb{N}$ — взаимно простые целые числа, причем период $T_h\in\mathbb{R}_+$ решения и $u^{(h)}(t-t_0)\in M$ связан с возможным периодом $T\in\mathbb{R}_+$ возмущения $F(t, t_0)\in T(M)$ резонансной формулой $T_h = mT/q$.

Так как в случае динамической системы (54) возмущение автономно, то всегда $q=1$ и $T_h = mT$, $m\in\mathbb{N}$, для всех значений параметра $h\in\mathbb{R}$, представляющего собой численное значение функции Гамильтона $h\in\mathscr{D}(M_n)$ (54) при $\varepsilon=0$, где, как известно [7, 8],

$$h(u,\ p) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j du_j/dx - \mathscr{L}_n(u, p), \quad (u, p)\in M_n,$$

$$du_j/dx = u_{j+1}, \quad j=\overline{0, n-2}, \quad du_{n-1}/dx = \partial\mathscr{L}_n[u]/\partial u_n.$$

Итак, в случае (54) $\mu_{m/q}(t_0;\ s) = \mu_n(t_0;\ s)$, $m\in\mathbb{N}$, причем легко устанавливается, что функция

$$\mu_m(t_0;\ s) = \int_{t_0}^{t_0+mT} dt\,|\alpha_1^+ + s_1^+K, \ldots, \alpha_{n-1}^- + s_{n-1}^-K, \quad \alpha_0+s_0K, \quad F|(t-t_0),$$

т. е. не зависит явно от параметра $t_0\in\mathbb{R}$, а только от числовых параметров вложения $c_{nj}\in\mathbb{R}$, $j=\overline{0, 2n}$, многообразия $M_n \hookrightarrow M$. Учитывая произвольность параметров s_0, $s_j^{\pm}\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1, n-1}$, из условия $\mu_m(\bar t_0; s)=0$, $t_0=\bar t_0\in\mathbb{R}$, в случае трансверсального пересечения «усов« $\Gamma^+(t, t_0)$, $\Gamma^-(t, t_0)\in\mathbb{R}$ находим

$$\mu_m(\bar t_0;\ 0) = \int_0^{mT} dt\,|\alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_{n-1}^+, \alpha_{n-1}^-, \alpha_0, F| = 0,$$

$$\frac{\partial\mu_m(\bar t_0;\ 0)}{\partial s_0} = \int_0^{mT} dt\,|\alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_{n-1}^+, \alpha_{n-1}^-, K, F| = 0,$$

$$\frac{\partial\mu_m(\bar t_0;\ 0)}{\partial s_1^+} = \int_0^{mT} dt\,|K, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_{n-1}^+, \alpha_{n-1}^-, \alpha_0,\ F| = 0,$$

$$\frac{\partial\mu_m(\bar t_0;\ 0)}{\partial s_1^-} = \int_0^{mT} dt\,|\alpha_1^+, K, \ldots, \alpha_{n-1}^+, \alpha_{n-1}^-, \alpha_0, F| = 0, \tag{56}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \mu_m(\bar{t}_0; 0)}{\partial s_{n-1}^-} = \int\limits_0^{mT} dt \,|\, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_{n-1}^+, K, \alpha_0, F \,| = 0.$$

При нахождении соотношений (56) было существенно использовано то обстоятельство, что при $t \to t_0 \pm 0$ соответствующие величины $\lim\limits_{t \to t_0 \pm 0} |\, \alpha_1^+ + s_1^+ K, \ldots, \alpha_0 + s_0 K,\ \sigma_\varepsilon(t, t_0) \,|$, $t_0 \in \mathbb{R}$, совпадают в силу непрерывности нерасщепленного периодического решения. Совместное выполнение соотношений (56) является необходимым и достаточным условием отсутствия расщепленных ветвей периодического решения динамической системы (54). Так как это решение $u^{(h)}(t, t_0) \in M_n$ зависит, в общем случае, от $2n \in \mathbb{Z}_+$ параметров $c_{n, 2j-1} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, 2n}$, задающих многообразие $M_n \subset_\to M$, то система условий (56) в данном случае будет определенной, т. е. свойство расщепления периодической системы (54) является почти абсолютным.

С другой стороны, существование потенциальной возможности нахождения таких специальных периодических решений уравнения (54), для которых соотношения (56) выполнены тождественно, дает возможность интерпретировать их как аттракторы, т. е. n-мерные, $n \in \mathbb{Z}_+$, притягивающие инвариантные множества на многообразии $M_n \subset_\to M$.

При аналогичном построении характеристической μ-функции Митропольского — Мельникова для динамической системы (54) в случае изучения расщепления гомоклинической сепаратрисной орбиты $\Gamma(t, t_0) \subset_\to M_n$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ произвольном воспользуемся введенным выше «сепаратрисным» базисом решения уравнения $\alpha_t = K' \cdot \alpha$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\mu(t, t_0;\ s) = |\, \alpha_1^+ + s_1^+ K,\ \alpha_1^- + s_1^- K, \ldots, \alpha_0 + s_0 K,\ \sigma_\varepsilon^- - \sigma_\varepsilon^+ \,|\, (t, t_0), \tag{57}$$

где $t,\ t_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^{2n-1}$. Стандартным образом вычисляя (57), находим

$$\mu(t_0; s) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt \,|\, \alpha_1^+ + s_1^+ K, \ldots, \alpha_0 + s_0 K, F \,| + \Delta\mu(t_0; s), \tag{58}$$

где, по определению,

$$\Delta\mu(t_0; s) = \lim_{t \to -\infty} |\, \alpha_1^+ + s_1^+ K, \ldots, \sigma_\varepsilon^- \,| - \lim_{t \to +\infty} |\, \alpha_1^+ + s_1^+ K, \ldots, \sigma_\varepsilon^+ \,|,$$

