УДК 517.43

М. Н. Феллер, д-р физ.-мат. наук (УкрНПДО, Киев)

Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. III

Получены оптимальные (в некотором смысле) условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве, вытекающие из оценок порядка роста сумм независимых случайных величин. Вместе с полученными ранее условиями гармоничности, основанными на оценках порядка роста сумм зависимых случайных величин и на оценках порядка роста сумм ортогональных случайных величин, они дают возможность охватить новые классы гармонических функций бесконечного числа переменных.

Одержані оптимальні (в деякому розумінні) умови гармонічності функцій на гільбертовому просторі, що випливають з оцінок порядку зростання сум незалежних випадкових величин. Разом з одержаними раніше умовами гармонічності, основаними на оцінках порядку зростання сум залежних випадковах величин та на оцінках порядку зростання сум ортогональних випадкових величин, вони дають можливість охопити нові класи гармонічних функцій нескінченного числа змінних.

Вероятностная интерпретация бесконечномерного лапласиана, введенного П. Леви в [1], дана в [2]. Такая трактовка позволила получить в [3] и [4] условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве с помощью оценок порядка роста сумм зависимых случайных величин и оценок порядка роста сумм ортогональных случайных величин.

Известно, однако, что для сумм независимых случайных величин справедливы более сильные оценки порядка роста. В этой статье, являющейся завершающей частью триптиха, получены оптимальные (в некотором смысле) условия гармоничности функций на гильбертовом пространстве, вытекающие из оценок порядка роста сумм независимых случайных величин. При этом, естественно, потребовались условия на функции, отличные от приведенных в [3, 4].

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции (нелинейные функционалы) $F(x)$ на H, $x \in H$.

Если функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству Y пространства H (т. е. оператор $F''(x) \in \{Y \to Y'\}$, Y' — сопряженное к Y пространство), то лапласиан Леви определяется, если он существует, формулой

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (F''(x) f_k, \quad f_k)_H, \tag{1}$$

где $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H, $f_k \in Y$ (см., например, [5]).

2. Пусть $\mathfrak{L}_2(H, \mu)$ — гильбертово пространство функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K — ядерный положительный оператор такой, что $\|x\|_H \leqslant \|\mathrm{K}^{-1/2} x\|_H\ (x \in D_{\mathrm{K}^{-1/2}})$, $\|F\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \int\limits_H F(x)^2 \mu\ (dx)$ ($D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$ — область определения оператора $\mathrm{K}^{-1/2}$).

Пусть $H_\alpha \subset H_0 \subset H_{-\alpha}$, $H_0 \equiv H$, $\alpha > 0$ — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств H_β, $-\infty < \beta < \infty$, с порождающим оператором $\mathrm{K}^{-1/2}$ ($\mathrm{K}^{1/2}$ — оператор Гильберта — Шмидта).

Введем обозначения $\xi_k(x) = (F''(x) f_k, f_k)_H$, $\eta_k(x) = \xi_k(x) - \mathrm{M}\xi_k$, $\mathrm{M}\xi_k = \int\limits_H \xi_k(x)\,\mu(dx)$, $\hat{\eta}_k(x) = \dfrac{\eta_k(x)}{\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\{f_k\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в H, $f_k \in Y$.

Теорема. *Пусть функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпро-*

странству Y, $H_\alpha \subseteq Y \subseteq H$ и $\xi_k(x) = (F''(x) f_k, f_k)_H \in \mathfrak{L}_2(H, \mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Пусть последовательность* $\{\hat{y}_k\}_1^\infty$, *полученная треугольной ортогонализацией* $\{\hat{\eta}_k\}_1^\infty$, *квадратично близка к какой-либо сильно мультипликативной ортонормированной последовательности* $\{w_k\}_1^\infty$ *в* $\mathfrak{L}_2(H, \mu)$. *Если*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \| \eta_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = O\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)}\right), \tag{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k = 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n > 0$, *где* Γ_n — *определитель Грамма функций* $\{\hat{\eta}_k(x)\}_1^n$, $\psi_\varepsilon(n)$ — *одна из функций*

$$(\ln n)^{1+\varepsilon},\ \ln n (\ln \ln n)^{1+\varepsilon}, \ldots,\ \ln n \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{m-1} n\ (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{m} n)^{1+\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0$, *то*

$$\Delta F(x) = 0 \text{ почти для всех } x \in H. \tag{3}$$

С другой стороны, существует функция $F(x)$, *для которой при* $\varepsilon = 0$ (2) *выполняется, но* (3) *не имеет места.*

