УДК 517.91

**А. М. Самойленко,** чл.-корр. АН Украины,
**С. И. Трофимчук,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

# О пространствах кусочно-непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой. II

Рассматривается серия пространств кусочно-непрерывных почти периодических функций. Изучаются свойства функций, входящих в эти пространства; развитая в статье теория затем применяется при исследовании почти периодических линейных импульсных систем.

Розглядається серія просторів кусково-неперервних майже періодичних функцій. Вивчаються властивості функцій з цих просторів; теорія, розвинута у статті, застосовується для дослідження майже періодичних лінійних імпульсних систем.

1. В настоящей статье, продолжающей [1], изучаются пространства кусочно-непрерывных почти периодических (к. н. п. п.) функций.

1.1. Рассмотрим одну общую конструкцию (все обозначения взяты из [1]). Пусть $T \in \mathfrak{A}$, расположим вещественные числа из $T$ в строго возрастающую последовательность $\{t_n\}$, множество $s(T) = \{t_n\}$ назовем носителем $T$; таким образом, определено отображение $s: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Множество $s(\mathfrak{A})$, очевидно, инвариантно относительно отображения $\theta_s$, $\theta_s(T) = T + s$.

В $s(\mathfrak{A})$ можно ввести метрику Хаусдорфа $\chi$; если $P, Q \in s(\mathfrak{A})$, $F_a(P)$ — замкнутая $a$-окрестность множества $P$ (в обычной топологии $R$), то

$$\chi(P, Q) = \inf\{a : F_a(P) \supset Q,\ F_a(Q) \supset P\}$$

($\chi$, возможно, принимает значение $+\infty$ для некоторых $P, Q$).

Пусть $\mathfrak{G}$ — такое подмножество $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{G} \supset s(\mathfrak{A})$ и $\theta_s(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ $\forall s \in R$. Через $\delta$ обозначим метрику на $\mathfrak{G}$, имеющую следующие свойства:

a1) $\delta(\theta_s(T), \theta_s(Q)) = \delta(T, Q)$ $\forall s$;

a2) $\chi(T, Q) \leqslant \delta(T, Q)$;

a3) $\delta(\theta_s(Q), Q) \leqslant |s|$ $\forall s, Q$.

Кроме того, в $\mathfrak{G}$ нам понадобится коммутативная бинарная операция— сумма множеств — $\smile$: $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ со следующими свойствами:

б0) $(T \smile P) + a = (T + a) \smile (P + a)$;

б1) $s(T \smile P) = s(T) \cup s(P)$;

б2) $\delta(T_1 \smile T_2, P_1 \smile P_2) \leqslant \max(\delta(T_1, P_1), \delta(T_2, P_2))$.

Отображение $\theta_s$: $\mathfrak{G} \times R \to \mathfrak{G}$ определяет в $(\mathfrak{G}, \delta)$ непрерывную динамическую систему (так как в силу условий a1, a3 имеем

$$\delta(\theta_s(Q), \theta_r(T)) \leqslant |s - r| + \delta(Q, T)).$$

В качестве примеров пространств $(\mathfrak{G}, \delta, \sqcup, \theta_s)$ можно привести пространство $(\mathfrak{A}, \rho, \sqcup, \theta_s)$, изучавшееся в [1] (напомним, что $\sqcup$ там обозначало свободное объединение множеств [2]), а также пространство $(s(\mathfrak{A}), \chi, \cup, \theta_s)$ ($\cup$ — объединение множеств).

Аналогично тому, как это сделано в [1], можно ввести в $(\mathfrak{G}, \delta, \theta_s)$ понятие множества п. п. по Бору (сокращенно — $\delta$-п. п. по Бору) и множества п. п. по Бохнеру ($\delta$-п. п. по Бохнеру). Важное отличие от ситуации, рассмотренной в [1], в том, что эти понятия могут не совпадать между собой в общем случае из-за неполноты $(\mathfrak{G}, \delta)$.

Пример. В пространстве $(s(\mathfrak{A}), \chi, \cup, \theta_s)$ рассмотрим множество

$$T = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (2^k\mathbb{Z} + 2^{-2k}); \qquad 2^k\mathbb{Z} + 2^{-k} = \{2^k n + 2^{-k},\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Учитывая, что $\chi(T + 2^k m, T) = 2^{-(k+1)}$ при произвольных $k$, $m$, множество $\{2^k m\}$ относительно плотно на $R$ при фиксированном $k$, $m \in \mathbb{Z}$, а $\lim\limits_{k \to +\infty} 2^{-(k+1)} = 0$, получаем, что $T$ — $\chi$-п. п. по Бору множество. С другой стороны, легко проверить, что из последовательности $\{T + 2^{2k}\}_{k=0}^{+\infty}$ нельзя извлечь сходящуюся в $(s(\mathfrak{A}), \chi)$ подпоследовательность и поэтому $T$ не может быть $\chi$-п. п. по Бохнеру.

Тем не менее, учитывая доказательство теоремы 1 из [1], получаем, что из $\delta$-п. п. по Бохнеру всегда следует $\delta$-п. п. по Бору (для этого не нужна полнота $(\mathfrak{G}, \delta)$).

1.2. Зафиксируем некоторое пространство $(\mathfrak{G}, \delta, \smile, \theta_s)$. Пусть $x(t)$: : $R \to R$ — к. н. функция с разрывами I рода (возможно, нулевыми) на множестве $T \in \mathfrak{G}$. Для определенности будем полагать $x(t)$ непрерывной слева.

Определение 1. *Пару $X = (x(t), T)$ будем называть $\delta$-п. п. к. н. по Бору функцией, если*

г$_1$) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное на $R$ множество $\Omega_\varepsilon$ чисел $\tau$ таких, что*

$$|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$$

*(элементы $\Omega_\varepsilon$ будем называть $\varepsilon$-п. периодами $x(t)$);*

г$_2$) *$T$ — $\delta$-п. п. по Бору множество;*

г$_3$) *$\forall a > 0$ функция $x(t): R \setminus F_a(s(T)) \to R$ равномерно непрерывна.*

Множество всех $\delta$-п. п. к. н. по Бору функций будем обозначать символом $AP(\mathfrak{G}, \delta)$.

Докажем, что для пары $X$ множество $\Omega_\varepsilon$ можно выбрать так, что любое $\tau \in \Omega_\varepsilon$ будет также и $\varepsilon$-п. периодом $\delta$-п. п. по Бору множества $T$.

Лемма 1. *Пусть $T$ — $\delta$-п. п. по Бору множество. Тогда $\forall \eta > 0$ $\exists L(\eta) > 0$ такое, что для каждого положительного $\gamma < \eta$ и для каждого* *интервала* $\dot{J}$ *длины* $L(\eta)$ *найдется целое* $m$ *такое, что* $m\gamma \in \dot{J}$ *и*

$$\delta(T, T+m\gamma) < \eta. \qquad (1)$$

Доказательство. Действительно, по определению δ-п. п. множества по Бору следует, что $\forall \eta > 0\ \exists L_1(\eta/2) > 0$ такое, что в любом интервале $(a, b)$ длины $L_1(\eta/2)$ существует $\omega$ такое, что $\delta(T, T+\omega) < \eta/2$. Пусть $L(\eta) = L_1(\eta/2) + \eta$, в любом интервале $(\alpha, \beta)$ длины $L(\eta)$ выделим подинтервал $(\alpha + \eta/2, \beta - \eta/2)$ длины $L_1(\eta/2)$ с указанным выше $\omega$, причем $\Delta = [\omega - \eta/2, \omega + \eta/2] \subset (\alpha, \beta)$. Очевидно, для положительного $\gamma < \eta$ в силу принципа Дирихле найдется такое $m$, что $m\gamma \in \Delta \subset (\alpha, \beta)$. При этом $\delta(T, T+m\gamma) \leqslant \delta(T, T+\omega) + |\omega - m\gamma| < \eta$.