причем для всех $t_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^{2n-1}$, $|\Delta\mu| < \infty$ согласно условию (55). Из условия произвольности параметров $s \in \mathbb{R}^{2n-1}$ в случае расщепления гомоклинической сепаратрисы $\Gamma(t, t_0) \subset_\to M_n$ находим

$$\mu_0(t_0; 0) = \int\limits_{\mathbb{R}} dt \,|\, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, \alpha_0, F \,| + \Delta\mu(t_0; 0) = 0, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \mu(t_0, 0)}{\partial s_0} = \int\limits_{\mathbb{R}} dt \,|\, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \ldots, K, F \,| = 0, \ldots,$$

где в общем случае $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$. Условия (59) являются необходимыми и достаточными при $\varepsilon \to 0$ для определения параметров, при которых возникает явление трансверсального расщепления сепаратрисы.

С целью эффективного вычисления (59) заметим в случае динамической системы (54), что все подынтегральные выражения в (59) независимы от параметра $t_0 \in \mathbb{R}$, поэтому они определяют ровно $2n \in \mathbb{Z}_+$ эффективных условий на параметры $c_{n, 2j-1} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, 2n}$, многообразия $M_n \subset_\to M$, при которых отсутствует расщепление сепаратрисы $\Gamma(t, t_0) \subset_\to$ $\subset_\to M_n$. Во всех остальных случаях происходит обыкновенное расщепление сепаратрисы с уходом ее ветвей соответственно $\Gamma^+(t, t_0) \subset_\to M_n$ при $t \to \infty$ — на бесконечность, и $\Gamma^-(t, t_0) \subset_\to M_n$ при $t \to \infty$ — на инвариантный периодический аттрактор или фокусируясь к соответствующей эллиптической особой точке.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения типа (50) для L-оператора Лакса динамической системы (27) при $\varepsilon = 0$:

$$-f_{xx} - u_0 f = \lambda f, \tag{60}$$

где $u_0 \in M_n$. Тогда [7] существует ровно $n \in \mathbb{Z}_+$ собственных значений $\lambda = \lambda_j \in \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$, $j = \overline{1, n}$, для которых справедливы следующие формулы: если $f = f_j^+(x, t) \in W_2^{(2)}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $j = \overline{1, n}$, — соответствующие собственные функции (60), т. е. $-f_{j,xx}^+ - u_0 f_j^+ = \lambda_j f_j^+$, $j = \overline{1, n}$, то существуют такие числа $r_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, что

$$u_0(x, t) = \sum_{j=1}^{n} r_j |f_j^+|^2.$$

Кроме того, все векторные поля на M_n вида $\alpha_j^+ = (|f_j^+|_x^2, |f^+|_{xx}^2, \ldots)^\tau$ задают убывающие при $|t| \to \infty$ решения уравнения $\alpha_t - K' \cdot \alpha = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Соответственно каждой функции $\alpha_j^+ \in T(M_n)$, $j = \overline{1, n}$, соответствует обычным образом растущая при $|t| \to \infty$ функция $\alpha_j^- \in T(M_n)$, $j = \overline{1, n}$, причем все векторные поля вида $\alpha_j^- = (\alpha_{j1}^+ \partial_t^{-1} (\alpha_{j1})^{-2}, (\alpha_{j1}^+ \partial_t^{-1} (\alpha_{j1})^{-2})_x, \ldots)^\tau$ будут растущими решениями того же уравнения $\alpha_t = K' \cdot \alpha$, $t \in \mathbb{R}$. Тем самым, определяя решения α_0, $K \in T(M_n)$ этого уравнения как

$$K = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(+)} \alpha_j^+, \quad \alpha_0 = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(-)} \alpha_j^-,$$

где $q_j^\pm \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, — некоторые легко определяемые числа, получаем полный линейно — независимый набор $\{\alpha_j^\pm,\ j = \overline{1, n-1};\ \alpha_0,\ K\} \subset T(M_n)$ решений характеристического уравнения $\alpha_t = K' \cdot \alpha$, $t \in \mathbb{R}$, входящий в найденные выше условия (59) трансверсального расщепления гомоклинической сепаратрисы динамической системы (54).

1. *Интегрируемые* динамические системы / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев: Наук. думка, 1987.— 286 с.
2. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев: Наук. думка, 1991.— 270 с.
3. *Митропольський Ю. О., Прикарпатський А. К., Філь Б. М.* Деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 1.— С. 78—92.
4. *Дрюма В. С.* Об интегрировании цилиндрического уравнения Кодомцева — Петвиашвили методом обратной задачи теории рассеяния // Докл. АН СССР.— 1982.— **288**, № 1.— С. 15—17.
5. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М. : Наука, 1984.— 271 с.
6. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику.— М. : Наука, 1988.— 368 с.
7. *Теория* солитонов / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 342 с.
8. *Самойленко В. Г.* Джет-анализ на гладких бесконечномерных функциональных многообразиях и его приложения.— Киев, 1988.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.51).
9. *Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, № 4.— С. 3—53.
10. *Симплектичний* аналіз динамічних систем з малим параметром. Новий критерій стабілізації гомоклінічних сепаратрис та його застосування / Ю. О. Митропольський, І. О. Антонишин, А. К. Прикарпатський, В. Г. Самойленко // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 1.— С. 59—80.
11. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1990.— 431 с.
12. *Guchenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscilations Dynamical systems, and Bifurcations of vector fields.— New York: Springer, 1983.— 226 p.
13. *Мельников В. К.* Труды Моск. мат. о-ва.— М. : Наука, 1963.— **12**.— С. 1—53.

Получено 31.07.91