УДК 515.1+517.98

В. К. Маслюченко, канд. фіз.-мат. наук (Чернів. ун-т)

Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях

Получены обобщения классических результатов Дини и Осгуда о последовательностях непрерывных функций. На их основании установлена теорема типа Бэра о величине их множества точек совокупной непрерывности раздельно непрерывных отображений произведений бэровских пространств и пространств с первой аксиомой счетности в некоторые индуктивные пределы возрастающих последовательностей метризуемых локально выпуклых пространств, содержащих, в частности, такие известные неметризуемые пространства, как пространство финитных последовательностей и пространство пробных функций Шварца.

Одержані узагальнення класичних результатів Діні та Осгуда про послідовності неперервних функцій. На їх основі встановлена теорема типу Бера про величину множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень добутків берівських просторів і просторів з першою аксіомою зліченності в деякі індуктивні границі зростаючих послідовностей метризовних локально опуклих просторів, які, зокрема, містять в собі такі відомі неметризовні простори, як простір фінітних послідовностей та простір пробних функцій Шварца.

З часів Р. Бера з'явилося чимало досліджень, в яких вивчається множина точок неперервності нарізно неперервних відображень [1]. В цих дослідженнях відображення набувають значень у метризовних чи псевдометризовних просторах. Тому виникає цілком природне бажання з'ясувати наскільки істотною є умова метризовності простору значень у результатах такого роду. Дана стаття являє собою перший крок у цьому напрямку. В ній класичний результат Бера [2] про те, що дійснозначна нарізно неперервна функція $y = f(x, t)$ двох дійсних змінних на кожній горизонтальній прямій $t = \mathrm{const}$ має щільну множину точок сукупної неперервності, який був розвинений у роботах [3, 4], переноситься на відображення $f : X \times T \to Y$ зі значеннями в індуктивних границях послідовностей метризовних локально опуклих просторів Y_n таких, що Y_n замкнений в Y для кожного n. Серед таких просторів часто трапляються неметризовні, як, наприклад, простір $\mathbb{R}^{(\infty)}$ всіх фінітних послідовностей чи простір $\mathcal{D}$ пробних функцій Шварца, отже умову метризовності можна в деяких випадках дещо послабити. З другого боку, легко навести приклад топологічного простору Y (неметризовного!) і нарізно неперервного відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Y$, яке розривне в кожній точці (див. приклад Гофмана — Йоргенсена в [5]). Звичайно, було б цікаво, наприклад, описати всі простори Y, для яких кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Y$ є точково розривним, але це вже справа майбутнього.

Почнемо з викладу сучасних версій двох класичних результатів Діні і Осгуда про послідовності неперервних функцій. Далі, як наслідок, одержимо потрібне нам узагальнення згаданої теореми Бера на відображення зі значеннями в метризовних просторах, на яке ми спиратимемось при доведенні основного результату. Таким чином, ми розвиваємо традиційний підхід, відмінний від запропонованого в [4]. Головним засобом при становленні основного результату виступає теорема Куцери — Мак-Кеннона про обмежені множини в індуктивних границях розглядуваного типу [6].

1. Нехай X — топологічний простір, Y — рівномірний простір, T — деяка множина і $\mathcal{V}$ — фільтр підмножин множини T. Розглянемо сім'ю відображень $f_t : X \to Y$, заіндексовану елементами t з T. Припустимо, що ця сім'я поточково збігається відносно фільтра $\mathcal{V}$ до відображення $f : X \to Y$.

Означення 1. *Будемо говорити, що сім'я $(f_t)_{t\in T}$ збігається до f квазірівномірно в точці $x_0 \in X$ відносно фільтра $\mathcal{V}$, якщо для кожного оточення W в Y і для кожного $V \in \mathcal{V}$ існує окіл $\mathcal{U}$ точки x_0 в X і елемент $t \in V$ такі, що $(f_t(x), f(x)) \in W$ для кожного $x \in U$.*

Теорема 1. *Поточкова границя f сім'ї неперервних відображень $f_t : X \to Y$, $t \in T$, топологічного простору X в рівномірний простір Y*

відносно фільтра $\mathcal{V}$ буде неперервною тоді і тільки тоді в точці $x_0 \in X$, коли (f_t) збігається до f квазірівномірно в точці x_0 відносно $\mathcal{V}$.

