УДК 519.21

А. В. Свищук, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Двойное приближение случайных эволюций в схеме усреднения

Рассматривается двойное приближение полумарковских случайных эволюций — усреднение и диффузионная аппроксимация, когда условие баланса не выполнено. Алгоритмы двойного приближения применяются к процессам запасания, переноса и другим стохастическим системам в полумарковской случайной среде.

Розглядається подвійне наближення напівмарківських випадкових еволюцій — усереднення та дифузійна апроксимація, коли умова балансу не виконується. Алгоритми подвійного наближення застосовуються до процесів запасу, переносу та інших стохастичних систем в напівмарківському випадковому середовищі.

Алгоритмы фазового усреднения случайных эволюций, приведенные в [1] и обоснованные в [2, 3], определяют усредненную эволюцию, которую естественно рассматривать в качестве первого приближения исходной эволюции в полумарковской случайной среде.

Алгоритмы диффузионной аппроксимации полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ), приведенные в [1] с обоснованием в [3, 5], определяют второе приближение исходной эволюции, так как при выполнении условий баланса первое приближение — усредненная эволюция — тривиально.

В настоящей статье используются определения, обозначения и условия, введенные в работах [1—6].

1. Двойное приближение непрерывных ПМСЭ. В соответствии с алгоритмом фазового усреднения ПМСЭ в эргодической полумарковской случайной среде [2, 4, 5] для непрерывной ПМСЭ $V^\varepsilon(t/\varepsilon)$, которая задается уравнением

$$V^\varepsilon(t/\varepsilon) f = f + \int_0^t \Gamma(x(s/\varepsilon)) V^\varepsilon(s/\varepsilon) f ds \quad \forall f \in \mathbf{B}_0, \tag{1}$$

усредненная эволюция $\hat{V}(t)$ определяется решением детерминированной эволюционной задачи

$$\hat{V}(t) f = f + \int_0^t \hat{\Gamma}\hat{V}(s) f ds \quad \forall f \in \mathbf{B}_0, \tag{2}$$

с усредненным производящим оператором

$$\hat{\Gamma} := \int_X \pi(dx)\, \Gamma(x),$$

где $\mathrm{B}_0 := \bigcap_{x \in X} \mathrm{Dom}(\Gamma^2(x))$ плотно в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbf{B}$, $\pi(A)$ — инвариантная мера полумарковского процесса (ПМП) $x(t)$ в измеримом фазовом пространстве $(X, \mathfrak{X})$, $A \in \mathfrak{X}$.

Для построения второго (диффузионного) приближения исходной эволюции введем операторный процесс уклонений

$$W^\varepsilon(t) f := \varepsilon^{-1/2} [V^\varepsilon(t/\varepsilon) - \hat{V}(t)] f. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы из работы* [4]. *Тогда процесс $W^\varepsilon(t) f$ в* (3) *слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к процессу $\hat{W}(t) f$, удовлетворяющему стохастическому операторному уравнению*

$$\hat{W}(t) f = \int_0^t \hat{\Gamma}\hat{W}(s) f ds + \hat{\sigma} f w(t) \quad \forall f \in \mathbf{B}_0, \tag{4}$$

где $\hat{\sigma}$ — такой оператор, что $\forall l \in \mathrm{B}_0^*$

$$l^2(\sigma f) := 2 \int_X \rho(dx) [m_1(x)\, l((\Gamma x) - \hat{\Gamma}) f) \times (R_0)\, m_1(x) \times l((\Gamma(x) - \hat{\Gamma}) f) +$$

$$+ 2^{-1} m_2(x)\, l^2((\Gamma(x) - \hat{\Gamma}) f)]/m$$

$$\forall f \in \mathrm{B}_0,\ m_i(x) := \int_0^\infty t^i G_x(dt), \quad i = 1, 2, \quad x \in \mathrm{X}, \tag{5}$$

$W(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\mathbf{B}_0^*$ — сопряженное к $\mathbf{B}_0$ пространство, R_0 — потенциал вложенной в $x(t)$ цепи Маркова $(x_n; n \geqslant 0)$.