Лемма 2. *Пусть* $X = (x(t), T)$ — *δ-п. п. к. н. по Бору функция. Тогда* $\forall \eta > 0\ \exists L(\eta) > 0$, $\delta(\eta) > 0$ *такие, что для каждого положительного* $\gamma < \delta(\eta)$ *и для каждого интервала* $\dot{J}$ *длины* $L(\eta)$ *найдется целое* $m$ *такое, что* $m\gamma \in \dot{J}$ *и*

$$|x(t+m\gamma) - x(t)| < \eta \quad \forall t \in R \setminus F_\eta(s(T)). \qquad (2)$$

Доказательство. Согласно условию $r_1$ $\forall \eta > 0\ \exists L_1(\eta/2) > 0$ такое, что в каждом интервале длины $L_1(\eta/2)$ найдется $\tau$ такое, что

$$|x(t+\tau) - x(t)| < \eta/2 \quad \forall t \in R \setminus F_{\eta/2}(s(T)).$$

На $R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$ функция $x(t)$ равномерно непрерывна. Пусть $\delta(\eta) < \eta/2$ — такое положительное число, что при $t', t'' \in R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$, $|t' - t''| < \delta(\eta)$ (в этом случае $t', t''$ обязательно принадлежат одному и тому же интервалу из $R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$) выполнено $|x(t') - x(t'')| < \eta/2$. Пусть $L(\eta) = L_1(\eta/2) + \delta(\eta)$. Возьмем произвольный интервал $(\alpha, \beta)$ длины $L(\eta)$, подинтервал $(\alpha + \delta/2, \beta - \delta/2)$ длины $L_1(\eta)$ содержит $\tau$ такое, что $|x(t+\tau) - x(t)| < \eta/2\ \forall t \in R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$. Для положительного $\gamma < \delta(\eta)$ обязательно найдется целое $m$ такое, что $m\gamma \in [\tau - \delta/2, \tau + \delta/2] \subset (\alpha, \beta)$. При этом, если $t \in R \setminus F_\eta(s(T))$, то для $t' = t + m\gamma - \tau$ выполнено $|t' - t| = |m\gamma - \tau| < \delta/2 < \eta/4$, а поэтому $t' \in R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$ и $t', t$ лежат в одном интервале из $R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$. Следовательно, при $t \in R \setminus F_\eta(s(T))$ $|x(t+m\gamma) - x(t)| \leqslant |x(t) - x(t + m\gamma - \tau)| + |x(t + m\gamma - \tau) - x(t+m\gamma)| < \eta$.

Лемма 3. *Пусть пара* $X = (x(t), T)$ — *δ-п. п. к. н. Тогда* $\forall \eta > 0\ \exists L(\eta) > 0$, $\delta(\eta) > 0$ *такие, что для каждого положительного* $\gamma < \delta(\eta)$ *и для каждого интервала* $\dot{J}$ *длины* $L(\eta)$ *найдется целое* $m$ *такое, что* $m\gamma \in \dot{J}$ *и одновременно выполнены неравенства* (1) *и* (2).

Доказательство проведем, следуя [3] и [4] (приложение, § 6). Пусть $L_1(\eta/8)$, $L_2(\eta/8)$, $\delta(\eta/8)$ — величины, выбранные по $\eta/8 > 0$ согласно леммам 1 и 2, $L = \max(L_1, L_2)$. Любой интервал длины $L(\delta)$ для каждого положительного $\gamma < \delta(\eta/8)$ при некоторых целых $m, m'$ содержит точки $m\gamma$, $m'\gamma$ такие, что

$$\delta(T + m\gamma, T) < \eta/8, \quad |x(t+m'\gamma) - x(t)| < \eta/8 \quad \forall t \in R \setminus F_{\eta/8}(s(T)). \qquad (3)$$

Так как $|m\gamma - m'\gamma| < L$, то разности $m - m'$ могут принимать лишь конечное число значений $n_i$, $i = \overline{1, p}$. Для каждого $n_i$ существует пара $(m_i, m'_i)$, удовлетворяющая (3), зафиксируем ее. Положим $\lambda = \max_i |m'_i\gamma|$, $l = L + 2\lambda$. Пусть $\dot{J} = (\alpha, \alpha + l)$ — произвольный интервал длины $l$, в подинтервале $\dot{J}'' = (\alpha + \lambda, \alpha + \lambda + L)$ согласно изложенному найдутся числа $m\gamma$, $m'\gamma$ такие, что выполняется (3), а также $m\gamma - m'\gamma = n_i\gamma = (m_i - m'_i)\gamma$. Пусть $q = m - m_i$, очевидно, $q\gamma \in \dot{J}$. Далее имеем

$$\delta(T + q\gamma, T) = \delta(T + (m - m_i)\gamma, T) \leqslant \delta(T + m\gamma, T) + \delta(T + m\gamma, T + m\gamma - m_i\gamma) = \delta(T + m\gamma, T) + \delta(T, T + m_i\gamma) < \eta/4.$$

Покажем теперь, что при $t \in R \setminus F_\eta(s(T))$ будет $t + q\gamma \in R \setminus F_{\eta/2}(s(T))$. Действительно, в ином случае для некоторого $s \in T$ $|t + q\gamma - s| \leqslant \eta/2$. Учитывая, что $\delta(T + q\gamma, T) < \eta/4$, для этого $s$ в силу свойства а 2) метрики $\delta$ можно указать такое число $r \in T$, что $|s - (r + q\gamma)| < \eta/2$. В итоге получаем $|t - r| = |t + q\gamma - s + (s - (r + q\gamma))| = |t + q\gamma - s| + |s - (r + q\gamma)| < \eta$ и поэтому $t \in F_\eta(s(T))$ и $t \notin R \setminus F_\eta(s(T))$. Следовательно, при $t \in R \setminus F_\eta(s(T))$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x(t + q\gamma) - x(t)| = |x(t + (m' - m_i')\gamma) - x(t)| = |x(t + m'\gamma - m_i'\gamma) -$$

$$- x(t + m'\gamma)| + |x(t + m'\gamma) - x(t)| < \eta/8 + \eta/8 < \eta.$$

Следствие. *Пара $X = (x(t), T)$ является $\delta$-п. п. к. н. по Бору функцией тогда и только тогда, когда* г) *для каждого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное на $R$ множество $\Omega_\varepsilon$ чисел $\tau$ таких, что $\delta(T + \tau, T) < \varepsilon$ и*

$$|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in R \setminus (F_\varepsilon(s(T)) \cup F_\varepsilon(s(T - \tau))).$$