Доведення. Нехай f неперервне в точці x_0, W — оточення в Y і W_1 — інше оточення, для якого $\overset{3}{W_1} \subseteq W$. Тоді існує такий окіл U_1 точки x_0 в X, що $(f(x_0), f(x)) \in W_1$, як тільки $x \in U_1$. Розглянемо довільне $V \in \mathcal{V}$. Маємо $f(x_0) = \lim_{\mathcal{V}} f_t(x_0)$. Тому існує $V_1 \in \mathcal{V}$ таке, що $(f_t(x_0), f(x_0)) \in \in W_1$, як тільки $t \in V_1$. Ясно, що $V \cap V_1 \neq \varnothing$, оскільки $\mathcal{V}$ — фільтр. Візьмемо $t \in V \cap V_1$. З неперервності відображення f_t в точці x_0 випливає, що існує такий окіл U_2 точки x_0, що $(f_t(x), f_t(x_0)) \in W_1$ при $x \in U_2$. Покладемо тепер $U = U_1 \cap U_2$. Якщо $x \in U$, то $(f_t(x), f_t(x_0)) \in W_1$, $(f_t(x_0), f(x_0)) \in \in W_1$ і $(f(x_0), f(x)) \in W_1$, тому $(f_t(x), f(x)) \in \overset{3}{W_1}$, а значить, $(f_t(x), f(x)) \in W$. Таким чином, (f_t) збігається до f в точці x_0 квазірівномірно.

Навпаки, припустимо, що є квазірівномірна збіжність в точці x_0. Візьмемо знову деяке оточення W в Y і оточення W_1, для якого $\overset{3}{W_1} \subseteq W$. Знайдемо таке $V \in \mathcal{V}$, що $(f_t(x_0), f(x_0)) \in W_1$ при $t \in V$. Згідно з припущенням існує такий окіл U_1 точки x_0 і таке $t \in V$, що $(f(x), f_t(x)) \in W_1$ для всіх $x \in U_1$. Оскільки f_t неперервне в точці x_0, то існує такий окіл U_2 точки x_0, що $(f_t(x), f_t(x_0)) \in W_1$, як тільки $x \in U_2$. Тоді при $x \in U = U_1 \cap U_2$ матимемо $(f(x), f(x_0)) \in W$. Отже, f неперервне в точці x_0.

Означення 2. *Будемо говорити, що сім'я $(f_t)_{t \in T}$ збігається до відображення f рівномірно в точці x_0 відносно фільтра $\mathcal{V}$, якщо для кожного оточення W в Y існують $V \in \mathcal{V}$ і такий окіл U точки x_0, що для кожного $t \in V$ і для кожного $x \in U$ маємо $(f_t(x), f(x)) \in W$.*

Очевидно, що з рівномірної збіжності в точці випливає квазірівномірна.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — метризовний простір, $f_t : X \to Y$, $t \in T$, — сім'я неперервних відображень, яка поточково збігається до відображення $f : X \to Y$ відносно деякого фільтра $\mathcal{V}$ із зліченним базисом $\mathcal{B}$. Тоді множина X_0 тих точок з X, в яких сім'я $(f_t)_{t \in T}$ збігається рівномірно, є щільною множиною типу G_δ в X.*

Доведення. Занумеруємо елементи базису фільтра $\mathcal{B}$ у послідовність $B_1, B_2, \ldots, B_p, \ldots$. Нехай $|\cdot - \cdot|_Y$ — метрика, яка породжує рівномірну структуру простору Y. Зафіксуємо натуральне число m і розглянемо для $p = 1, 2, \ldots$ множини

$$F_p = \{x \in X : (\forall\, t, s \in B_p)(|f_t(x) - f_s(x)|_Y \leqslant 1/m)\},$$