Оценка (2) (*а значит, и гармоничность функции* $F(x)$) *не зависит от выбора базиса, если* $M|(F''(x)y, z)_H| \leqslant C \|y\|_H \|z\|_H$ $(y, z \in Y)$, *из класса квадратично близких базисов.*

Гармоничность функции $F(x)$ *не зависит от выбора меры из класса гауссовских эквивалентных мер.*

Доказательство. Ортогонализируем нормированную последовательность $\{\hat{\eta}_k(x)\}_1^\infty$ обычным процессом треугольной ортогонализации

$$y_1(x) = \hat{\eta}_1(x), \quad y_k(x) = \left\| \begin{matrix} (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_1)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} & \ldots & (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_{k-1})_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} & \hat{\eta}_1(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_1)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} & \ldots & (\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_{k-1})_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} & \hat{\eta}_k(x) \end{matrix} \right\|$$

$(k = 2, 3, \ldots)$, $\hat{y}_k(x) = \dfrac{y_k(x)}{\|y_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}$. Разлагая определитель по элементам k-го столбца, получаем

$$\frac{\hat{y}_k(x)}{\Gamma_{k-1}} = \frac{\hat{\eta}_k(x)}{\|y_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}} + \frac{V_k(x)}{\|y_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}},$$

где $V_k(x) = \dfrac{1}{\Gamma_{k-1}} [D_{k-1,k}\hat{\eta}_{k-1}(x) + \ldots + D_{1,k}\hat{\eta}_1(x)]$, D_{jk} — алгебраическое дополнение $\hat{\eta}_j(x)$ $(j = 1, \ldots, k-1)$. Отсюда

$$\frac{1}{\Gamma_{k-1}} \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \|y_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} w_k(x) + \frac{1}{\Gamma_{k-1}} \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \|y_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} [\hat{y}_k(x) - $$
$$- w_k(x)] = \eta_k(x) + \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} V_k(x).$$

Учитывая, что $\|y_k\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \Gamma_{k-1}\Gamma_k$, и складывая, получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}} \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} w_k(x) +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}} \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} [\hat{y}_k(x) - w_k(x)] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} V_k(x). \tag{4}$$

Лапласиан Леви (1) функции $F(x)$ — предел последовательности средних арифметических $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x)$. Всякая функция $\Phi(x)$ на H, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{U}$ — это случайная величина на вероятностном пространстве $\{H, \mathfrak{U}, \mu\}$. При этом ее математическое ожидание $M\Phi = \int_H \Phi(x)\,\mu(dx)$, дисперсия $D\Phi = \|\Phi - M\Phi\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$, а сходимости последовательности случайных величин с вероятностью единица соответствует сходимость последовательности измеримых функций почти всюду на H относительно меры μ.

Таким образом, $\{\xi_k\}_1^\infty$ — последовательность стохастически зависимых случайных величин, $\{\eta_k\}_1^\infty$ — эта же последовательность, центрированная своими математическими ожиданиями, $\{y_k\}_1^\infty$ — последовательность ортогональных случайных величин, а матрица Грамма функций $\hat{\eta}_1(x), \ldots, \hat{\eta}_n(x)$ — матрица коэффициентов корреляции случайных величин $\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)$.