Действительно, пусть выполнено условие г. Множество $T$ тогда очевидно, $\delta$-п. п. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия г можно указать относительно плотное множество $\Omega_{\varepsilon/4}$ такое, что при $\tau \in \Omega_{\varepsilon/4}$

$$|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon/4 \quad \forall t \in M = R \setminus (F_{\varepsilon/4}(s(T)) \cup F_{\varepsilon/4}(s(T - \tau))),$$

$$\delta(T + \tau, T) < \varepsilon/4.$$

Но тогда $\chi(T + \tau, T) \leqslant \varepsilon/4$ и поэтому $F_{\varepsilon/2}(s(T - \tau)) \subset F_\varepsilon(s(T))$. Следовательно, $F_{\varepsilon/4}(s(T - \tau)) \cup F_{\varepsilon/4}(s(T)) \subset F_\varepsilon(s(T))$ и если $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$ то $t \in M$. В итоге получаем, что при $\tau \in \Omega_{\varepsilon/4}$

$$|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon/4 < \varepsilon \quad \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T)).$$

Докажем теперь выполнение условия $г_3$ (слабую равномерную непрерывность). Зафиксируем $a > 0$. Для произвольного положительного $\varepsilon < a$ согласно изложенному выше существует число $L(\varepsilon/4) > 0$ такое, что $\forall \alpha$ $\exists \tau \in (\alpha, \alpha + L(\varepsilon/4))$:

$$\delta(T + \tau, T) < \varepsilon/4,$$

$$|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon/4 \quad \forall t \in R \setminus F_{\varepsilon/4}(s(T)).$$

Рассмотрим к. н. функцию $x(t)$ на отрезке $[-\varepsilon, L(\varepsilon/4)]$: для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать положительное $\delta(\varepsilon) < \varepsilon/2$ такое, что $\forall t', t'' \in [0, L(\varepsilon/4)]$, $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$, будет $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon/2$ (при $(t', t'') \cap T = \varnothing$). Пусть теперь числа $t_1, t_2 \in R \setminus F_a(s(T))$ таковы, что $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ (в этом случае $t_1$ и $t_2$ $(t_1 \leqslant t_2)$ лежат в одном и том же интервале из $R \setminus F_a(s(T))$).

Если $t_i \in R \setminus F_a(s(T)) \subset R \setminus F_\varepsilon(s(T))$, то в силу неравенства $\chi(T + \tau, T) \leqslant \delta(T + \tau, T) < \varepsilon/4$ обязательно $t_i - \tau \in R \setminus F_{\varepsilon/4}(s(T))$ и поэтому $|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x(t_1) - x(t_1 - \tau)| + |x(t_1 - \tau) - x(t_2 - \tau)| + |x(t_2 - \tau) - x(t_2)| < \varepsilon$, $((t_1 - \tau, t_2 - \tau) \cap T = \varnothing$, $\tau \in [t_2 - L(\varepsilon/4), t_2]$, $\varepsilon < 2L(\varepsilon/4))$.

Наоборот, пусть выполняются условия г1—г3. В силу леммы 3 множество $\Omega_\varepsilon$ можно считать состоящим из $\varepsilon$-п. периодов, общих для $T$ и $x(t)$, а выполнение неравенства $|x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$ влечет его выполнение для всех $t \in (R \setminus F_\varepsilon(s(T))) \cap (R \setminus F_\varepsilon(s(T + \tau)))$.

Определение 2. *Для функций $X = (x(t), T)$, $Y = (y(t), P)$ можно определить умножение на скаляр $\alpha X = (\alpha x(t), T)$; сложение $X + Y = (x(t) + y(t), T - P)$; умножение $X \cdot Y = (x(t)\, y(t), T - P)$ и если $x(t) \neq 0$ $\forall t \in R$, то и частное $Y/X = (y(t)/x(t), T - P)$.*

Теорема 1. *Пространство $AP(\mathfrak{G}, \delta)$ замкнуто относительно операций сложения и умножения. Если $X \in AP(\mathfrak{G}, \delta)$ таково, что $x(t) \neq 0$ $\forall t$ и $\forall a > 0$ $\exists \mu(a) > 0$ такое, что $|x(t)| \geqslant \mu(a)$ $\forall t \in R \setminus F_a(s(T))$, то $X^{-1} = (x^{-1}(t), T) \in AP(\mathfrak{G}, \delta)$.*

Лемма 4 (о слабой ограниченности функции $X \in AP(\mathfrak{G}, \delta)$).

*Если* $X = (x(t), T) \in AP(\mathfrak{G}, \delta)$, *то* $\forall a > 0$ $\exists M(a) > 0$ *такое, что* $|x(t)| < M(a)$ $\forall t \in R \setminus F_a(s(T))$.

Доказательство. Согласно лемме 3 $\forall a > 0$ $\exists L(a/4) > 0$ такое, что в любом интервале длины $L(a/4) > 0$ найдется $\tau$ такое, что

$$|x(t+\tau) - x(t)| < a/4 \ \ \forall t \in R \setminus F_{a/4}(s(T)); \ \delta(T+\tau, T) \leqslant \frac{a}{4}. \qquad (4)$$

На $[0, L(a/4)]$ функция (к. н.) $x(t)$ ограничена: $|x(t)| < m(a/4)$. Пусть $t \in R \setminus F_a(s(T))$. В интервале $(t - L(a/4), t)$ найдется такое $\tau$, что выполнено (4), при этом $s = t - \tau \in (0, L(a/4))$. Покажем, что $s \in R \setminus F_{a/2}(s(T))$; в ином случае для некоторого $r \in T$ $|s - r| \leqslant a/2$, а в силу (4) для этого $r$ найдется такое $p \in T$, что $|r + \tau - p| < a/2$ и поэтому

$$|t - p| = |t - \tau - r + r + \tau - p| < a/2 + a/2 = a, \quad t \in F_a(s(T)).$$

В итоге $|x(s) - x(t)| = |x(t-\tau) - x(t)| < a/4$, $|x(t)| \leqslant |x(s) - x(t)| + |x(s)| < a/4 + m(a/4) = M(a)$.

Лемма 5 (о равномерной п. п. конечного числа функций из $AP(\mathfrak{G}, \delta)$). *Пусть* $X_i = (x_i(t), T_i) \in AP(\mathfrak{G}, \delta)$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$, $i = \overline{1, m}$, *найдется относительно плотное на* $R$ *множество* $\Omega_\varepsilon$ *чисел* $\tau$ *таких, что*

$$|x_i(t+\tau) - x_i(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T_i))$$

*и* $\delta(T_i + \tau, T_i) < \varepsilon$ $\forall i = \overline{1, m}$.

Лемма 5 следует из леммы 3 в полной аналогии с тем, как лемма 3 следовала из лемм 1 и 2 (очевидно, при доказательстве достаточно ограничиться рассмотрением случая $m = 2$).

Доказательство теоремы 1. A. (Сложение). Согласно лемме 5 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists L(\varepsilon/2) > 0$ такое, что в любом интервале длины $L(\varepsilon/2)$ найдется $\tau$ такое, что $\delta(T+\tau, T) < \varepsilon/2$, $\delta(P+\tau, P) < \varepsilon/2$; $|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon/2$ $\forall t \in R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T))$; $|y(t+\tau) - y(t)| < \varepsilon/2$ $\forall t \in R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(P))$. Но тогда $\delta((T - P) + \tau, T - P) = \delta((T+\tau) - (P+\tau), T - P) \leqslant \max(\delta(T + \tau, T), \delta(P+\tau, P)) < \varepsilon$, а также и $|x(t+\tau) + y(t+\tau) - (x(t) + y(t))| < \varepsilon$ $\forall t \in (R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T) \cup s(P)) \supset R \setminus F_\varepsilon(s(T - P))$.