які є замкненими в X, оскільки f_t і f_s — неперервні відображення. Через $\mathcal{U}_m$ позначимо сукупність всіх відкритих множин U в X, для яких існує таке $V \in \mathcal{V}$ (залежне від U), що $|f_t(x) - f_s(x)|_Y \leqslant 1/m$ при $x \in U$ і $t, s \in V$. Нехай $G_m = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_m} U$. Ясно, що G_m — відкрита в X множина. Покажемо, що G_m щільна в X. Розглянемо для цього непорожню відкриту в X множину O. Зауважимо, що $O = \bigcup_{p=1}^{\infty} (F_p \cap O)$, а множини $F_p \cap O$ замкнені в O. Оскільки X — берівський простір, то O є множиною другої категорії, отже існує такий номер p_0, що множина $F_{p_0} \cap O$ має внутрішню точку в O, тобто існує відкрита непорожня множина U, яка міститься в $F_{p_0} \cap O$. Для множини U, таким чином, маємо $|f_t(x) - f_s(x)|_Y \leqslant 1/m$ для всіх $x \in U$ і для всіх $t, s \in B_{p_0}$. Отже $U \in \mathcal{U}_m$. Крім того, $U \subseteq O$, звідки випливає, що $O \cap G_m \neq \varnothing$, і тим самим щільність множини G_m в X доведена.

Розглянемо тепер множину $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$. Оскільки X — берівський простір, то множина A щільна в X. Крім того, A — множина типу G_δ. Покажемо, що $A \subseteq X_0$. Дійсно, нехай $x_0 \in A$ і ε — довільне додатне число. Візьмемо таке $m \in \mathbb{N}$, що $1/m < \varepsilon/2$. Тоді $x_0 \in G_m$, а значить, існує така відкрита множина $U \in \mathcal{U}_m$, що $x_0 \in U$. Множина U є околом точки x_0, причому $|f_t(x) - f_s(x)|_Y \leqslant 1/m$ для всіх $x \in U$ і для всіх t і s з деякої множини V, що належить фільтру $\mathcal{V}$. Зафіксуємо $x \in U$ і $t \in V$. Оскільки $\lim_{\mathcal{V}} f_s(x) = f(x)$, то існує таке $V_0 \in \mathcal{V}$, що $|f(x) - f(x)|_Y < \varepsilon/2$ для всіх $s \in V_0$. Взявши тепер $s \in V \cap V_0$, одержимо

$$|f_t(x) - f(x)|_Y \leqslant |f_t(x) - f_s(x)|_Y + |f_s(x) - f(x)|_Y \leqslant 1/m + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Таким чином, $|f_t(x) - f(x)|_Y < \varepsilon$ для всіх $t \in V$ і для всіх $x \in U$, а це і дає нам рівномірну збіжність в точці x_0 і доводить включення $A \subseteq X_0$.

Виявляється, що і навпаки $X_0 \subseteq A$. Дійсно, нехай $x_0 \in X_0$. Розглянемо довільне натуральне число m. Оскільки сім'я (f_t) в точці x_0 збігається рівномірно до f, то існує такий відкритий окіл U точки x_0 і таке $V \in \mathcal{V}$, що $|f_t(x) - f(x)|_Y \leqslant 1/2m$ для всіх $x \in U$ і для всіх $t \in V$. Тоді при $t, s \in V$ і $x \in U$ матимемо

$$|f_t(x) - f_s(x)|_Y \leqslant |f_t(x) - f(x)|_Y + |f(x) - f_s(x)|_Y \leqslant 1/2m + 1/2m = 1/m,$$

отже $U \in \mathcal{U}_m$, а значить, $x_0 \in G_m$. Таким чином, $x_0 \in G_m$ для довільного $m \in \mathbb{N}$, звідки $x_0 \in A$.

Ми показали, що $X_0 = A$, отже X_0 — щільна в X множина типу G_δ, що і треба було довести.

З а у в а ж е н н я. З теореми 1 безпосередньо випливає, що множина X_0 є підмножиною множини S_f точок неперервності граничного відображення f. Отже, якщо виконуються умови теореми 2, то S_f є щільною в X множиною. В цьому випадку S_f, як і X_0, є множиною типу G_δ.

2. Перейдемо тепер до вивчення множини точок неперервності нарізно неперервних відображень. Нехай X, T, Y — топологічні простори, $x_0 \in X$ і $t_0 \in T$.