Рассмотрим выражение $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\, w_k(x)$, входящее в равенство (4). По условию теоремы $\{w_k\}_1^\infty$ — сильно мультипликативная ортонормированная последовательность. Это означает, что для последовательности функций $\varphi_k(x) = w_{k_1+1}(x)\, w_{k_2+2}(x) \ldots w_{k_q+1}(x)$, где $k = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_q}$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_q$ — двоичное представление индекса $k \geqslant 1$, выполняется соотношение $\int_H \varphi_k(x)\,\mu(dx) = 0\ (k = 1, 2, \ldots)$ и последовательность $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ортогональна, кроме того $\|w_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 1$*. Поэтому последовательность $z_k(x) = \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\, w_k(x)\ (k = 1, 2 \ldots)$ — последовательность стохастически независимых случайных величин, $Mz_k = 0$, $Dz_k = \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\|\eta_k\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$. По условию (2) теоремы $\sum_{k=1}^{n} Dz_k = O\left(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)}\right)$.

Согласно теореме 25 из [6] $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \to 0$ почти наверное.

Обратимся к выражению $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}[\hat{y}_k(x) - w_k(x)]$, входящему в равенство (4). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\int_H |\hat{y}_k(x) - w_k(x)|\,\mu(dx)$ сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}}\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\int_H |y_k(x) - w_k(x)|\,\mu(dx) \leqslant$$

---

* Примеры сильно мультипликативных ортонормированных систем в $\mathfrak{L}_2(H, \mu)$:
а) $w_k(x) = h_p((K^{-1/2}x, f_k)_H)$, $k = 1, 2, \ldots$, для некоторого целого $p \geqslant 1$;
б) $w_k(x) = h_k((K^{-1/2}x, f_k)_H)$, $k = 1, 2$, где $h_m(\zeta)$ — частично нормированные полиномы Эрмита

$$h_m(\zeta) = \sum_{j=0}^{[m/2]}(-1)^j\frac{(m!)^{1/2}}{2^j j!\,(m-2j)!}\zeta^{n-2j},\quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{k^2 \Gamma_{k-1}} \| \eta_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \| \hat{y}_k - w_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \right)^{1/2},$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{k^2 \Gamma_{k-1}} \| \eta_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \psi_\varepsilon(k)} < \infty$ согласно условию (2) теоремы, а $\sum_{k=1}^{\infty} \| \hat{y}_k - w_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} < \infty$, поскольку по условию теоремы последовательности $\{\hat{y}_k\}_1^\infty$ и $\{w_k\}_1^\infty$ квадратично близки. Поэтому по теореме Б. Леви почти всюду на H $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} |\hat{y}_k(x) - w_k(x)| < \infty$. По лемме Кронекера $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} [\hat{y}_k(x) - w_k(x)] \to 0$ почти для всех $x \in H$.

Рассмотрим выражение $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} V_k(x)$, входящее в равенство (4). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \int_H |V_k(x)| \mu(dx)$ сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \int_H |V_k(x)| \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \| \eta_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| V_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \right)^{1/2},$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \| \eta_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \psi_\varepsilon(k)} < \infty$ согласно условию (2) теоремы, а $\sum_{k=1}^{\infty} \| V_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \right) < \infty$, поскольку по условию теоремы $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n > 0$. Мы воспользовались тем, что $V_k(x) = \frac{y_k(x)}{\Gamma_{k-1}} - \hat{\eta}_k(x)$, $(y_k, y_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \Gamma_{k-1}\Gamma_k$, $(y_k, \hat{\eta}_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \Gamma_k$, и значит, $\| V_k \|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 1 - \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}$. Поэтому по теореме Б. Леви почти всюду на H

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} V_k(x) < \infty.$$

По лемме Кронекера $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \| \eta_k \|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} V_k(x) \to 0$ почти для всех $x \in H$.

Теперь из (4) следует, что почти всюду на H $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x) \to 0$. Но по условию теоремы $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \to 0$, поэтому почти всюду на H $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x) \to$ $\to 0$, т. е. $\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x) f_k, f_k)_H = 0$ почти для всех $x \in H$.

Покажем теперь, что существует функция, для которой при $\varepsilon = 0$ выполняется оценка теоремы, но гармоничность не имеет места.