Доказательство. В условиях теоремы из [4] существует непрерывный процесс $\hat{W}(t) f$, предельный для $W^\varepsilon(t) f$ при $\varepsilon \to 0$. Из уравнений (1) и (2) с учетом (3) получаем соотношение для $W^\varepsilon(t)f$:

$$W^\varepsilon(t)f = \int_0^t \hat{\Gamma} W^\varepsilon(s) f ds + \int_0^t [\Gamma(x(s/\varepsilon)) - \hat{\Gamma}] W^\varepsilon(s) f ds +$$

$$+ \varepsilon^{-1/2} \int_0^t [\Gamma(x(s/\varepsilon)) - \hat{\Gamma}] \hat{V}(s) f ds. \quad (6)$$

Второй член в (6) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, так как производящий оператор $\tilde{\Gamma}(x) := \Gamma(x) - \hat{\Gamma}$ удовлетворяет условию баланса $\int_X \pi(dx) \tilde{\Gamma}(x) f = 0 \ \forall f \in \mathbf{B}_0$. К третьему слагаемому в (6) применима центральная предельная теорема для банаховозначных случайных величин [6] таких, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^{-1/2} \int_0^t \tilde{\Gamma}(x(s/\varepsilon)) \hat{V}(s) f ds \to \hat{\sigma} f w(t); \quad (7)$$

оператор $\hat{\sigma}$ определяется соотношением (5).

Переходя в соотношении (6) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (4).

2. Приближение ПМСЭ со скачками. В соответствии с определением ПМСЭ со скачками в схеме серий $V^\varepsilon(t/\varepsilon)$ задается уравнением

$$V^\varepsilon(t/\varepsilon) f = f + \int_0^t \Gamma(x(s/\varepsilon)) V^\varepsilon(s/\varepsilon) f ds + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} [\mathcal{D}^\varepsilon(x_{k-1}) - I] V^\varepsilon(\varepsilon \tau_k) f \quad \forall f \in \mathbf{B}_0. \quad (8)$$

В условиях теоремы [4] усредненная эволюция $\hat{V}(t)$ в эргодической полумарковской среде задается уравнением

$$\hat{V}(t) f = f + \int_0^t (\hat{\Gamma} + \hat{\mathcal{D}}) \hat{V}(s) f ds \quad \forall f \in \mathbf{B}_0, \quad (9)$$

$$\hat{\Gamma} := \int_X \pi(dx) \Gamma(x), \quad \hat{\mathcal{D}} := m^{-1} \int_X \rho(dx) \mathcal{D}(x), \quad (10)$$

где $\rho(A)$ — стационарная мера цепи Маркова $(X_n;\ n \geqslant 0)$, $\mathbf{B}_0 := \bigcap_{x \in X} \mathrm{Dom}(\Gamma^2(x)) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{D}(x))$ плотно в $\mathbf{B}$.

Рассмотрим уклонение исходной эволюции от усредненной

$$W^\varepsilon(t) f := \varepsilon^{-1/2} [V^\varepsilon(t/\varepsilon) - \hat{V}(t)] f. \quad (11)$$

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы из работы* [4] *процесс уклонений $W^\varepsilon(t) f$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к процессу $\hat{W}(t) f$, который задается уравнением*

$$\hat{W}(t) f = \int_0^t \hat{\Gamma} \hat{W}(s) f ds + \bar{\sigma} f (w(t)) \quad \forall f \in \mathbf{B}_0. \quad (12)$$

Дисперсионный оператор $\bar{\sigma} := \hat{\sigma} + \sigma_0$ определяется соотношением $\forall l \in \mathbf{B}_0^*$

$$l^2(\sigma_0 f) := 2 \int_X \rho(dx) [l((\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}}) f)(R_0)\ l((\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}}) f)]/m, \quad (13)$$

а $\hat{\sigma}$ — соотношением (5).

Доказательство. В условиях теоремы из [4] существует непрерывный процесс $\hat{W}(t) f$, предельный для $W^\varepsilon(t) f$ при $\varepsilon \to 0$.

Из уравнений (7) и (9) с учетом (11) получаем соотношение для уклонений:

$$W^{\varepsilon}(t)f = \int_0^t (\Gamma(x(s/\varepsilon)) - \hat{\Gamma}) V^{\varepsilon}(s/\varepsilon) f ds/\sqrt{\varepsilon} + \int_0^t \hat{\Gamma} W^{\varepsilon}(s) f ds +$$

$$+ \varepsilon^{-1/2}\left[V_d^{\varepsilon}(t)f - \int_0^t \hat{\mathcal{D}}\hat{V}(s) f ds\right] \quad \forall f \in \mathbf{B}_0, \tag{14}$$

где

$$V_d^{\varepsilon}(t)f := \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} [\mathcal{D}^{\varepsilon}(x_{k-1}) - I] V^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_k^-) f, \tag{15}$$

$$\tau_k^- := \tau_k - 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Для первого слагаемого в (14) предел при $\varepsilon \to 0$ найден в [6]:

$$\varepsilon^{-1/2}\int_0^t (\Gamma(x(s/\varepsilon)) - \hat{\Gamma}) V^{\varepsilon}(s/\varepsilon) f ds \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \hat{\sigma} f w(t), \tag{16}$$

$$\forall f \in \mathbf{B}_0.$$

Оператор $\hat{\sigma}$ определен в (5).