О з н а ч е н н я 3. *Відображення $f: X \times T \to Y$ називається нарізно неперервним у точці (x_0, t_0), якщо відображення $f^{x_0}: T \to Y$, $f^{x_0}(t) = f(x_0, t)$, неперервне в точці t_0, і відображення $f_{t_0}: X \to Y$, $f_{t_0}(x) = f(x, t_0)$, неперервне в точці x_0. Якщо відображення $f: X \times T \to Y$ нарізно неперервне в будь-якій точці $(x, t) \in X \times T$, то воно називається нарізно неперервним.*

Під неперервністю відображення $f: X \times T \to Y$ розуміють його неперервність відносно топології добутку на $X \times T$.

Спочатку ми одержимо один наслідок з теореми 2, що споріднений з результатами [3, с. 125; 4].

Т е о р е м а 3. *Нехай X — берівський простір, T — топологічний простір, який має зліченний базис околів своєї неізольованої точки t_0, Y — метризований топологічний простір і $f: X \times T \to Y$ — відображення. Якщо для кожного $t \in T \setminus \{t_0\}$ відображення $f_t: X \to Y$ неперервне і для кожного $x \in X$ відображення $f^x: T \to Y$ неперервне в точці t_0, то множина X_{t_0} всіх тих точок $x \in X$, для яких f неперервне в точці (x, t_0), є щільною множиною типу G_δ в просторі X.*

Д о в е д е н н я. Для довільного околу V точки t_0 в просторі T позначимо через $\dot{V}$ відповідний проколотий окіл $\dot{V} = V \setminus \{t_0\}$. Оскільки точка t_0 не є ізольованою в T, то сукупність $\dot{\mathcal{V}}$ всіх проколотих околів точки t_0 є фільтром у множині $\dot{T} = T \setminus \{t_0\}$. Сім'я відображень $(f_t)_{t \in \dot{T}}$ поточково збігається відносно фільтра $\dot{\mathcal{V}}$ до відображення f_{t_0} і при цьому виконуються умови теореми 2. Тому множина X_0 всіх тих точок з X, в яких $(f_t)_{t \in \dot{T}}$ рівномірно збігається до f_{t_0} відносно фільтра $\dot{\mathcal{V}}$, є всюди щільною множиною в просторі X. Покажемо, що $X_0 \subseteq X_{t_0}$. Нехай $x_0 \in X_0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і візьмемо такий відкритий окіл U_1 точки x_0 в X і такий окіл V точки t_0 в T, що $|f_t(x) - f_{t_0}(x)|_Y < \varepsilon/2$ для всіх $x \in U_1$ і $t \in V$. Із зауваження до теореми 2 випливає, що в точці x_0 відображення f_{t_0} неперервне. Візьмемо такий окіл U_2 точки x_0 в X, що $|f_{t_0}(x) - f_{t_0}(x_0)|_Y < \varepsilon/2$, як тільки $x \in U_2$. Покладемо $U = U_1 \cap U_2$. Для

$x \in U$ і $t \in V$ будемо мати

$$|f(x, t) - f(x_0, t_0)|_Y \leqslant |f_t(x) - f_{t_0}(x)|_Y + |f_{t_0}(x) - f_{t_0}(x_0)|_Y < \varepsilon,$$

що і показує, що f неперервне в точці (x_0, t_0). Те, що X_{t_0} є множиною типу G_δ, випливає із загальних міркувань [3, с. 36].

Наслідок. *Якщо X — берівський простір, T — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Y — метризовний топологічний простір і $f : X \times T \to Y$ — нарізно неперервне відображення, то для кожної точки $t \in T$ множина X_t всіх точок $x \in X$ таких, що f неперервне в точці (x, t), є щільною множиною типу G_δ в просторі X.*

Доведення. Якщо точка t не ізольована в T, то це випливає з теореми 3, якщо ж t ізольована в T, то $X_t = X$ і знову твердження вірне.

3. Поширимо тепер одержаний результат на нарізно неперервні відображення зі значеннями в деяких індуктивних границях.

