УДК 517.53

С. І. Тарасюк, асп. (Львів. ун-т)

Інтегральні середні δ-субгармонічних функцій і класи цілком регулярного зростання

Исследуются классы Λ_δ δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций конечного λ-типа. Установлен критерий принадлежности функции классу Λ_δ в терминах ее интегральных q-средних. Вводятся классы вполне регулярного роста δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций, изучаются их поведение на бесконечности и распределение мер, ассоциированных по Рису.

Досліджуються класи Λ_δ δ-субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ функцій скінченного λ-типу. Встановлено критерій належності функції до класу Λ_δ в термінах її інтегральних q-середніх. Вводяться класи цілком регулярного зростання δ-субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ функцій, вивчаються їх поведінка на нескінченності і розподіл мір, асоційованих за Рісом.

1. Інтегральні середні δ-субгармонічних функцій скінченного λ-типу. Нехай $u(y)$ — субгармонічна в $\mathbb{R}^m$ функція, $m \geqslant 3$. Позначимо $u^+(y) = \max(u(y), 0)$. Характеристикою Неванлінни функції u називається функція

$$T(r, u) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} u^+(rx)\, dS(x),$$

де S^{m-1} — одинична сфера в $\mathbb{R}^m$, ω_{m-1} — площа її поверхні. Інтегральним q-середнім функції u називається

$$m_q(r, u) = \left\{ \frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |u(rx)|^q dS(x) \right\}^{1/q}.$$

Нехай $\lambda(r)$ — неперервна, неспадна, додатна на $(0, \infty)$ функція, яка називається функцією росту.

Означення 1 [1]. *Нехай λ — функція росту. Субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, гармонічна в деякому околі початку координат функція u, $u(0) = 0$, називається функцією скінченного λ-типу, якщо існують сталі a і b такі, що нерівність $B(r, u) \leqslant a\lambda(br)$ виконується для всіх $r > 0$, де $B(r, u) = \max\{u(y) : |y| \leqslant r\}$. Клас таких функцій позначимо Λ_S.*

Зауважимо, що $u \in \Lambda_S$ тоді і лише тоді [1], коли

$$T(r, u) \leqslant a\lambda(br) \tag{1}$$

при деяких a, b і всіх $r > 0$.

Теорема 1. *Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, гармонічна в деякому* *околі точки* $y=0$ *функція*, $1 < q < 1 + \dfrac{1}{m-2}$. *Для того щоб* $u \in \Lambda_S$, *необхідно і досить, щоб існували додатні сталі* A *і* B *такі, що*

$$m_q(r, u) \leqslant A\lambda(Br) \tag{2}$$

для всіх $r > 0$.

Доведення. Якщо при деякому q для всіх $r > 0$ виконуеться нерівність (2), то, використовуючи монотонність q-середніх по q, одержуємо $T(r, u) \leqslant m_1(r, u) \leqslant m_q(r, u) \leqslant A\lambda(Br)$, $r > 0$. Отже, $u \in \Lambda_S$.

Нехай тепер $u \in \Lambda_S$. За формулою Пуассона — Йенсена [2, с. 140]

$$u(y) = \int_{|\xi|=R} P_R(y, \xi)\, u(\xi)\, d\sigma(\xi) - \int_{|\xi|\leqslant R} G_R(y, \xi)\, d\mu(\xi), \quad |y| \leqslant R, \tag{3}$$

де

$$P_R(y, \xi) = \frac{R^2 - |y|^2}{\omega_{m-1} R\, |y-\xi|^m}$$

— ядро Пуассона,

$$G_R(y, \xi) = \frac{1}{|y-\xi|^{m-2}} - \left\{\frac{R}{|\xi|\left|y - \dfrac{\xi R^2}{|\xi|^2}\right|}\right\}^{m-2}, \quad \xi \neq 0,$$

— функція Гріна кулі радіуса R, μ — міра Ріса функції u.