Б. (Умножение). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. На множестве $R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T))$ $[R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(P))]$ функция $|x(t)|$ [соответственно $|y(t)|$] ограничена $M(\varepsilon/2)$ согласно лемме 4. Для $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2} M^{-1}\right)$ с учетом леммы 5 существует относительно плотное на $R$ множество $\Omega_\eta$ такое, что $\delta(T+\tau, T) < \eta$, $\delta(P+\tau, P) < \eta$,

$$|x(t+\tau) - x(t)| < \eta \ \ \forall t \in R \setminus F_\eta(s(T)) \supset R \setminus F_\varepsilon(s(T)),$$

$$|y(t+\tau) - y(t)| < \eta \ \ \forall t \in R \setminus F_\eta(s(P)) \supset R \setminus F_\varepsilon(s(P)).$$

Далее, если $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$, то $t + \tau \in R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T))$ (в ином случае для некоторого $p \in T$ $|t + \tau - p| \leqslant \varepsilon/2$, для некоторого $r \in T$ $|p - (r+\tau)| < 2\eta \leqslant \varepsilon/2$ и в итоге $|t - r| = |t + \tau - p + p - (r+\tau)| \leqslant \varepsilon$). Но тогда при $\tau \in \Omega_\eta$ $|x(t+\tau) y(t+\tau) - x(t) y(t)| \leqslant |x(t+\tau)| |y(t+\tau) - y(t)| + |y(t)| |x(t+\tau) - x(t)| \leqslant \varepsilon$ $\forall t \in (R \setminus F_\varepsilon(s)(T))) \cap (R \setminus F_\varepsilon(s(P))) = R \setminus F_\varepsilon(s(T - P))$.

C. (Существование $X^{-1}$). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. На множестве $R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T))$ в силу условий теоремы 1 $|x(t)|$ отграничена от нуля: $|x(t)| \geqslant \mu(\varepsilon/2)$. Пусть $\eta = \min(\varepsilon/4, \varepsilon\mu^2)$, в силу $\delta$-п. п. к. н. функции $X$ существует относительно плотное на $R$ множество $\Omega_\eta$ такое, что $\forall \tau \in \Omega_\eta$ $|x(t+\tau) - x(t)| < \eta$ $\forall t \in R \setminus F_\eta(s(T))$, $\delta(T+\tau, T) < \eta$. Если $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$, то $t + \tau \in R \setminus F_{\varepsilon/2}(s(T))$ (см. п. Б) и поэтому при $\tau \in \Omega_\eta$ имеем

$$|x^{-1}(t+\tau) - x^{-1}(t)| = |x(t+\tau) - x(t)| \cdot [|x(t) x(t+\tau)|]^{-1} < \eta\mu^{-2}(\varepsilon/2) \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T)).$$

Теорема 1 полностью доказана.

1.3. Пусть $x(t): R \to R$ — кусочно-непрерывная функция с разрывами I рода (возможно, нулевыми) в точках множества $T \in \mathfrak{S}$. Для определенности будем полагать $x(t)$ непрерывной слева. Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}$ всех таких пар $X = (x(t), T)$.

На основе условия г) в $\mathfrak{M}$ несложно ввести равномерную топологию и в рамках этой конструкции дать определение Бора п. п. функции, приводящее к пространству $AP(\mathfrak{S}, \delta)$ — в этом одна из специфических черт изучаемого нами класса к. н. п. п. функций.

Пусть $a$ — положительное рациональное число,

$$U_\infty = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M};\ U_a = \{(X, Y) = [(x(t), T);\ (y(t), P)] \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} : \delta(T, P) < a,$$
$$|x(t) - y(t)| < a\ \ \forall t \in R \setminus F_a(s(T - P))\}.$$

Очевидны следующие свойства:

c1) $\forall a \quad \forall X \in \mathfrak{M}\ (X, X) \in U_a$;

c2) если $(X, Y) \in U_a$, то и $(Y, X) \in U_a$ (т. е. $U_a^{-1} = U_a$);

c3) если $(X, Y)$; $(Y, Z) \in U_{a/2}$, то $(X, Z) \in U_a$;

c4) $U_a \cap U_b = U_{\min(a,b)}$.

Поэтому [5] семейство множеств $U_a$ образует базу некоторой равномерности $\mathcal{U}$ на $\mathfrak{M}$ и, таким образом, $\mathfrak{M}$ снабжается равномерной топологией. В $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ последовательность $X_n = (x_n(t), T_n)$ сходится к элементу $X = (x(t), T)$ в том и только в том случае, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0$ такой, что для всех $n \geqslant n_0$ $\delta(T, T_n) < \varepsilon$,

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T_n - T)).$$

Несложно установить, что $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство (неполное). $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно сдвига: если $X = (x(t), T) \in \mathfrak{M}$, то и $\theta_s(X) = (x(t+s), T - s) \in \mathfrak{M}$. При этом если $U_a$ — элемент базы равномерности $\mathcal{U}$, то каково бы ни было $s \in R$

$$(\theta_s(X), \theta_s(Y)) \in U_a \Leftrightarrow (X, Y) \in U_a \quad \forall X, Y. \tag{5}$$

(Заметим также, что отображение $\theta_s : \mathfrak{M} \times R \to \mathfrak{M}$ не является непрерывным по совокупности аргументов.)

Определение $\delta$-п. п. к. н. по Бору функции, данное в следствии после леммы 3, можно переформулировать в новых терминах следующим образом.

Определение 3. *Пара $X = (x(t), T) \in \mathfrak{M}$ называется $\delta$-п. п. к. н. по Бору функцией, если для каждого элемента $V$ равномерности $\mathcal{U}$ существует относительно плотное на $R$ множество чисел $\tau$ таких, что $(\theta_\tau(X), X) \in V$.*

Определение 4. *Пару $X = (x(t), T)$ будем называть $\delta$-п. п. к. н. (по Бохнеру) функцией, если из каждой последовательности $\{h_k'\}$ действительных чисел можно извлечь такую подпоследовательность $\{h_n\} = \{h'_{k_n}\}$, что в $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ для некоторого $Y \in \mathfrak{M}$ будет выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{h_n}(X) = Y.$$

Теорема 2. *Если функция $A \in \mathfrak{M}$ $\delta$-п. п. к. н. (по Бохнеру), то она и $\delta$-п. п. к. н. (по Бору).*

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно: в качестве $\delta$-п. п. к. н. (по Бору) функции, не являющейся $\delta$-п. п. к. н. (по Бохнеру), можно взять пару $X = (0, T)$, где $T \in (s(\mathfrak{A}), \chi)$ указано в примере вначале статьи.

Доказательство. Согласно теореме Александрова — Урысона [5, с. 248] равномерное пространство $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ метризуемо как хаусдорфово пространство со счетной базой равномерности, причем на основании (5) и доказательства метризационной леммы из [5] можно считать, что метрика $d$, порождающая равномерность $\mathcal{U}$, имеет следующее свойство инвариантности:

$$d(\theta_s(X), \theta_s(Y)) = d(X, Y) \quad \forall s \in R \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{M}. \tag{6}$$

В дальнейшем через $AP_h(\mathfrak{G}, \delta)$ будем обозначать подпространство $(\mathfrak{M}, d)$, состоящее из всех $\delta$-п. п. к. н. (по Бохнеру) функций.