Для второго слагаемого в (14) предел при $\varepsilon \to 0$ следующий:

$$\int_0^t \hat{\Gamma}\hat{W}(s) f ds.$$

Чтобы вычислить предел при $\varepsilon \to 0$ для третьего слагаемого в (14), заметим, что аналогично доказательству теоремы усреднения [4] для скачкообразных ПМСЭ ($\Gamma_x(t) \equiv I$) устанавливается слабая сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} [\mathcal{D}^{\varepsilon}(x_{k-1}) - I] V^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_k^-) f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^t \hat{\mathcal{D}}\hat{V}(s) f ds \quad \forall f \in \mathbf{B}_0.$$

Принимая во внимание центральную предельную теорему для операторнозначных случайных величин [6] с учетом условия баланса для оператора $m^{-1}\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}}\left(\int_X \rho(dx)\,[m^{-1}\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}}] = 0\right)$ находим, что для третьего члена в (14) имеет место сходимость:

$$\left[\varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathcal{D}(x_{k-1}) V_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_k^-) f - \int_0^t \hat{\mathcal{D}}\hat{V}(s) f ds\right]/\sqrt{\varepsilon}_{\varepsilon\to 0}\!\!\to \sigma_0 f w(t) \tag{17}$$

$$\forall f \in \mathbf{B}_0,$$

где оператор σ_0 такой, что $\forall l \in \mathbf{B}_0^*$.

$$l^2(\sigma_0 f) := 2\int_X \rho(dx)\,[l((P\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}})f)(R_0)\,l((P\mathcal{D}(x) - \hat{\mathcal{D}})f) +$$
$$+ l(P\mathcal{D}_2(x) f)]/m.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в представлении (14), с учетом (16), (17) получаем доказательство теоремы 2.

Замечания. 1. Стохастические операторные уравнения (4) и (12) понимаются в слабом смысле, т. е. как стохастические уравнения в $\mathbf{B}^*$ после применения к обеим их частям функционала $l \in \mathbf{B}^*$, где $\mathbf{B}^*$ — сопряженное к $\mathbf{B}$ пространство. Решение уравнения (4) имеет вид

$$\hat{W}(t) f = \hat{\sigma}\int_0^t e^{\hat{\Gamma}(t-s)} f w(s) ds.$$

2. Теоремы 1 и 2 позволяют представить двойное приближение ПМСЭ в следующем виде:

$$V^{\varepsilon}(t/\varepsilon) \simeq \hat{V}(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\hat{W}(t), \quad \varepsilon > 0,$$

что вполне соответствует стандартной форме центральной предельной теоремы с отличным от нуля предельным средним значением.

3. Двойное приближение процесса переноса. Для стохастического процесса переноса $U_c^{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющего задаче Коши

$$dU_c^{\varepsilon}(t)/dt = c(U_c^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon)), \quad U_c^{\varepsilon}(0) = u_0, \tag{18}$$

усредненный детерминированный процесс $\hat{U}_c(t)$ определяется дифференциальным уравнением [1, 6, 7]

$$d\hat{U}_c(t)/dt = \hat{c}(\hat{U}_c(t)), \quad \hat{U}_c(0) = u_0, \tag{19}$$

$$\hat{c}(u) := \int_X \pi(dx)\, c(u, x).$$

Для построения двойного приближения процесса $U_c^{\varepsilon}(t)$ в схеме усреднения введем процесс

$$\eta_t^{\varepsilon} := [U_c^{\varepsilon}(t) - \hat{U}_c(t)]/\sqrt{\varepsilon} \tag{20}$$

и предположим, что выполнено условие С: функция $c(u, x)$ непрерывна по совокупности переменных, при каждом $x \in X$ дважды дифференцируемая по u, и $c_u''(u, x)$ равномерно ограничена по u и x.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы из* [4], *кроме условия баланса и условия* А).