Використовуючи (3) і нерівність Мінковського, одержуємо

$$m_q(r, u) \leqslant \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} \left| \int_{|\xi|=R} P_R(rx, \xi)\, u(\xi)\, d\sigma(\xi)\right|^q dS(x)\right\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} \left| \int_{|\xi|\leqslant R} G_R(rx, \xi)\, d\mu(\xi)\right|^q dS(x)\right\}^{1/q}.$$

Позначимо перший і другий доданки правого боку останньої нерівності I_1 та I_2 відповідно. Маємо

$$I_1 \leqslant \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} \left[\frac{R+r}{\omega_{m-1} R\,(R-r)^{m-1}} \int_{|\xi|=R} |u(\xi)|\, d\sigma(\xi)\right]^q dS(x)\right\}^{1/q}. \tag{4}$$

З умови $u(0) = 0$, враховуючи вигляд $T(R, u)$, одержуємо

$$\frac{1}{\omega_{m-1} R^{m-1}} \int_{|\xi|=R} |u(\xi)|\, d\sigma(\xi) \leqslant 2T(R, u). \tag{5}$$

Покладемо в (4) $R = 2r$ і використаємо нерівність (5). Тоді

$$I_1 \leqslant 3\cdot 2^{m-1} \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} [T(2r, u)]^q\, dS(x)\right\}^{1/q} = 3\cdot 2^{m-1} T(2r, u).$$

Таким чином,

$$I_1 \leqslant a_1 T(b_1 u), \tag{6}$$

де $a_1 = 3\cdot 2^{m-1}$, $b_1 = 2$.

Позначимо $\mu(D_R^m) = n(R, \mu)$, де D_R^m — куля радіуса R в $\mathbb{R}^m$. За нерівністю Йенсена [2, с. 58]

$$\left| \int_{|\xi|\leqslant R} G_R(rx, \xi)\, d\mu(\xi)\right|^q \leqslant n^q(R, \mu) \left\{\frac{1}{n(R, \mu)} \int_{|\xi|\leqslant R} G_R(rx, \xi)\, d\mu(\xi)\right\}^q \leqslant$$

$$\leqslant n^{q-1}(R, \mu) \int_{|\xi|\leqslant R} |G_R(rx, \xi)|^q\, d\mu(\xi).$$

Змінивши порядок інтегрування за теоремою Фубіні, будемо мати

$$I_2 \leqslant \left\{ \frac{1}{\omega_{m-1}} n^{q-1}(R, \mu) \int\limits_{|\xi| \leqslant R} \left[\int\limits_{S^{m-1}} |G_R(rx, \xi)|^q dS(x) \right] d\mu(\xi) \right\}^{1/q}. \quad (7)$$

За нерівністю Мінковського

$$\int\limits_{S^{m-1}} |G_R(rx, \xi)|^q dS(x) \leqslant \left[\left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \frac{1}{|rx - \xi|^{q(m-2)}} dS(x) \right\}^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \left(\frac{R}{|\xi| \left| rx - \frac{\xi R^2}{|\xi|^2} \right|} \right)^{q(m-2)} dS(x) \right\}^{1/q} \right]^q. \quad (8)$$

Зафіксуємо ξ, $\xi \in D_R^m$, і виконаємо поворот τ такий, що $\xi \xrightarrow{\tau} (|\xi|, 0, \ldots, 0)$. Зазначимо, що значення першого інтегралу з правого боку останньої нерівності не зміниться з огляду на те, що якобіан перетворення τ дорівнює 1. Введемо змінну $\eta = \tau\xi/r$. Тоді

$$\left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \frac{1}{|rx - \xi|^{q(m-2)}} dS(x) \right\}^{1/q} = \frac{1}{r^{m-2}} \left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \frac{1}{|x - \eta|^{q(m-2)}} dS(x) \right\}^{1/q}. \quad (9)$$

Нехай θ визначається з умови $(x, e) = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, де $e = (1, 0, \ldots, 0)$, (x, e) — скалярний добуток. Тоді для $x \in S^{m-1}$

$$|x - \eta|^2 = (x - \eta, x - \eta) = |x|^2 - 2(x, \eta) + |\eta|^2 =$$
$$= 1 - 2|\eta| \cos\theta + |\eta|^2 \geqslant \sin^2\theta.$$