Пусть $A \in AP_h(\mathfrak{G}, \delta)$; $\Pi(A) = \{\theta_s(A), \ s \in R\}$. Очевидно, $\Pi(A)$ инвариантно относительно сдвига $\theta_s$ и, таким образом, определено отображение $\theta_s : \Pi(A) \times R \to \Pi(A)$. Пусть $\omega(s) = d(\theta_s(A), A)$. Докажем, что $\lim\limits_{s \to 0} \omega(s) = 0$. Действительно, в противном случае существует последовательность $s'_n \to 0$, $n \to +\infty$, такая, что $\omega(s'_n) \geqslant \varepsilon_0 > 0 \ \forall n$. Так как $A \in AP_h(\mathfrak{G}, \delta)$, то из $\{s'_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{s_k\}$ такую, что при некотором $Y \in \mathfrak{M}$ $\lim\limits_{k \to +\infty} \theta_{s_k}(X) = Y$. Легко проверить, что $Y = X$ и поэтому $\lim\limits_{k \to +\infty} \omega(s_k) = 0$, что противоречит неравенству $\omega(s_k) \geqslant \varepsilon_0 \ \forall k$.

Отображение $\theta_s$: $\Pi(A) \times R \to \Pi(A)$ равномерно непрерывно, так как

$$d(\theta_s(X), \ \theta_r(Y)) = d(\theta_{s-r}(X), Y) \leqslant d(\theta_{s-r}(X), X) + d(X, Y) =$$
$$= d(\theta_{s-r}(A), A) + d(X, Y) = \omega(s-r) + d(X, Y).$$

Обозначим через $H(A)$ замыкание $\Pi(A)$ в $(\mathfrak{M}, d)$. Легко проверить, что $H(A)$ инвариантно относительно сдвига $\theta_s$ и, таким образом, определено отображение $\theta_s$: $H(A) \times R \to H(A)$, которое также равномерно непрерывно. (Если $X, Y \in H(A)$, то существуют последовательности $\{X_n\}, \{Y_n\} \subset \Pi(A)$ такие, что $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ при $n \to \infty$. Так как

$$d(\theta_s(X_n), \ \theta_r(Y_n)) \leqslant \omega(s-r) + d(X_n, \ Y_n) \ \forall n,$$

то после перехода к пределу получаем

$$d(\theta_s(X), \ \theta_r(Y)) \leqslant \omega(s-r) + d(X, Y)).$$

Рассмотрим непрерывную динамическую систему $(H(A), \theta_s)$. Поскольку для нее справедливы рассуждения раздела 3 статьи [1] в той части, где не требуется полнота пространства $(H(A), d)$, то теорему 2 можно считать доказанной. Более того, на том же основании справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. $A \in AP_h(\mathfrak{G}, \delta)$ *тогда и только тогда, когда множество* $H(A) = \mathrm{Closure}\{\theta_s(A), \ s \in R\}$ *компактно в* $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$. *При этом* $\forall B \in H(A)$ *будет* $H(B) = H(A)$ *и поэтому*

$$H(A) \subset AP_h(\mathfrak{G}, \delta) \subset AP(\mathfrak{G}, \delta).$$

2. 1. Определение 5. *Через* $APH(R)$ *будем обозначать подпространство* $AP(\mathfrak{A}, \rho)$, *состоящее из функций, удовлетворяющих требованиям* $H_0$, $H_1$, $H_2$, *из* [1]. *Через* $(\mathfrak{N}, \mathcal{U})$ *обозначим подпространство* $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$, *состоящее из тех функций, для которых выполнено условие* $H_2$ *из* [1]).

Теорема 4. $APH(R) = AP(\mathfrak{A}, \rho) \cap \mathfrak{N} = AP_h(\mathfrak{A}, \rho) \cap \mathfrak{N}$.

Доказательство. Достаточно показать, что $AP(\mathfrak{A}, \rho) \cap \mathfrak{N} \subseteq AP_h(\mathfrak{A}, \rho) \cap \mathfrak{N}$. Пусть $A = (a(t), L) \in APH(R)$, $\Pi(A) = \{\theta_s(A), \ s \in R\}$. Множество $\Pi(A)$ инвариантно относительно $\theta_s$ и, таким образом, определено отображение $\theta_s$: $\Pi(A) \times R \to \Pi(A)$. Положим $\omega_A(s) = \inf\{a : (\theta_s(A), A) \in U_a\}$, $\sigma_A(|s|) = \sup|a(t') - a(t'')|$, где верхняя точная грань берется по всем $t' < t''$ таким, что $|t' - t''| \leqslant |s|$, $[t', t''] \cap L = \varnothing$. Согласно условию $H_2$ $\lim\limits_{s \to 0} \sigma_A(|s|) = 0$, а так как $\omega_A(s) \leqslant \max(|s|, \ \sigma_A(|s|))$, то и $\lim\limits_{s \to 0} \omega_A(s) = 0$. Отображение $\theta_s$: $\Pi(A) \times R \to \Pi(A)$ равномерно непрерывно. Действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ таким, что при $|s| \leqslant \delta$ будет $\sigma_A(|s|) + |s| < \varepsilon/2$. Тогда при любых $|t - r| < \delta$, $X, Y \in \Pi(A) : (X, Y) \in U_{\varepsilon/2}$ имеем $(\theta_{t-r}(A), A) \in U_{\varepsilon/2} \Leftrightarrow (\theta_t(X), \theta_r(X)) \in U_{\varepsilon/2}$; $(X, Y) \in U_{\varepsilon/2} \Leftrightarrow (\theta_r(X), \ \theta_r(Y)) \in U_{\varepsilon/2}$ и в итоге $(\theta_t(X), \ \theta_r(Y)) \in U_\varepsilon$.

Обозначим через $H(A)$ замыкание $\Pi(A)$ в $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$. Покажем, что $H(A) \subset \mathfrak{N}$. Если $B = (b(t), K) \in H(A)$, то существует числовая последовательность $\{s_n\}$ такая, что $\theta_{s_n}(A) = (a(t + s_n), \ L - s_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Пусть числа $t' < t''$ таковы, что $[t', t''] \cap K = \varnothing$. Существует $\varkappa > 0$, при котором $[t' - \varkappa, t'' + \varkappa] \cap K = \varnothing$; для этого $\varkappa$ выберем $n_0$ таким, что $\forall n \geqslant n_0$ $(\theta_{s_n}(A), B) \in U_{\varkappa/4}$. Но тогда при $n \geqslant n_0$ обязательно $[t' - \varkappa/4, t'' + \varkappa/4] \cap (L - s_n) = \varnothing$ и поэтому

$$|a(t' + s_n) - a(t'' + s_n)| \leqslant \sigma_A(|t' - t''|) \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Учитывая, что последовательность функций $a(t + s_n)$ равномерно на $[t' - \varkappa/4, t'' + \varkappa/4]$ сходится к функции $b(t)$ при $n \to \infty$, $n \geqslant n_0$, получаем $|b(t') - b(t'')| \leqslant \sigma_A(|t' - t''|)$, т. е. $B \in \mathfrak{N}$. Мы показали, кроме того, что если $\sigma_B(|s|) = \sup |b(t') - b(t'')|$, где точная верхняя грань берется по всем $t' < t''$ таким, что $[t', t''] \cap K = \varnothing$, $|t' - t''| \leqslant |s|$, то $\sigma_B(|s|) \leqslant \leqslant \sigma_A(|s|)$.