Тогда процесс η_t^{ε} *в* (20) *слабо сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к процессу* $\hat{\eta}(t)$, *удовлетворяющему стохастическому уравнению Ито*:

$$\hat{\eta}(t) = \int_0^t a(\hat{u}_c(s))\,\eta(s)\,ds + \int_0^t \sigma(\hat{U}_c(s))\,dw(s), \tag{21}$$

где

$$a(u) := \int_X c_u'(u, x)\,\pi(dx),$$

$$\sigma^2(u) := 2\int_X \rho(dx)\,[m_1(x)(c(u, x) - \hat{c}(u))(R_0)\,m_1(x) \times (c(u, x) - \hat{c}(u)) + $$
$$+ 2^{-1} m_2(x)(c(u, x) - \hat{c}(u))^2]/m, \tag{22}$$

$w(t)$ — *стандартный винеровский процесс.*

Доказательство. Так как $U_c^{\varepsilon}(t)$ — относительно компактное семейство [4, 5], то и η_t^{ε} является таким же (см. (20)). Поэтому существует единственный предельный для η_t^{ε} при $\varepsilon \to 0$ процесс, который имеет непрерывные траектории. Обозначим его через $\hat{\eta}(t)$. Из определения процесса η_t^{ε} в (20), а также уравнений (18) и (19) находим представление для η_t^{ε}:

$$\eta_t^{\varepsilon} = \int_0^t [c(U_c^{\varepsilon}(s), x(s/\varepsilon)) - c(\hat{U}_c(s), x(s/\varepsilon))]\,ds/\sqrt{\varepsilon} + \int_0^t [c(\hat{U}_c(s), x(s/\varepsilon)) -$$
$$- \hat{c}(\hat{U}_c(s))]\,ds/\sqrt{\varepsilon}. \tag{23}$$

Используем формулу Тейлора для функции $c(U_c^{\varepsilon}(s), x)$ в окрестности $\hat{U}_c(t)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$c(U_c^{\varepsilon}(t), x(t(\varepsilon)) - c(\hat{U}_c(t), x(t/\varepsilon) = c_u'(\hat{U}_c(t), x(t/\varepsilon))\,\eta_t^{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} +$$
$$+ 2^{-1}\varepsilon c_u''(\hat{U}_c(t) + \delta\sqrt{\varepsilon}\,\eta_t^{\varepsilon}, x(t/\varepsilon))(\eta_t^{\varepsilon})^2, \tag{24}$$

где $0 < \delta < 1$. Второе слагаемое в (24) с учетом условия С сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Так что второе слагаемое в (23) сходится при $\varepsilon \to 0$ к интегралу

$$\int_0^t \int_X c'_u(\hat{U}_c(s), x)\, \pi(dx)\, \hat{\eta}(s)\, ds := \int_0^t a(\hat{U}_c(s))\, \hat{\eta}(s)\, ds. \tag{25}$$

Результаты, приведенные в п. 1, показывают, что для второго слагаемого в (23) имеет место сходимость при $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^t [c(U_c^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon)) - c(\hat{U}_c(s), x(s/\varepsilon))]\, ds/\sqrt{\varepsilon} \to \int_0^t \sigma(\hat{U}_c(s))\, dw(s), \tag{26}$$

где $\sigma^2(u)$ определено в (22).

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (23), с учетом (23)—(26) получаем уравнение (21).

Замечания. 3. Двойное приближение состоит в следующем представлении процесса переноса $U_c^\varepsilon(t)$ при малых ε:

$$U_c^\varepsilon(t) \sim \hat{U}_c(t) + \sqrt{\varepsilon}\, \hat{\eta}(t),$$

где $U_c^\varepsilon(t)$, $\hat{U}_c(t)$ и $\hat{\eta}(t)$ определены соответственно в (18), (19) и (21).

4. Из теоремы 3 можно получить двойное приближение для аддитивного функционала $\alpha^\varepsilon(t)$ от ПМП $x(t/\varepsilon)$ в схеме усреднения. Положим

$$\mathfrak{A}^\varepsilon(t) := [\alpha^\varepsilon(t) - \hat{a}t]/\sqrt{\varepsilon},$$

где

$$\alpha^\varepsilon(t) := \int_0^t a(x(s/\varepsilon))\, ds, \quad \hat{a} := \int_X \pi(dx) a(x).$$