Отже,

$$\int\limits_{S^{m-1}} \frac{1}{|x - \eta|^{q(m-2)}} dS(x) \leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{(\sin\theta)^{m-2}}{(\sin\theta)^{q(m-2)}} d\theta. \quad (10)$$

Інтеграл з правого боку нерівності (10) збігається, якщо $m - 2 - q(m - 2) > -1$, тобто $q < 1 + 1/(m-2)$. Позначимо $1/q$-ту степінь цього інтегралу C_1. Тоді для вказаних q з (9) і (10) випливає

$$\left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \frac{1}{|rx - \xi|^{q(m-2)}} dS(x) \right\}^{1/q} \leqslant \frac{C_1}{r^{m-2}}. \quad (11)$$

Покладаючи $R = 2r$, при $0 \leqslant |\xi| \leqslant 2r$, $x \in S^{m-1}$ маємо

$$\frac{R}{|\xi| \left| rx - \frac{\xi R^2}{|\xi|^2} \right|} = \frac{2r}{r \left| x|\xi| - 4\frac{\xi r}{|\xi|} \right|} \leqslant \frac{2}{||\xi| - 4r|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Позначаючи $\omega_{m-1}^{1/q} = C_2$, одержуємо

$$\left\{ \int\limits_{S^{m-1}} \left(\frac{R}{|\xi| \left| rx - \frac{\xi R^2}{|\xi|^2} \right|} \right)^{q(m-2)} dS(x) \right\}^{1/q} \leqslant \frac{C_2}{r^{m-2}}. \quad (12)$$

Враховуючи (11), (12) і покладаючи $C_1 + C_2 = C_3$, із (7) та (8) маємо

$$I_2 \leqslant \left\{ \frac{1}{\omega_{m-1}} n^{q-1}(R, \mu) \left(\frac{C_3}{r^{m-2}} \right)^q \int\limits_{|\xi| \leqslant R} d\mu(\xi) \right\}^{1/q} = C_4 \frac{n(R, \mu)}{r^{m-2}}. \quad (13)$$

Оскільки за умовою теореми $u(0) = 0$, то з першої фундаментальної теореми Неванлінни для субгармонічних функцій [2, с. 146] маємо

$$T(r, u) \geqslant N(r, \mu), \text{ де } N(r, \mu) = (m-2) \int_0^r \frac{n(t, \mu)}{t^{m-1}} dt.$$

Оскільки

$$N(2R, \mu) \geqslant (m-2)\, n(R, \mu) \int_R^{2R} \frac{dt}{t^{m-1}} \geqslant \frac{n(R, \mu)}{2R^{m-2}},$$

то

$$\frac{n(2r)}{r^{m-2}} \leqslant 2^{m-1} T(4r, \mu).$$

Отже, з (13) отримуємо

$$I_2 \leqslant a_2 T(b_2 r), \tag{14}$$

де $a_2 = 2^{m-1} C_4$, $b_2 = 4$. Позначимо $a = a_1 + a_2$, $b = \max(b_1, b_2)$. Тоді з (6) і (14) витікає $m_q(r, u) \leqslant aT(br)$. Звідси і з (1) випливає (2). Теорема 1 доведена.

Означення 2 [3]. *Нехай u, v — субгармонічні в $\mathbb{R}^m$ функції. Функція $w = u - v$, де різниця визначена в сенсі $\overline{\mathbb{R}}$, називається δ-субгармонічною в $\mathbb{R}^m$ функцією. Якщо $w = u_1 - v_1$ майже скрізь, то $w = u_1 - v_1$ називається зображенням функції w.*

Насправді різниця $u - v$ визначена поза деякою полярною множиною [2, с. 230], яка має ємність нуль, і з рівності $u - v = u_1 - v_1$ майже скрізь випливає [3] справедливість цієї рівності поза деякою множиною ємності нуль. За теоремою Ріса [2, с. 112] $\Delta\omega = \Delta u - \Delta v$, де Δ — оператор Лапласа в сенсі узагальнених функцій, буде мірою довільного знаку. Міра

$$\mu_w = \frac{1}{(m-2)\,\omega_{m-1}} \Delta w$$

називається мірою, асоційованою за Рісом з функцією w.