Далее, $H(A)$ инвариантно относительно сдвига $\theta_s$ и, таким образом, определено отображение $\theta_s$: $H(A) \times R \to H(A)$. Докажем его равномерную непрерывность. Для произвольного $B \in H(A)$ обозначим $\omega_B(s) = \inf\{a : (\theta_s(B), B) \in U_a\}$: очевидно, $\omega_B(s) \leqslant \max(|s|, \sigma_B(|s|)) \leqslant \max(|s|, \sigma_A(|s|))$. Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ таким, чтобы при $|s| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство $\max(|s|, \sigma_A(|s|)) < \varepsilon/2$. Тогда при любых $|t - r| < \delta$, $X, Y \in H(A)$; $(X, Y) \in U_{\varepsilon/2}$ имеем $(\theta_t(X), \theta_r(Y)) \in U_{\varepsilon/2}$ и $(\theta_r(X), \theta_r(Y)) \in U_{\varepsilon/2}$, а поэтому $(\theta_t(X), \theta_r(Y)) \in U_\varepsilon$.

Таким образом, можно рассматривать непрерывную динамическую систему $(H(A), \theta_s, \mathcal{U})$. Докажем полноту пространства $(H(A), \mathcal{U})$. Если $Y_n = (y_n(t), T_n) \in H(A)$ — фундаментальная последовательность, то и последовательность $T_n \in \mathfrak{A}$ фундаментальна и в силу полноты $(\mathfrak{A}, \rho)$ существует множество $T \subset \mathfrak{A}$ такое, что $T_n \to T$, $n \to \infty$. Пусть $\rho_n = \rho(T_n, T) \to 0$, $n \to \infty$, без ограничения общности можно полагать $\rho_{n+1} < \rho_n$ $\forall n$. На множестве $G_m = R \setminus F_{2\rho_m}(s(T)) \subset R \setminus (F_{\rho_m}(s(T)) \cup F_{\rho_m}(s(T_m)))$ тогда при $n \geqslant m$ определена последовательность функций $y_n(t)$; $y_n(t) \in C(G_m)$, являющаяся фундаментальной; поэтому существует функция $y(t) \in C(G_m)$ такая, что $y_n(t)$ стремится к $y(t)$ равномерно на $G_m$ при $n \to \infty$. Кроме того, так как для каждых $t_1$, $t_2$, лежащих в одном и том же интервале $G_m$, $|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \leqslant \sigma_A(|t_1 - t_2|)$, то и $|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \sigma_A(|t_1 - t_2|)$. Так как $G_m \subset G_{m+1}$; $\bigcup_m G_m = R \setminus T$, то существует функция $y(t)$; $(y(t)$: $R \setminus T \to R)$ такая, что $y_n(t) \rightrightarrows y(t)$ на каждом из $G_m$ при $n \to \infty$ и, более того, для $y(t)$ выполнено $H_2$ [1]. Доопределим $y(t)$ в точках $s(T)$ так, чтобы она была непрерывной слева, тогда $Y = (y(t), T) \in \mathfrak{N}$. Несложно убедиться в том, что $\lim_{n \to \infty} Y_n = Y$, а это, учитывая замкнутость $H(A)$, свидетельствует о полноте пространства $(H(A), \mathcal{U})$.

Теорема 4 теперь следует из теоремы 1 из [1] с учетом замечания, предшествующего формуле (6).

2.2. Укажем важнейшие из свойств пространства $APH(R) \subset AP(\mathfrak{A}, \rho)$.

А. *Пространство $APH(R)$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр.*

Это утверждение следует из теоремы 1 и того, что при $X$, $Y \in \mathfrak{N}$ будет $X + Y \in \mathfrak{N}$, $\alpha X \in \mathfrak{N}$ $\forall \alpha \in R$.

В. *Согласно лемме 4 функция $X \in APH(R)$ слабо ограничена. Существует неограниченная функция $A \in APH(R)$ (ср. с теоремой 23.1 из [3]).*

Действительно, пусть $T = \{n\} \cup \{n + c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, где $\{c_n\}$ — такая п. п. последовательность, что $0 < c_n < 1/4$ и $\inf_n c_n = 0$; а функция $a(t)$: $R \to \to R$ такова, что

$$a(t) = \begin{cases} (t - n) + c_n^{-1}, & t \in (n, n + c_n]; \\ 0, & t \in (n + c_n, n + 1]. \end{cases}$$

Очевидно, $(a(t), T) \in \mathfrak{N}$, функция $a(t)$ неограничена (так как $a(n + c_n)$ $= c_n^{-1} + c_n$) и, кроме того, $T$ — ρ-п. п. множество [1]. Покажем, что $A$ выполнено $\Gamma_1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon < 0{,}25$, последовательно $\{q_n\}$, $q_n = \max\{c_n, \varepsilon\}$ будет п. п. и так как $q_n \geqslant \varepsilon > 0$, то и последо тельность $\{q_n^{-1}\}$ будет п. п. Пусть $\Omega_\varepsilon$ — множество $\varepsilon/2$-п. периодов, общ для $\{q_n^{-1}\}$ и $\{c_n\}$. Докажем, что при $p \in \Omega_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|a(t+p) - a(t)| < \varepsilon/2 \quad \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(T).$$

Действительно, если $t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T))$, то 1) либо $t \in (m + c_m + \varepsilon,\ m + 1-$ при некотором $m$ и тогда с учетом оценки $|c_{m+p} - c_m| < \varepsilon/2$ выполн $t + p \in (m + p + c_m + \varepsilon,\ m + p + 1 - \varepsilon] \subset (m + p,\ m + p + c_{m+p}]$ и этому справедливо (7); 2) либо $t \in (m + \varepsilon,\ m + c_m - \varepsilon]$ и поэтому $c_m >$ В этом случае также $t + p \in (m + p + \varepsilon,\ m + p + c_m - \varepsilon] \subset (m + p,\ n$ $+ p + c_{m+p}]$ и $c_{m+p} \geqslant c_m - |c_m - c_{m+p}| > \varepsilon$, а поэтому $q_m^{-1} = c_m^{-1}$, $q_{m+}^{-1}$ $= c_{m+p}^{-1}$. В итоге получаем

$$|a(t) - a(t+p)| = |c_m^{-1} - c_{m+p}^{-1}| = |q_m^{-1} - q_{m+p}^{-1}| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $A \in APH(R)$.

C. 1. *Пространство $APH(R)$ не замкнуто относительно умно ния. 2. Если $A$, $B \in APW(R)$, то $AB \in APW(R)$. 3. Если $A \in APH($ $|a(t)| \geqslant \mu > 0$ $\forall t$, то $A^{-1} \in APW(R)$.*

Докажем, например, (1); для этого возьмем функцию $A$, построенн в предыдущем примере. Тогда $A^2 \notin \mathfrak{N}$, так как $a^2(n + c_n) - a^2(n)$ $= 2 + c_n^2 > 2$, в то время как $\inf\limits_n c_n = 0$, $(n + c_n, n) \cap T = \varnothing$.

