УДК 517.5

Ю. И. Мельник, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

О приближении регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами специального вида

Построены экспоненциальные полиномы специального вида, которые достаточно хорошо приближают функции, регулярные в открытом выпуклом многоугольнике и непрерывные в замкнутом.

Побудовані експоненціальні поліноми спеціального вигляду, які досить добре наближають функції, регулярні у відкритому опуклому многокутнику і неперервні в замкненому.

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $0 \in M$. Пусть далее $\mathscr{L}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda)$, $d_k \neq 0$, — экспоненциальный полином (квазиполином). Целая функция $\mathscr{L}(\lambda)$ обладает следующими свойствами (см. [1], гл. 1, § 2) (положительные постоянные, различные в разных выражениях, ниже обозначаются a, A, A_k и т. п.):

а) для достаточно больших $\lambda_0 > 0$ при $|\lambda| > \lambda_0$ все нули $\mathscr{L}(\lambda)$ простые;

б) при $|\lambda| > \lambda_0$ нули $\mathscr{L}(\lambda)$ (обозначим их через $\lambda_m^{(j)}$) имеют вид $\lambda_m^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} + \delta_m^{(j)}$, где $\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} \underset{\mathrm{df}}{=} 2\pi m i/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \exp(i\alpha_j)$, $|\delta_m^{(j)}| \leqslant A \exp(-am)$, $j = 1, \ldots, N$, $\gamma_{N+1} = \gamma_1$, q_j и α_j — некоторые числа;

в) при фиксированном натуральном j, $1 \leqslant j \leqslant N$, выполняются оценки

$$|\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)})| \leqslant A, \quad z \in \overline{M}, \tag{1}$$

$$|\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (-1)^m B_j \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}| \leqslant$$
$$\leqslant A \exp(-am), \quad z \in \overline{M}. \tag{2}$$

В силу свойств а), б) множество Λ нулей $\mathscr{L}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_m^{(j)}\}_{m=m(j)}^{\infty} \right),$$

где m_0, $m(j)$ — некоторые фиксированные натуральные числа.

Пусть $\omega(h)$ — фиксированный модуль непрерывности (т. е. $\omega(h)$ задана при $h > 0$, положительна, не убывает, полуаддитивна и $\omega(+0) = 0$), для которого выполняется условие

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt + h \int_h^{2\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leqslant A\omega(h).$$

Через $AH^{\omega}(\overline{M})$ обозначим класс регулярных в M и непрерывных на $\overline{M}$ функций $f(z)$, для которых выполняются условия:

1) $\forall z_1, z_2 \in \overline{M}, |z_1 - z_2| \leqslant h : |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A\,\omega(h)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{N} d_k f(\gamma_k) = 0$.

Положим $(f \in \overset{0}{A}H^{\omega}(M))$

$$S_n(f)(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_f(\lambda_m)\exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_f(\lambda_m^{(j)})\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \tag{3}$$

где

$$\varkappa_f(\lambda_m^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} f(\zeta)\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k)\}\,d\zeta \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} d_k(\gamma_k - \gamma_j)\int_0^{2\pi} f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)\theta/2\pi)\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\theta/2\pi\}\,d\theta \tag{4}$$

(формулы для $\varkappa_f(\lambda_m)$, $m = 1, \ldots, m_0$, в дальнейшем не понадобятся и поэтому здесь не приведены).

Отметим, что $S_n(f)$ представляет собой частную сумму ряда экспонент, в который разлагается в $\overline{M}$ функция $f(z)$ [2]. Известна следующая оценка уклонения [2] $(f \in \overset{0}{A}H^{\omega}(\overline{M}))$:

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant A\omega(1/n)\ln n \tag{5}$$

(здесь и далее $\|\varphi\| \overset{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{z\in\overline{M}}|\varphi(z)|$, где $\varphi(z)$ регулярна в M и непрерывна на $\overline{M}$). Положим

$$S_{n,\hat{n}}(f)(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_f(\lambda_m)\exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_f^{(\hat{n})}(\lambda_m^{(j)})\exp(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \tag{6}$$