Якщо $\mu_w = \mu_w^+ - \mu_w^-$ — розклад Жордана міри μ_w і $\Delta u = (m-2)\,\omega_{m-1}\mu_w^+$, $\Delta v = (m-2)\,\omega_{m-1}\mu_w^-$, то зображення $w = u - v$ називається канонічним. Якщо $w(0) = 0$, то існує [1] канонічне зображення таке, що $u(0) = v(0) = 0$. Характеристикою Неванлінни функції w (див., наприклад, [1]) називається функція

$$T(r, w) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} w^+(ry)\, dS(y) + N(r, \mu_w^-). \tag{15}$$

Означення 3 [1]. *Нехай λ — функція росту; δ-субгармонічна в $\mathbb{R}^m$ функція w, $w(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_w$, називається функцією скінченного λ-типу, якщо існують сталі a, b такі, що $T(r, w) \leqslant a\lambda(br)$ для всіх $r > 0$. Клас таких функцій позначимо Λ_δ.*

Теорема 1′. *Нехай w — δ-субгармонічна в $\mathbb{R}^m$ функція, $w(0) = 0$, $1 < q < 1 + 1/(m-2)$. Для того щоб $w \in \Lambda_\delta$, необхідно і досить, щоб існували додатні сталі A та B такі, що нерівності*

$$m_q(r, w) \leqslant A\lambda(Br) \tag{16}$$

і

$$N(r, \mu_w^-) \leqslant A\lambda(Br) \tag{17}$$

виконуються для всіх $r > 0$.

Доведення. Нехай $w \in \Lambda_\delta$. Із співвідношення $N(r, \mu_w^-) \leqslant T(r, w)$ і означення класу Λ_δ випливає (17). Згідно з аналогом теореми Майлза для δ-субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ функцій [4] існують такі $u, v \in \Lambda_S$, що $w =$

$= u - v$ і $u(0) = v(0) = 0$. Тоді з нерівності Мінковського

$$m_q(r, w) = \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |w(rx)|^q dS(x)\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |u(rx) - v(rx)|^q dS(x)\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |u(rx)|^q dS(x)\right\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{\frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |v(rx)|^q dS(x)\right\}^{1/q} = m_q(r, u) + m_q(r, v).$$

Застосовуючи теорему 1, одержуємо $m_q(r, w) \leqslant a\lambda(br)$, де a, b — деякі сталі.

Навпаки, нехай виконуються (16), (17) для всіх $r > 0$. Враховуючи нерівність $T(r, w) \leqslant m_1(r, w) + N(r, \mu_w^-)$, одержуємо $w \in \Lambda_\delta$.

2. **Класи δ-субгармонічних функцій цілком регулярного зростання.** Нагадаємо, що сферичною гармонікою, або сферичною функцією Лапласа степеня k, $k \in \mathbb{Z}_+$, називається звуження на одиничну сферу S^{m-1} в $\mathbb{R}^m$ однорідного гармонічного полінома степеня k. Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати як підпростір простору Лебега $L_2(S^{m-1})$ дійснозначних функцій з скалярним добутком

$$(f, g) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} f(x)\, g(x)\, dS(x).$$

Якщо $\{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ — ортонормована база в цьому підпросторі, то множина функцій

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$$

буде ортонормованою базою в просторі $L_2(S^{m-1})$. Рядом Фур'є—Лапласа функції $f \in L_1(S^{m-1})$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x; f),$$

де

$$Y^{(k)}(x, f) = b_1^{(k)} Y_1^{(k)}(x) + \ldots + b_{a_k}^{(k)} Y_{a_k}^{(k)}(x),$$

$$b_j^{(k)} = (f, Y_j^{(k)}), \; j = 1, \ldots, a_k.$$

Сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x; f)$ можуть бути виражені [1] співвідношеннями

$$Y^{(k)}(x; f) = \frac{k + \nu}{\omega_{m-1}\nu} \int\limits_{S^{m-1}} p_k^\nu[(x, y)]\, f(y)\, dS(y),$$

де $\nu = (m-2)/2$, а p_k^ν — поліноми Гегенбауера, які визначаються з розкладу

$$(1 - 2t\tau + \tau^2)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^\nu(t)\, \tau^k.$$

Сферичні гармоніки, асоційовані з δ-субгармонічною функцією w, позначимо $c_k(x, r; w) = Y^{(k)}(x; w_r)$, $r > 0$, $x \in S^{m-1}$, де $w_r(x) = w(rx)$.