D. 1. *Свойства $H_0$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ [1] независимы между собой.*

*2. С геометрической точки зрения удобно отождествлять δ-п. п. к функции $A = (a(t), T)$ и $B = (a(t), P)$ при $s(T) = s(P)$. Это отожде вление важно еще и по той причине, что без него в $AP(\mathfrak{S}, \delta)$ формал может не выполняться закон дистрибутивности. 3. Матричнознач функцию $M = \{M_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, назовем δ-п. п. к. н., если $M_i$ $= (m_{ij}(t), T_{ij}) \in AP(\mathfrak{S}, \delta)$ $\forall i, j$. Учитывая лемму 5, для такой функ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать относительно плотное на $R$ множе во $\Omega_\varepsilon$ чисел $\tau$ таких, что*

$$\delta(T, T + \tau) < \varepsilon,\ \|M(t + \tau) - M(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T)),$$

*где $T = \overline{\bigcup_{i,j}} T_{ij}$, $M(t) = \{m_{ij}(t)\}$, $\|\cdot\|$ — одна из матричных норм.*

E. 1. *Пусть $B = (b(t), T) \in AP(\mathfrak{S}, \delta)$; $\lambda_\varepsilon(t) = \operatorname{mes}(F_\varepsilon(s(T)) \cap [t, t +$ Предположим, что $b(t)$ ограничена: $|b(t)| \leqslant m$ $\forall t$, а $\lambda_\varepsilon(t) \to 0$ при $\to 0 +$ равномерно по $t \in R$. Тогда $b(t)$ — $S$-п. п. функция Степан а поэтому если $b(t)$ равномерно непрерывна на $R$, то $b(t)$ — п. п. функ Бора. В частности, все функции из $APW(R)$ $S$-п. п.*

*2. В $APH(R)$ есть функции, не имеющие среднего (в обычном пони нии, и поэтому не п. п. по Вейлю).*

Доказательство. 1. Зафиксируем произвольное положите ное $\varepsilon < 0{,}5$ и $\varepsilon$ — п. период $\tau$ функции $B$. Тогда

$$|b(t) - b(t + \tau)| < \varepsilon \ \ \forall t \in R \setminus F_\varepsilon(s(T)),$$

и если $\Phi' = F_\varepsilon(s(T)) \cap [t, t+1]$, $\Phi'' = [t, t+1] \setminus \Phi'$, то

$$\int_t^{t+1} |b(u) - b(u + \tau)|\, du = \int_{\Phi'} |\ldots|\, du + \int_{\Phi''} |\ldots|\, du \leqslant 2m\lambda_\varepsilon(t) + \varepsilon.$$

2. Пусть $T = \{n\} \cup \left\{n + \dfrac{1}{2}\cos^2 n\right\}$, а функция $f(t)\colon R \to R$ такова, что

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (n + 1/2\cos^2 n,\ n + 1]; \\ 2|\cos n|^{-4}, & t \in (n,\ n + 1/2\cos^2 n]. \end{cases}$$

Аналогично свойству $B$ показываем: $(f(t), T) \in APH(R)$. Далее,

$$\frac{1}{n+1}\int_0^{n+1} f(u)\,du = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\cos^{-2} k,$$

предел же выражения, стоящего справа, при $n \to \infty$ равен $+\infty$ (это несложно доказать, используя эргодическую теорему Биркгофа).

3. В заключение рассмотрим вопрос о п. п. к. н. решениях из $APW(R)$ у импульсных систем.

Здесь предложен метод, в принципе сводящий исследование п. п. импульсной системы к хорошо изученному непрерывному расширению минимальной системы типа сдвигов на метрическом компакте, причем результат выдается в терминах импульсных систем. Для простоты ограничимся линейными системами

$$dx/dt = A(t)\,x + a(t), \qquad (8)$$
$$\Delta x|_{t_i} = F_i x + f_i,$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $t_i \leqslant t_{i+1}\ \forall i$; $f_i,\ x \in R^n$; $F_i \in M_n(R)$, $T = \{t_i\} \in \mathfrak{B}$, $s(T) = \{\tau_j\}$; $\mathrm{pr}: T \to s(T)$ — каноническое отображение $T$ на фактор-множество $s(T)$. Возможно, $T \neq s(T)$, запись (8) в этом случае есть краткое обозначение обычной импульсной системы

$$dx/dt = A(t)\,x + a(t),$$
$$\Delta x|_{\tau_j} = \Phi_j x + \varphi_j,$$

где $(E + \Phi_j)\,x + \varphi_j = H_{i_\bullet+k} \circ \ldots \circ H_{i_\bullet}(x)$, $H_i(x) = (E + F_i)\,x + f_i$, $\{t_{i_\bullet+k}, \ldots$ $\ldots, t_{i_\bullet}\} = \mathrm{pr}^{-1}\{\tau_j\}$.

Естественно рассмотреть сдвиг (8) при произвольном $s \in R$:

$$dx/dt = A(t+s)\,x + a(t+s), \qquad (9)$$
$$\Delta x|_{t_i - s} = F_i x + f_i.$$

Удобно перенумеровать последовательность $\{t_i - s\}$ так, чтобы полученная в результате последовательность $\{t_i(s)\}$ лежала бы в $\mathfrak{B}$, при этом для некоторого целого $k(s)$ будет $t_i(s) = t_{i+k(s)} - s\ \forall i$ и (9) примет вид

$$dx/dt = A(t+s)\,x + a(t+s),$$
$$\Delta x|_{t_i(s)} = F_{i+k(s)} + f_{i+k(s)}.$$

Определение 6. *Систему* (8) *назовем* $\rho$-*п. п., если* $A(t)$ *и* $a(t)$ — $S$-*п. п. функции*, $\{f_i\}$ *и* $\{F_i\}$ — *п. п. последовательности*, $T$ — $\rho$-*п. п. множество.*

Для функции $(A(t),\ a(t), 0)$: $R \to M_n(R) \times R^n \times R$ и вектора $(F_n, f_n, 1)$ введем обозначения $L(t)$ и $L_n$.

Если (8) — $\rho$-п. п. система, то из произвольной последовательности чисел $\{s'_k\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{s_m\} = \{s'_{k_m}\}$, что в $S$ и $l_\infty$ соответственно

$$L(t + s_m) \to L^*(t) = (A^*(t),\ a^*(t), 0),$$
$$\{L_{n+k(s_m)}\} \to \{L^*_n\} = \{(F^*_n, f^*_n, 1)\},\ \{t_n(s_m) - t^*_n\} \to 0. \qquad (10)$$

Полученные всеми подобными предельными переходами системы

$$dx/dt = A^*(t)\,x + a^*(t),$$
$$\Delta x|_{t^*_i} = F^*_i x + f^*_i \qquad (11)$$

будем называть $H$-классом системы (8) (после предельного перехода, возможно, $\{t^*_i\} \notin \mathfrak{B}$ и нужно дополнительно сдвинуть все номера этой последовательности). Из результатов [1] и свойств п. п. функций Степанова следует, что $H$-класс определяется любым своим представителем. После необходимых определений можно говорить о компактности $H$-класса и о том, что (11) определяет линейное расширение над минимальной двусторонне устойчивой системой сдвигов, действующей на $H$; заметим, однако, что линейное расширение не будет определять непрерывную полугруппу на $H \times R^n$ из-за разрывов решений (11) (речь идет о полугруппе, так как матрицы $E + F_i$ могут быть вырожденными).