Рассмотрим функцию

$$F(x = \sum_{k=k_1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{1}{2k_1\psi_0(k_1)}}^{x_k} \int\limits_{-\frac{1}{2k_1\psi_0(k_1)}}^{y_k} \varphi_k(\lambda_k z_k)\, dz_k dy_k$$

на l_2, где $\varphi_k(\zeta)$ — функция на R_1 такая, что при $k > k_1$ $\varphi_k(\zeta) = (2\pi)^{1/4} k e^{\zeta^2/4}$ для $\zeta \in \left(0, \frac{1}{2k\psi_0(k)}\right)$, $\varphi_k(\zeta) = -(2\pi)^{1/4} k e^{\zeta^2/4}$ для $\zeta \in \left(-\frac{1}{2k\psi_0(k)}, 0\right)$, $\varphi_k(\zeta) = 0$ вне этих интервалов; $x_k = (x, e_k)_{l_2}$, $\{e_k\}_1^\infty$ — канонический базис в l_2 (ортобазис из собственных векторов оператора $K^{-1/2}$, нормированных в l_2, $K^{-1/2}e_k = \lambda_k e_k$, λ_k — собственные значения оператора $K^{-1/2}$, $k = 1, 2, \ldots$), номер k_1 выбираем таким, что $\underbrace{\ln\ldots\ln}_{m} k_1 > 0$.

Лапласиан Леви этой функции имеет вид

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=k_1}^{n}\varphi_k(\lambda_k x_k).$$

Случайные величины $\eta_k(x) = \varphi_k(\lambda_k x_k)$ независимы, $M\eta_k = 0$, $D\eta_k = \frac{k}{\psi_0(k)}$, $\Gamma_k = 1$. Поэтому $\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} D\eta_k = O\left(\frac{n^2}{\psi_0(n)}\right)$ и условие (2) выполнено при $\varepsilon = 0$.

При $k > k_1$ вероятность

$$P(|\eta_k| \geqslant k) = \mu\{x \in l_2 : |\eta_k| \geqslant k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1/2k\psi_0(k)}^{1/2k\psi_0(k)} e^{-\zeta^2/2}\, d\zeta \geqslant \frac{e^{-1/8k_1^2\psi_0^2(k_1)}}{\sqrt{2\pi}\, k\psi_0(k)}$$

$\left(\text{так как для } \zeta \in \left(-\frac{1}{2k\psi_0(k)}, \frac{1}{2k\psi_0(k)}\right)\ e^{-\zeta^2/2} \geqslant e^{-1/8k_1^2\psi_0^2(k_1)}\right)$. Ряд $\sum_{k=k_1}^{\infty}\frac{1}{k\psi_0(k)}$ расходится, поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} P(|\eta_k| \geqslant k) = \infty$ и по лемме Бореля — Кантелли $P(|\eta_k| \geqslant k$ б. ч. р.$) = 1$ (б. ч. р.— бесчисленное число раз). Значит соотношение $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x) \to 0$ почти наверное (т. е. $\Delta F(x) = 0$ почти для всех $x \in l_2$) не выполняется. Действительно, если бы имело место (3), то необходимо $\frac{\eta_k(x)}{k} \to 0$ почти наверное, что противоречит равенству $P(|\eta_k| \geqslant k$ б. ч. р$) = 1$.

Докажем последние утверждения теоремы.

Пусть $\{g_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H $(g_k \in Y)$, отличный от $\{f_k\}_1^\infty$ и квадратично близкий к $\{f_k\}_1^\infty$, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k - f_k\|_H^2 \leqslant \infty$. Не умаляя общности, будем считать, что $\frac{(F''(x) g_n, g_n)_H}{n} \to 0$ (необходимое условие того, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)\,g_n, g_n)_H\to 0\Big)$. Тогда