Нехай функція росту λ задовольняє умові $\lambda(r) \to \infty$ при $r \to \infty$,

$$\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r) \tag{18}$$

при деякому M для всіх $r > 0$.

Означення 4. *Функція $w \in \Lambda_\delta$ називається функцією цілком ре-*

гулярного росту, якщо для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ і всіх $x \in S^{m-1}$ існує границя

$$\lim_{r \to \infty} \frac{c_k(x, r; w)}{\lambda(r)} \stackrel{\text{def}}{=} c_k(x). \tag{19}$$

Клас таких функцій позначимо Λ_δ^0.

Сферичною θ-шапочкою $C(\theta, x_0)$ з центром в точці x_0 називатимемо множину точок, яка задається співвідношенням

$$C(\theta, x_0) = \{x \in S^{m-1} : (x, x_0) \geqslant \cos\theta\}.$$

Теорема 2. *Нехай* w — *δ-субгармонічна в* $\mathbb{R}^m$ *функція,* $w(0) = 0$. *Наступні твердження еквівалентні*:

1) $w \in \Lambda_\delta^0$;

2) $w \in \Lambda_\delta$ *і для будь-яких* $\theta \in [0; \pi]$ *і* $x_0 \in S^{m-1}$ *існує границя*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\lambda(r)} \int_{C(\theta, x_0)} w(rx)\, dS(x);$$

3) $N(r, \mu_w^-) = O(\lambda(r))$, $r \to \infty$, *і для довільної функції* $\psi \in X$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\lambda(r)} \int_{S^{m-1}} \psi(x)\, w(rx)\, dS(x),$$

де X — *будь-який з підпросторів* $C(S^{m-1})$, $L_p(S^{m-1})$ *при* $m - 1 < p \leqslant \infty$.

Доведення близьке за схемою до доведення теореми 7.1 з [5, с. 76]. Розглянемо на X сім'ю $\{F_r\}$ лінійних неперервних функціоналів

$$F_r[\psi] = \frac{1}{\omega_{m-1}\lambda(r)} \int_{S^{m-1}} \psi(x)\, w(rx)\, dx.$$

Норми $\| F_r \|$ цих функціоналів дорівнюють

$$\| F_r \| = \frac{m_q(r, w)}{\lambda(r)},$$

де $q = 1$, якщо X — це $C(S^{m-1})$ або $L_\infty(S^{m-1})$, і $q = p/(p-1)$ при $X = L_p(S^{m-1})$, $m - 1 < p < \infty$.

Якщо $w \in \Lambda_\delta$, то за теоремою 1′ та умовою (18) маємо $m_q(r, w) \leqslant A\lambda(r)$, $r > 0$. Таким чином, при $w \in \Lambda_\delta$ норми функціоналів сім'ї $\{F_r\}$ рівномірно обмежені по r. Окрім того, лінійна оболонка системи сферичних гармонік щільна в $L_p(S^{m-1})$ [6, с. 160]. Тоді за теоремою Банаха — Штейнгауса справедлива імплікація 1) ⇒ 3) при $X = L_p(S^{m-1})$, $m - 1 < p < \infty$. При X, рівному $C(S^{m-1})$, чи $L_\infty(S^{m-1})$, ця ж імплікація справедлива на підставі щільності підпростору X в $L_p(S^{m-1})$. Враховуючи, що лінійна оболонка системи характеристичних функцій сферичних шапочок також щільна в $L_p(S^{m-1})$, $m - 1 < p < \infty$, аналогічно встановлюємо істинність імплікації 2) ⇒ 3).