Замечая, что $U_c^\varepsilon(t) = \alpha^\varepsilon(t)$, в случае $c(u, x) = a(x)$ находим, что процесс $\mathfrak{A}^\varepsilon(t)$ сходится слабо при $\varepsilon \to 0$ к процессу $\hat{\mathfrak{A}}(t) : \hat{\mathfrak{A}}(t) = \sigma w(t)$, где

$$\sigma^2 := 2 \int_X \rho(dx)\, [m_1(x)(Pa(x) - \hat{a})(R_0)\, m_1(x)(Pa(x) - \hat{a}) +$$

$$+ 2^{-1} m_2(x)(Pa(x) - \hat{a})^2]/m.$$

Это вытекает из того, что в случае $c(u, x) = a(x)$ в уравнении (21) $c'_u(u, x) = (a(x))'_u = 0$, а $\sigma(u)$ не зависит от u. Следовательно, двойное приближение для $\alpha^\varepsilon(t)$ имеет следующий вид при малых ε:

$$\alpha^\varepsilon(t) \sim \hat{a}t + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma w(t).$$

5. Из теоремы 3 также можно получить двойные приближения для процессов на группах Ли и ветвящихся процессов [7]. Например, в случае ветвящихся процессов, полагая

$$B_t^\varepsilon := [F^\varepsilon(t) - \hat{\Phi}(t)]/\sqrt{\varepsilon},$$

получаем из теоремы 3 $(c(u, x) = b(u, x))$, что B_t^ε слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к процессу $\hat{B}(t)$:

$$\hat{B}(t) = \int_0^t b(\hat{\Phi}(s))\, \hat{B}(s)\, ds + \int_0^t \sigma(\hat{\Phi}(s))\, dw(s),$$

где

$$b(u) := \int_X b'_u(u, x)\, \pi(dx),$$

$$\sigma^2(u) := 2\int_X \rho(dx)\,[m_1(x)(Pb(u,x)-\hat b(u))(R_0)\,m_1(x)(Pb(ux)-\hat b(u)) +$$

$$+ 2^{-1}m_2(x)(Pb(u,x)-\hat b(u))^2]/m.$$

4. Двойное приближение импульсного процесса переноса. Для стохастического импульсного процесса переноса $U_j^\varepsilon(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$U_j^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(x_{k-1}) + \int_0^t c(U_j^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))\,ds, \tag{27}$$

усредненный импульсный процесс $\hat U_j(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$d\hat U_j(t)/dt = \hat c(\hat U_j(t)) + \hat a, \hat U_j(0) = u_0, \tag{28}$$

где

$$\hat c(u) := \int_X \pi(dx)\,c(u,x),$$

$$\hat a := \int_X \rho(dx)\,a(x)/m.$$

Детерминированная функция $\hat U_j(t)$ аппроксимирует процесс $U_j^\varepsilon(t)$ и является его первым приближением. Рассмотрим двойное приближение в схеме усреднения для $U_j^\varepsilon(t)$ и $\hat U_j(t)$, определенных в (27) и (28) соответственно.

Положим по определению

$$\zeta_t^\varepsilon := [U_j^\varepsilon(t) - \hat U_j(t)]/\sqrt{\varepsilon}. \tag{29}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия п. 3 и условие А теоремы из* [4].

Тогда процесс ζ_t^ε в (29) *слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ к процессу $\hat\zeta(t)$, удовлетворяющему стохастическому уравнению Ито*

$$\hat\zeta(t) = \int_0^t a(\hat U_j(s))\,\hat\zeta(s)\,ds + \int_0^t [\sigma(\hat U_j(s)) + \sigma]\,dw(s), \tag{30}$$

где $a(u)$ и $\sigma(u)$ определены в (22), *а*

$$\sigma^2 := 2\int_X \rho(dx)\,[(Pa(x)-\hat a)(R_0)\,(Pa(x)-\hat a) + 2^{-1}\times(Pa(x)-\hat a)^2]/m. \tag{31}$$

Доказательство. Семейство процессов $U_j^\varepsilon(t)$ является относительно компактным [4], поэтому и ζ_t^ε — относительно компактное семейство (см. 29)). Значит, существует единственный предельный для ζ_t^ε при $\varepsilon\to 0$ процесс, имеющий непрерывные траектории. Обозначим его через $\hat\zeta(t)$. Из определения процесса ζ_t^ε в (29), а также из уравнений (27) и (28) находим представление для ζ_t^ε:

$$\zeta_t^\varepsilon = \int_0^t [c(U_j^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon)) - c(\hat U_j(s), x(s/\varepsilon))]\,ds/\sqrt{\varepsilon} + \int_0^t [c(\hat U_j(s), X(s/\varepsilon)) -$$

$$- \hat c(\hat U_j(s))]\,ds/\sqrt{\varepsilon} + \Big[\varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(x_{k-1}) - \hat a t\Big]/\sqrt{\varepsilon}. \tag{32}$$