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_H (F''(x)\,g_k, g_k)_H^2\,\mu(dx)-\Big(\int_H (F''(x)\,g_k, g_k)_H\,\mu(dx)\Big)^2\Big]-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_H (F''(x)\,f_k, f_k)_H^2\,\mu(dx)-\Big(\int_H (F''(x)\,f_k, f_k)_H\,\mu(dx)\Big)^2\Big]\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_H\Big|(F''(x)\,g_k, g_k)_H-(F''(x)\,f_k, f_k)_H\Big\|(F''(x)\,g_k, g_k)_H+$$

$$+(F''(x)\,f_k, f_k)_H\Big|\,\mu(dx)+\sum_{k=1}^{n}\int_H\Big|(F''(x)\,g_k, g_k)_H-$$

$$-(F''(x)\,f_k, f_k)_H\Big|\,\mu(dx)\int_H\Big|(F''(x)\,g_k, g_k)_H+(F''(x)\,f_k, f_k)_H\Big|\,\mu(dx)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}k\int_H\Big|(F''(x)\,(g_k-f_k), g_k)_H+(F''(x)\,f_k, g_k-f_k)_H\Big|\,\mu(dx)+$$

$$+2C\sum_{k=1}^{n}\int_H\Big|(F''(x)\,(g_k-f_k), g_k)_H+(F''(x)\,f_k, g_k-f_k)_H\Big|\,\mu(dx)\leqslant$$

$$\leqslant 4C\sum_{k=1}^{n}k\,\|g_k-f_k\|_H+4C^2\sum_{k=1}^{n}\|g_k-f_k\|_H.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\,\|g_k-f_k\|_H}{\sqrt{k^3\psi_\varepsilon(k)}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}\|g_k-f_k\|_H^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\psi_\varepsilon(k)}\Big)^{1/2}<\infty,$$

и по лемме Кронекера $\sum_{k=1}^{n}k\,\|g_k-f_k\|=o(\sqrt{n^3\psi_\varepsilon(n)})$. Отсюда, принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\Big[\int_H (F''(x)\,f_k, f_k)_H^2\,\mu(dx)-\Big(\int_H (F''(x)f_k, f_k)_H\,\mu(dx)\Big)^2\Big]=O\Big(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)}\Big),$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\Big[\int_H (F''(x)\,g_k, g_k)_H^2\,\mu(dx)-\Big(\int_H (F''(x)\,g_k, g_k)_H\,\mu(dx)\Big)^2\Big]=O\Big(\frac{n^2}{\psi_\varepsilon(n)}\Big).$$

Согласно первому утверждению этой теоремы $\Delta F(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)\times$ $\times\, g_k, g_k)_H=0$ почти для всех $x\in H$.

Пусть μ и ν — две эквивалентные гауссовы меры с корреляционными операторами K_μ и K_ν и нулевыми средними и $(F''(x)\,f_k, f_k)_H\in\mathfrak{L}_2(H,\mu)$, $(F''(x)\,f_k, f_k)_H\in\mathfrak{L}_2(H,\nu)$ $(k=1,2,\ldots)$. Переход к эквивалентной мере не нарушает сходимости почти всюду на H, поэтому, если выражение $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)\,f_k, f_k)_H$ равно нулю μ-почти всюду на H, то это выражение равно нулю и ν-почти всюду на H.

Заметим, что предположения теоремы не требуют полноты последовательности $\{\hat{\eta}_k\}_1^\infty$. Но если она полна в $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$, то в силу теоремы 3.1

из [7] условие $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n > 0$ — необходимое и достаточное условие того, что последовательность $\{\hat{\eta}_k\}_1^\infty$ составляет базис, близкий к ортонормированному.

3. В заключение отметим, что совокупность условий гармоничности, приведенных в триптихе, который составляют работы [3, 4] и настоящая статья, показывают сколь велик запас гармонических функций бесконечного числа переменных.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М. : Наука, 1967.— 512 с.
2. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные дифференциальные операторы Лапласа — Леви // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 69—79.
3. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. I // Там же.— 1990.— **42** № 11.— С. 1576—1579.
4. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. II // Там же.— № 12.— С. 1687—1693.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 4.— С. 97—140.
6. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.— М. : Наука, 1987.— 320 с.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.

Получено 13.12.90