Установимо тепер справедливість імплікацій 3) ⇒ 1) і 3) ⇒ 2). З умови 3 випливає рівномірна обмеженість $\| F_r \|$ по r. Отже, $m_q(r, w) \leqslant B\lambda(r)$ при всіх $r > 0$. Враховуючи співвідношення $N(r, \mu_w^-) = O(\lambda(r))$, $r \to \infty$, і теорему 1′, маємо $w \in \Lambda_\delta$. Покладаючи в 3) $\psi = Y^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, одержимо 1). А оскільки множина характеристичних функцій сферичних шапочок належить до $L_p(S^{m-1})$, $m - 1 < p \leqslant \infty$, то справедлива імплікація 3) ⇒ 2). Теорема 2 доведена.

Означення 5 [1]. *Функція* $H \in D'(S^{m-1})$ *називається узагальненою субсферичною функцією порядку* ρ, *якщо* $\mathcal{L}_\rho H \geqslant 0$, $\mathcal{L}_\rho$ *визначається як* $\mathcal{L}_\rho = \Delta_S + \rho(\rho + m - 2)$, $\rho > 0$, Δ_s — *сферична частина оператора Лапласа на* S^{m-1}, *а* $D'(S^{m-1})$ — *простір узагальнених функцій на сфері* S^{m-1}.

Означення 6 [1]. *Півнеперервна зверху функція $h \in L_1(S^{m-1})$, названа узагальненою субсферичною функцією порядку ρ, називається субсферичною функцією порядку ρ. Субсферичними функціями порядку 0 називаються невід'ємні сталі.*

Означення 7 [1]. *Нехай $0 \leqslant \varkappa \leqslant \rho < \infty$. Функція h називається $[\varkappa, \rho]$-субсферичною, якщо вона є субсферичною функцією порядку ω при кожному ω, $\varkappa \leqslant \omega \leqslant \rho$.*

Як і в [1], позначимо

$$\lambda_m(r) = \int_0^r \frac{dt}{t^{m-1}} \int_0^t \lambda(\tau)\,\tau^{m-3} d\tau,$$

$$\rho(\rho + m - 2) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\lambda_m(r)}, \quad \varkappa(\varkappa + m - 2) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\lambda_m(r)}. \tag{20}$$

З умови (18) випливає [1], що $\rho < \infty$. Нехай

$$n_k(x;\, r,\, \mu_w) = 2(k+\nu) \int_{\overline{D}_r^m} p_k^\nu\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] d\mu_w(y), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$N_k(x; r,\, \mu_w) = \int_0^r \frac{n_k(x;\, t,\, \mu_w)}{t^{m-1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in S^{m-1}.$$

Означення 8. *Індикатором функції $w \in \Lambda_S^0$ називатимемо функцію*

$$h(x, w) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x), \quad x \in S^{m-1},$$

де $c_k(x)$ визначені співвідношеннями (19).

Теорема 3. *Якщо $w \in \Lambda_\delta^0$, то її індикатор $h(x, w)$ є різницею $[\varkappa, \rho]$-субсферичних функцій, де $\varkappa$, ρ задані співвідношеннями* (20).

Доведення. Оскільки $w \in \Lambda_\delta^0$, то $c_k(x, r; w) = c_k(x)\,\lambda(r) + o(\lambda(r))$, $r \to \infty$, а тоді

$$N_k(x;\, r,\, \mu_w) = c_k(x)\left[1 - k(k+m-2)\frac{\lambda_m(r)}{\lambda(r)}\right] + o\left(\frac{\lambda_m(r)}{\lambda(r)}\right), \quad r \to \infty. \tag{21}$$

Якщо відношення $\lambda_m(r)/\lambda(r)$ необмежене, тобто $\varkappa = 0$, то, внаслідок обмеженості лівого боку рівності (21), вона можлива лише при $c_k(x) \equiv 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Отже, $h(x, w) = c_0(x) = \text{const} \geqslant 0$. Нехай згадане відношення обмежене, а $\{r_j\}$ — послідовність, $r_j \to \infty$, для якої

$$\lim_{r_j\to\infty} \frac{\lambda_m(r_j)}{\lambda(r_j)} = \frac{1}{\omega(\omega + m - 2)}, \quad \omega \neq 0.$$