Заметим, что первые два слагаемых в (32) аналогичны двум слагаемым в

(23). Это позволяет заключить, что первое и второе слагаемые в (32) сходятся при $\varepsilon \to 0$ к интегралам в (25) и (26) соответственно, где вместо процессов $\hat{\eta}(t)$ и $\hat{U}_c(t)$ следует взять $\hat{\zeta}(t)$ и $\hat{U}_j(t)$.

В силу теоремы усреднения для импульсного процесса переноса в случае $c(u, x) \equiv 0$ $\forall u \in R$ получаем

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(x_{k-1}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \hat{a}t \quad \forall t \in R_t.$$

Принимая во внимание диффузионную аппроксимацию для $U_j^\varepsilon(t)$ в случае $c(u, x) \equiv 0$ и выполнение условия баланса для функции $m^{-1}Pa(x) - \hat{a}$ ($\int_X \rho(dx)[m^{-1}Pa(x) - \hat{a}]/m = 0$) находим, что процесс

$$\left[\varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(x_{k-1}) - \hat{a}t\right]/\sqrt{\varepsilon}$$

слабо сходится к $\sigma w(t)$, где σ^2 определено в (31), $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (32) и принимая во внимание все рассуждения, приведенные выше, получаем уравнение (30) и доказательство теоремы 4.

Замечания. 6. Двойное приолижение для импульсного процесса переноса $U_j^\varepsilon(t)$ состоит здесь в том, что из теоремы 4 следует представление при малых ε для $U_j^\varepsilon(t)$ в виде суммы двух процессов:

$$U_j^\varepsilon(t) \sim \hat{U}_j(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\hat{\zeta}(t),$$

где $U_j^\varepsilon(t)$, $\hat{U}_j(t)$ и $\hat{\zeta}(t)$ определены соответственно в (27), (28) и (30).

7. Используя результаты данного пункта, можно получить двойное приближение для переключаемых процессов с независимыми приращениями, а также для $\mathcal{U}$-статистических процессов [7].

Например, если для $\mathcal{U}$-статистических процессов положить

$$\Omega_t^\varepsilon := [U_2^\varepsilon(t) - \hat{\Phi}t]/\sqrt{\varepsilon},$$

то из теоремы 4 в случае

$$c(u, x) \equiv 0, \quad a(x) = \int_X P(x, dy)\,\Phi(x, y),$$

следует, что ω_t^ε слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к процессу $\hat{\omega}(t)$:

$$\hat{\omega}(t) := \sigma w(t),$$

где

$$\sigma^2 := 2\int_X \rho(dx)\,[(P\Phi(x, y) - \hat{\Phi})(R_0)(P\Phi(x, y) - \hat{\Phi}) +$$

$$+ 2^{-1}(P\Phi(x, y) - \hat{\Phi})^2]/m,$$

$$\hat{\Phi} := \int_X \rho(dx) \int_X P(\ , dy)\,\Phi(x, y)/m.$$

Поэтому при малых ε $\mathcal{U}$-статистический процесс $U_2^\varepsilon(t)$ имеет двойное приближение в виде

$$U_2^\varepsilon(t) \sim \hat{\Phi}t + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma w(t).$$

1. *Koroljuk V. S., Swishchuk A. V.* Semi-Markov Random Evalutions.— Phase Agregation and Applications // Proc. ... Int. Summer School Probab. and Statist.— Sofia. Bulgar. Acad. Sci., 1988.— P. 156—171.

2. *Свищук А. В.* Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения (мартингальный подход) // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 12.— С. 1680—1686.
3. *Koroljuk V. S., Swishchuk A. V.* Weak convergence of Semi-Markov random evolutions (martingale approach) // Theory Probab. Math. Statist.— Mosklas: Acad. press, VSP, 1990.— P. 1—9.
4. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 330—334.
5. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Предельное представление полумарковских случайных эволюций в схеме серий // Там же.— 1989.— **41**, № 11. —С. 1476—1482.
6. *Свищук А. В.* Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1985.— — 116 с.
7. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Прикладные задачи теории случайных эволюций.— Киев: Знание, 1990.— 32 с.

Получено 23.01.91