Теорема 4. *Нехай X — берівський простір, T — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Y — індуктивна границя зростаючої послідовності метризовних локально опуклих просторів Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, така, що Y_n замкнений в Y для кожного n і $f : X \times T \to Y$ — нарізно неперервне відображення. Тоді для кожної точки $t \in T$ множина X_t всіх точок $x \in X$ таких, що f неперервне в точці (x, t), всюди щільна в просторі X.*

Доведення. Розглянемо довільну непорожню відкриту множину O в X і зафіксуємо $t_0 \in T$. Нехай $\{V_k : k = 1, 2, \ldots\}$ — зліченний базис околів точки t_0. Покладемо для $n, k \in \mathbb{N}$

$$F_{nk} = \{x \in O : f(x, t) \in Y_n \text{ для всіх } t \in V_k\}.$$

Множини F_{nk} замкнені в O. Дійсно, якщо (x_α) — сітка елементів з F_{nk}, яка збігається до деякого $x_0 \in O$, то для кожного t на основі неперервності f по першій змінній $f(x_\alpha, t) \to f(x_0, t)$ у просторі Y. Але для кожного $t \in V_k$ маємо $f(x_\alpha, t) \in Y_n$, тому і $f(x_0, t) \in Y_n$ для таких t, адже множина Y_n замкнена в Y. Покажемо, що $\bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty} F_{nk} = O$. Візьмемо $x \in O$ і покажемо, що існують такі номери k і n, що $f^x(V_k) \subseteq Y_n$. Нехай це не так. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ матимемо $f^x(V_k) \not\subseteq Y_n$. Зокрема, $f^x(V_n) \not\subseteq Y_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже існує така послідовність точок t_n, що $t_n \in V_n$ і $f^x(t_n) \notin Y_n$. Маємо $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. Тоді на основі неперервності f^x і $f^x(t_n) \to f^x(t_0)$ при $n \to \infty$. Множина $\{f^x(t_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ є, очевидно, обмеженою в Y, тому на підставі теореми Куцери — Мак-Кеннона [6] існує такий номер n_0, що $f^x(t_n) \in Y_{n_0}$ для кожного n. Але за побудовою $f^x(t_{n_0}) \notin Y_{n_0}$, що приводить до суперечності.

Оскільки простір X берівський, то існують такі номери k_0 і n_0 і відкрита непорожня множина U, для яких $U \subseteq F_{n_0 k_0}$. Покладемо $V = V_{k_0}$ і нехай f_0 є звуженням f на $U \times V$. Відображення f_0 набуває значень у просторі Y_{n_0} і при цьому, очевидно, виконуються умови наслідку теореми 3. Тоді на підставі цього наслідку можна зробити висновок, що існує точка $x_0 \in U$ така, що f_0 неперервне в точці (x_0, t_0). В такому разі і f неперервне в цій точці, тобто $x_0 \in X_{t_0}$ і до того ж $x_0 \in O$, адже $U \subseteq O$. Таким чином, $X_{t_0} \cap O \neq \varnothing$, отже X_{t_0} — всюди щільна в X множина, що і треба було довести.

Зауваження. Оскільки для кожної строгої індуктивної границі Y зростаючої послідовності локально опуклих просторів Y_n, для яких Y_n замкнений в Y_{n+1} для кожного n, будемо мати, що Y_n замкнений в Y для кожного n, то теорема, анонсована в [7], є безпосереднім наслідком теореми 4.

1. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real. Anal. Exch.— 1985-1986.— **11**, N 2.— P. 293—322.
2. *Baire R.* Sur la théorie génerale des fonctions de variables réelles // C. r. Acad. Sci. A.— 1897.— 125.— P. 691—694.

3. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М. : Наука, 1975.— 408 с.
4. *Calbrix J., Troallic J.-P.* Applications séparément continues // C. r. Acad. Sci. A.— 1979.— **288**.— P. 647—648.
5. *Christensen J. P. R.* Joint continuity of separately continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— **82**, N 3.— P. 455—461.
6. *Kucera J., Mckennon K.* Bounded sets in inductive limits // Ibid.— 1978.— **69**, N 1.— P. 62—64.
7. *Маслюченко В. К.* Раздельно непрерывные отображения со значениями в строгих индуктивных пределах // XIV шк. по теории операторов в функцион. пространствах.— Новгород, 1989.— Ч. 2.— С. 70.

Одержано 29.10.90