Зазначимо, що $\varkappa \leqslant \omega \leqslant \rho$. Тоді

$$N_k(x; w) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{r_j\to\infty} \frac{N_k(x;\, r_j,\, \mu_w)}{\lambda(r_j)} = c_k(x)\left[1 - \frac{k(k+m-2)}{\omega(\omega+m-2)}\right], \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{22}$$

З іншого боку,

$$\frac{N_k(x;\, r_j,\, \mu_w)}{\lambda(r_j)} = \frac{N_k(x;\, r_j,\, \mu_w^+)}{\lambda(r_j)} - \frac{N_k(x;\, r_j,\, \mu_w^-)}{\lambda(r_j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Справедлива оцінка [1]

$$|N_k(x;\, r,\, \mu_w^-)| \leqslant B_k N(r,\, \mu_w^-),$$

де $B_k = 2(k+\nu)\, p_k^\nu(1)$, яка разом із означенням класу Λ_δ^0 та рівністю (15) показує, що для $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ відношення $N_k(x;\, r,\, \mu_w^-)/\lambda(r)$ обмежене.

Тому при $k=1$ з послідовності $\{r_j\}$ можна вибрати підпослідовність $\{r_j^{(1)}\}$, для якої існуватиме

$$\lim_{r_j^{(1)}\to\infty}\frac{N_1(x;\,r_j^{(1)},\,\mu_w^-)}{\lambda(r_j^{(1)})}.$$

Далі, з послідовності $\{r_j^{(1)}\}$ виберемо підпослідовність $\{r_j^{(2)}\}$, для якої існує

$$\lim_{r_j^{(2)}\to\infty}\frac{N_2(x;\,r_j^{(2)},\,\mu_w^-)}{\lambda(r_j^{(2)})}.$$

Продовжимо цей процес до нескінченності і візьмемо діагональну послідовність $\{r_j^{(j)}\}$. Таким чином, при кожному $k\in\mathbb{Z}_+$ існуватиме

$$\lim_{r_j^{(j)}\to\infty}\frac{N_k(x;\,r_j^{(j)},\,\mu_w^-)}{\lambda(r_j^{(j)})}\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}N_k^{(2)}(x;\,w),\tag{24}$$

а також, оскільки границя з лівого боку рівності (23) існує при кожному $k\in\mathbb{Z}_+$, то існуватиме і

$$\lim_{r_j^{(j)}\to\infty}\frac{N_k(x;\,r_j^{(j)},\,\mu_w^+)}{\lambda(r_j^{(j)})}\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}N_k^{(1)}(x;\,w).\tag{25}$$

Із (24) і (25) випливає, що розподіли мас μ_w^+ і μ_w^- мають, на підставі аналога теореми Каратеодорі — Леві [7], кутові щільності відповідно σ^+ і σ^- на послідовності $\{r_j^{(j)}\}$. При нецілому ω з співвідношення (22) випливає

$$c_k(x)=\frac{\omega(\omega+m-2)}{\omega(\omega+m-2)-k(k+m-2)}(N_k^{(1)}(x;\,w)-N_k^{(2)}(x;\,w)),\quad k\in\mathbb{Z}_+,\tag{26}$$

і ми одержуємо

$$h(x,\,w)\sim\omega\,(m-2)\,\omega_{m-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega(\omega+m-2)}{\omega(\omega+m-2)-k(k+m-2)}(Y^{(k)}(x;\,d\sigma^+)-Y^{(k)}(x;\,d\sigma^-)).$$

Якщо ж ω ціле, то при $k=\omega$ рівність (22) має вигляд $N_\omega^{(1)}(x;\,w)-N_\omega^{(2)}(x;\,w)\equiv 0$, а при $k\neq\omega$ виконується (26). Отже,

$$h(x;\,w)\sim\omega\,(m-2)\,\omega_{m-1}\times$$

$$\times\sum_{k\neq\omega}\frac{\omega(\omega+m-2)}{\omega(\omega+m-2)+k(k+m-2)}(Y^{(k)}(x;\,d\sigma^+)-Y^{(k)}(x;\,d\sigma^-))+c_\omega(x).$$

За побудовою індикатора $h(x;\,w)$ маємо $c_\omega(x)=Y^{(\omega)}(x,\,h)$. Оскільки сферична гармоніка степеня ω (див., наприклад, [8, с. 168]) є власною функцією оператора Δ_S, що відповідає власному числу $-\omega(\omega+m-2)$, то $\mathcal{L}_\omega c_\omega(x)\equiv 0$.