где

$$\varkappa_f^{(\hat{n})}(\lambda_m^{(j)}) = \frac{1}{\lambda_m^{(j)}}\sum_{k=1}^{N} d_k \sum_{p=0}^{\hat{n}-1} f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)p/\hat{n})\{\exp(-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)(p +$$

$$+ 1)/\hat{n}) - \exp(-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)p/\hat{n})\}. \tag{7}$$

Отметим, что экспоненциальные полиномы $S_{n,\hat{n}}(f)$ отличаются от $S_n(f)$ тем, что вычисление их коэффициентов требует выполнения лишь арифметических операций. Основная цель данной работы состоит в установлении того факта, что экспоненциальные полиномы $S_{n,\hat{n}}(f)$ приближают функцию $f(z)$ с той же по порядку скоростью, что и $S_n(f)$

2. **Теорема.** *Пусть* $f \in \overset{0}{A}H^{\omega}(\overline{M})$ *и* $S_{n,\hat{n}}(f)$ *определяются по формулам* (6), (7). *Тогда*

$$\|f - S_{n,\hat{n}}(f)\| \leqslant A\{\omega(1/\hat{n}) + \omega(1/n)\}\ln n. \tag{8}$$

Замечание. При $\hat{n} = n$ оценка (8) совпадает по порядку с (5). При $\hat{n} \to \infty$ $\varkappa_f^{(\hat{n})}(\lambda_m^{(j)}) \to \varkappa_f(\lambda_m^{(j)})$ и экспоненциальные полиномы $S_{n,\hat{n}}(f)$ совпадают с $S_n(f)$, а оценка (8) — с оценкой (5).

Доказательство теоремы. Из (3), (4), (6) и (7) имеем

$$S_{n,\hat{n}}(f)(z) - S_n(f)(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} d_k(\gamma_k - \gamma_j) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\hat{n}-1} \int_{2p\pi/\hat{n}}^{2(p+1)\pi/\hat{n}} \{f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)\, p/\hat{n}) - f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi)\} \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j -$$

$$- \gamma_k)\,\theta/2\pi\}\, d\theta \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} d_k(\gamma_k - \gamma_j) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\hat{n}-1} \int_{2p\pi/\hat{n}}^{2(p+1)\pi/\hat{n}} \{f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)\, p/\hat{n}) - f(\gamma_k + (\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\} \times$$

$$\times \Big(\sum_{m=m(j)}^{n} \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) \Big)\, d\theta.$$

Отсюда

$$\| S_{n,\hat{n}}(f) - S_n(f) \| \leqslant \frac{1}{2\pi} A \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} |d_k|\, |\gamma_k - \gamma_j|\, \omega(|\gamma_j - \gamma_k)/\hat{n}) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) \Big|\, d\theta. \qquad (9)$$

Из свойства б) квазиполинома следует, что при $k \neq j + 1$ имеем

$$|\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\}| \leqslant A \exp(-am\theta), \qquad (10)$$

откуда, учитывая (1), при всех $z \in \overline{M}$ получаем

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) \Big|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=m(j)}^{n} \exp(-am\theta)\, d\theta \leqslant A \ln n, \quad k \neq j + 1, \quad z \in \overline{M}. \qquad (11)$$

При $k = j + 1$, учитывая (10), (2), и полагая $z = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)(\theta + + i\varepsilon)/2\pi$, $\varepsilon > 0$, получаем

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k)\,\theta/2\pi\} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) \Big|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A_2 \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=m(j)}^{n} \exp\{-\varepsilon m + im\theta\} \Big|\, d\theta + A_1 \leqslant A \ln n, \quad k = j + 1, \quad z \in \overline{M}, \qquad (12)$$

Из (9), (11), (12) получаем

$$\| S_{n,\hat{n}}(f) - S_n(f) \| \leqslant A\omega(1/\hat{n}) \ln n,$$

откуда с учетом (5) следует (8). Теорема доказана.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Мельник Ю. И.* О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 6.— С. 719—722.

Получено 15.04.91