3.1. Всюду далее полагаем систему (8) ρ-п. п. Согласно [1] $t_n = an + c_n$, $\{c_n\}$ — п. п. последовательность. Положим $d_n = (a+1)n + c_n$, тогда $D = \{d_n\}$ — ρ-п. п. множество, $d_{n+1} - d_n \geqslant 1$ $\forall n$.

Определение (см. [6, 7]). *К. н. функцию* $x(t)$: $R \to R$ *с разрывами* I *рода на* $T$ *будем называть* $N$ —ρ-*п. п. к. н. функцией Левитана, если*

1) $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall N > 0$ *существует относительно плотное множество* $\Omega_{\varepsilon,N}$ $\varepsilon$ — $N$-*п. периодов* $\tau$ (*т. е. таких чисел, что*

$$|x(t \pm \tau) - x(t)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \in (R \setminus F_\varepsilon (s(T))) \cap [-N, N]);$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists \eta(\varepsilon, N) > 0$: $\Omega_{\eta,N} \pm \Omega_{\eta,N} \subset \Omega_{\varepsilon,N}$.

Нашей целью будет доказательство следующих утверждений, являющихся аналогами для п. п. импульсных систем теорем соответственно Фавара и Левитана.

Теорема 5. *Если каждая из однородных импульсных систем* $H$-*класса системы* (8) *не имеет ограниченных решений, отличных от тривиального, то для любой системы* (11) *ее ограниченное решение* $x^*(t)$ *будет лежать в* $APW(R)$ (*точнее,* $(x^*(t), T^*) \in APW(R)$).

Теорема 6. *Если однородная импульсная система имеет лишь тривиальное ограниченное решение, то любое ограниченное решение соответствующей неоднородной* ρ-*п. п. системы* (8) *будет* $N$-ρ-*п. п. к. н. функцией Левитана.*

При доказательстве этих теорем нам понадобятся следующие утверждения, приводимые здесь без доказательства.

Лемма 6. *Если* $f(x)$ — $S$-*п. п. функция, то* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\sup_{x \in R} \int_x^{x+\delta} |f(u)|\, du < \varepsilon.$$

Лемма 7. *Пусть функция* $f(t): R \to R$ *п.п. по Бору* ($N$- *п.п. по Левитану*), $\varphi(t) = f(t+n)$ *при* $t \in (t_n, t_{n+1}]$. *Тогда* $(\varphi(t), T) \in APW(R)$, ($(\varphi(t), T)$ — $N$ — ρ-*п. п. к. н. по Левитану функция*).

Определим функцию $\mathscr{L}(t): R \to M_n(R) \times R^n \times R$:

$$\mathscr{L}(t) = \begin{cases} L_{n+1}, & t \in (d_{n+1} - 1, d_{n+1}]; \\ L(t-n), & t \in (d_n, d_{n+1} - 1]. \end{cases} \tag{12}$$

Очевидно, по (8) можно построить $\mathscr{L}(t)$, а также и наоборот.

Лемма 8. *Если* (8) — ρ-*п. п. система, то* $\mathscr{L}(t)$ — $S$-*п. п. функция.*

Лемма 9. *Пусть* $\mathscr{L}^*(t)$ *лежит в* $H$-*классе* $H(\mathscr{L})$ *функции* $\mathscr{L}(t)$. *Тогда для некоторой последовательности* $\{s_m\}$ *выполнено* (10) *и если* $d_n^* = t_n^* + n$, *то, замение* $\mathscr{L}, L$ *и* $d$ *в* (12) *на* $\mathscr{L}^*$, $L^*$ *и* $d^*$, *получим выражение для* $\mathscr{L}^*(t)$.

Лемма 9 показывает, что с каждой функцией $\mathscr{L}^* \in H(\mathscr{L})$ можно однозначно связать некоторую ρ-п. п. систему из $H$-класса системы (8).

Доказательство теорем 5 и 6 проведем, следуя [7], гл. VII. Рассмотрим тривиальное расслоение $(H(\mathscr{L}) \times R^n, \pi, H(\mathscr{L}))$. Пусть $\hat{x}(t)$ — ограниченное решение (8) и

$$x(t) = \begin{cases} \hat{x}(t-n), & t \in (d_n, d_{n+1} - 1]; \\ \hat{x}(t_{n+1} + 0) + \Delta \hat{x}|_{t_{n+1}} (t - d_{n+1}), & \\ t \in (d_{n+1} - 1, \quad d_{n+1}]. & \end{cases}$$

Прямая проверка показывает: $x(t)$ непрерывна и ограничена на $R$; из леммы 6 и неравенства $\|\Delta \hat{x}|_{t_n}\| \leqslant \hat{\|} x(t)\| \|F_n\| + \|f_n\| \leqslant C < \infty$ дополнительно следует равномерная непрерывность $x(t)$ на $R$. Множество $Q_1 = \{(\mathscr{L}(t+s), x(s)),\ s \in R\}$ ограничено в $H(\mathscr{L}) \times R^n$ и поэтому для его замыкания $Q$ $\pi(Q) = H(L)$. Зафиксируем произвольное $L^* \in H(\mathscr{L})$ и пусть $\mathscr{L}(t+h_k) \to \mathscr{L}^*(t)$. Для равномерно непрерывной функции $x(t)$ можно указать ограниченную непрерывную функцию $x^*(t): R \to R^n$ такую, что $x(t+h_k) \to x^*(t)$ при $k \to +\infty$ равномерно на компактах из $R$. Более того, согласно лемме 9 функция $\hat{x}^*(t) = x^*(t+n)$ при $t \in (t_n, t_{n+1}]$ будет ограниченным решением системы (11). 1. Пусть выполнены условия теоремы 5. В этом случае $\hat{x}^*(t)$ — единственное решение (11) и поэтому $x^*(t)$ — единственная предельная функция для $x(t+h_k)$. Следовательно, множество $\pi^{-1}(\mathscr{L}^*) \cap Q$ состоит из единственной точки и поэтому отображение $\pi: Q \to H(\mathscr{L})$ — гомеоморфизм. Но тогда $x^*(t)$ — п. п. по Бору функция, а с учетом леммы 7 $(\hat{x}^*(t), T^*) \in APW(R)$. 2. Предположим, что ρ-п. п. система (8) имеет единственное ограниченное решение $\hat{x}(t)$. Тогда $\forall s \in R$ множество $\pi^{-1}(\mathscr{L}(t+s)) \cap Q$ состоит из единственной точки и поэтому если рассматривать $\pi(Q_1)$ как метрическое подпространство $H(\mathscr{L})$, то функция

$$\mathscr{L}(t+s) \to (\mathscr{L}(t+s), x(s)),$$

заданная на $\pi(Q_1)$, непрерывна.

Следовательно [7], $x(t)$ — $N$-п. п. по Левитану функция и для завершения доказательства теоремы 6 остается применить лемму 7.


1. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Один класс кусочно-непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой. I // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 12.— С. 1613—1619.
2. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1974.— 424 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987.— 282 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 311 с.
5. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М. : Мир, 1968.— 384 с.
6. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М. : Гостехиздат, 1953.— 396 с.
7. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 207 с.



Получено 28.02.91