Згідно з [1] при нецілому ω маємо

$$h(x,\,w)=\omega(\omega+m-2)\int_{S^{m-1}}H_\omega^{\nu}[(x,\,y)]\,d\sigma^+(y)-\omega(\omega+m-2)\times$$

$$\times\int_{S^{m-1}}H_\omega^{\nu}[(x,\,y)]\,d\sigma^-(y),$$

а при цілому ω —

$$h(x, w) = \omega(\omega + m - 2) \int\limits_{S^{m-1}} H_\omega^\nu[(x, y)]\, d\sigma^+(y) - \omega(\omega + m - 2) \times$$

$$\times \int\limits_{S^{m-1}} H_\omega^\nu[(x, y)]\, d\sigma^-(y) + c_\omega(x),$$

де

$$H_\omega^\nu(\cos\theta) \sim \sum_{k \neq \omega} \frac{2k + m - 2}{\omega(\omega + m - 2) - k(k + m - 2)}\, p_k^\nu(\cos\theta).$$

Отже [1], h є різницею субсферичних функцій порядку ω. Теорема 3 доведена.

Нехай $Y = \{Y^{(k)}(x)\}$ — послідовність сферичних гармонік, $k \in \mathbb{Z}_+$, $Y^{(0)} = 0$, а μ — міра в $\mathbb{R}^m$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$.

Означення 9. *Сферичними гармоніками пари* (Y, μ) *називаються*

$$c_k(x, r; Y, \mu) = r^k Y^{(k)}(x) + r^k \int\limits_{|\xi| \leq r} p_k^\nu\left[\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right)\right] \frac{d\mu(\xi)}{\xi^{k+2\nu}} -$$

$$- \frac{1}{r^{k+2\nu}} \int\limits_{|\xi| \leq r} |\xi|^k p_k^\nu\left[\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right)\right] d\mu(\xi), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Означення 10. *Нехай λ — необмежена функція росту, яка задовольняє умові* (18). *Міра* μ *в* $\mathbb{R}^m$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, *називається правильно розподіленою, якщо знайдеться послідовність сферичних гармонік* $Y = \{Y^{(k)}(x)\}$, $Y^{(0)} = 0$, *така, що границя*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{c_k(x, r; Y, \mu)}{\lambda(r)}$$

існує і скінченна при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$ *для всіх* $x \in S^{m-1}$ *і, крім того, виконується хоча б одне із співвідношень*

$$N(r, \mu^+) = O(\lambda(r)),\ r \to \infty, \quad N(r, \mu^-) = O(\lambda(r)), \quad r \to \infty.$$

Теорема 4. *Якщо* $w \in \Lambda_\delta^0$, *то* μ_w *— правильно розподілена міра. Навпаки, якщо міра* μ *правильно розподілена, то існує функція* $w \in \Lambda_\delta^0$ *така, що* $\mu = \mu_w$.

Оскільки доведення цієї теореми е незначним ускладненням доведень теореми 6 і леми 4 з [1], ми його не наводимо.

1. *Кондратюк А. А.* Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб.— 1984.— 125 № 2.— С. 147—166.
2. *Хейман У. Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Наука, 1980.— 304 с.
3. *Arsove M. G.* Functions representable as differences of subharmonic // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— 75.— P. 327—365.
4. *Веселовская О. В.* Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 6.— С. 694—698.
5. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции.— Львов : Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1988.— 196 с.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ.— М. : Мир, 1974.— 331 с.
7. *Кондратюк А. А.* О методе сферических гармоник для субгармонических функций // Мат. сб.— 1981.— 116, № 2.— С. 147—165.
8. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Получено 25.02.91