УДК 517.946

Ж. Н. Тасмамбетов, канд. физ.-мат. наук
(Актюб. пед. ин-т)

Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Изучены частные случаи одной специальной системы в частных производных, решения которых представляются в виде специальных функций и ортогональных многочленов двух переменных.

Вивчені окремі випадки однієї спеціальної системи в частинних похідних, розв'язки яких зображуються у вигляді спеціальних функцій та ортогональних многочленів двох змінних.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} &x^2p_0Z_{xx} + xyp_1Z_{xy} + xp_2Z_x + yp_3Z_y + p_4Z = 0,\\ &y^2g_0Z_{yy} + xyg_1Z_{xy} + xg_2Z_x + yg_3Z_y + g_4Z = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$p_i = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)}x^k, \quad g_i = b_{00}^{(i)} + b_{01}^{(i)}y^k \qquad (2)$$

($i = \overline{0, 4}$; $a_{00}^{(i)}$, $a_{10}^{(i)}$, $b_{00}^{(i)}$, $b_{01}^{(i)}$ и k — постоянные).

Целью настоящей статьи является изучение некоторых частных случаев системы (1), (2), решения которых представляются в виде специальных функций и ортогональных многочленов двух переменных. Для исследования системы будем пользоваться методом Фробениуса — Латышевой [1]. С этой целью запишем систему характеристических функций

$$L_1[x^\rho y^\sigma] \equiv x^\rho y^\sigma \{f_{00}^1(\rho, \sigma) + f_{10}^1(\rho, \sigma)x^k\},$$

$$L_2[x^\rho y^\sigma] \equiv x^\rho y^\sigma \{f_{00}^2(\rho, \sigma) + f_{01}^2(\rho, \sigma)y^k\},$$

где

$$f_{00}^1(\rho, \sigma) \equiv a_{00}^{(0)}\rho(\rho - 1) + a_{00}^{(1)}\rho\sigma + a_{00}^{(2)}\rho + a_{00}^{(3)}\sigma + a_{00}^{(4)},$$

$$f_{00}^2(\rho, \sigma) \equiv b_{00}^{(0)}\sigma(\sigma - 1) + b_{00}^{(1)}\rho\sigma + b_{00}^{(2)}\rho + b_{00}^{(3)}\sigma + b_{00}^{(4)},$$

$$f_{10}^1(\rho, \sigma) \equiv a_{10}^{(0)}\rho(\rho - 1) + a_{10}^{(1)}\rho\sigma + a_{10}^{(2)}\rho + a_{10}^{(3)}\sigma + a_{10}^{(4)},$$

$$f_{01}^{(2)}(\rho, \sigma) \equiv b_{01}^{(0)}\sigma(\sigma - 1) + b_{01}^{(1)}\rho\sigma + b_{01}^{(2)}\rho + b_{01}^{(3)}\sigma + b_{01}^{(4)}.$$

Величины $f_{00}^{(j)}(\rho, \sigma)$, $j = 1, 2$, $f_{10}^1(\rho, \sigma)$ и $f_{01}^2(\rho, \sigma)$ используются для составления определяющих систем.

Система определяющих уравнений

$$f_{00}^{(j)}(\rho, \sigma) = 0, \quad j = 1, 2, \qquad (3)$$

задает показатели α и β степенного ряда двух переменных

$$Z = x^\alpha y^\beta \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu}x^\mu y^\nu, \quad A_{00} \neq 0. \qquad (4)$$

Эту систему уравнений свяжем с регулярными особенностями в начале координат $x = 0$ и $y = 0$. Другую систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned} &f_{10}^1(\rho, \sigma) = 0,\\ &f_{01}^2(\rho, \sigma) = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

будем связывать с особенностями $x = \infty$ и $y = \infty$. Решение в этом случае ищется в виде степенного ряда двух переменных

$$Z = x^{\gamma} y^{\delta} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu} x^{-\mu} y^{-\nu}, \quad B_{0,0} \neq 0, \tag{6}$$

где γ и δ находятся из системы уравнений (5). Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}$ в правой части (4) и (6) находятся из последовательностей систем рекуррентных соотношений [2].

Придавая k и коэффициентам $a_{00}^{(i)}$, $a_{10}^{(i)}$, $b_{00}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}$, $i = \overline{0, 4}$, различные значения, можно получить частные случаи системы (1), (2), решениями которых являются специальные функции и ортогональные многочлены двух переменных. Изучим особенности этих систем.

1. Пусть $k = 0$, тогда полученную систему с регулярной особенностью в $(x = 0,\ y = 0)$ назовем системой типа Эйлера. Она изучена в работе [3].

2. Замена $x^k = u$, $y^k = v$ приводит систему (1), (2) к виду

$$u^2 (a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} u) Z_{uu} + uv (a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)} u) Z_{uv} + u \left\{ \left[a_{00}^{(0)} \frac{k-1}{k} + \frac{a_{00}^{(2)}}{k} \right] + \left[a_{10}^{(0)} \frac{k-1}{k} + \frac{a_{10}^{(2)}}{k} \right] u \right\} Z_u + \frac{1}{k} v [a_{00}^{(3)} + a_{10}^{(3)} u] Z_v + \frac{1}{k^2} (a_{00}^{(4)} + a_{10}^{(4)} a) Z = 0,$$

$$v^2 (b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)} v) Z_{vv} + uv (b_{00}^{(1)} + b_{01}^{(1)} v) Z_{uv} + v \left\{ \left[b_{00}^{(0)} \frac{k-1}{k} + \frac{b_{00}^{(3)}}{k} \right] + \left[b_{01}^{(0)} \frac{k-1}{k} + \frac{b_{01}^{(3)}}{k} \right] v \right\} Z_v + \frac{1}{k} u (b_{00}^{(2)} + b_{01}^{(2)} v) Z_u + \frac{1}{k^2} (b_{00}^{(4)} + b_{01}^{(4)} v) Z = 0. \tag{7}$$

Важно установить всевозможные регулярные и иррегулярные особенности этой системы. В работах [4, 5] с помощью простого признака было установлено, что конечными особенностями системы (7) являются: $(0, -b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)})$; $(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)}, 0)$ и $(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)}, -b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)})$. В случае конечных особенностей соответствующие им решения ищутся в виде обобщенных степенных рядов двух переменных (4). На бесконечности возможны особенности: $(0, \infty)$; $(\infty, 0)$; $(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)}, \infty)$; $(\infty, -b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)})$, а соответствующие решения в зависимости от вида особенностей определяются в виде

$$Z = u^{\rho} v^{\sigma} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} D_{\mu,\nu} u^{\mu} v^{-\mu}, \quad D_{00} \neq 0, \tag{8}$$

или

$$Z = u^{\rho} v^{\sigma} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} F_{\mu,\nu} u^{-\mu} v^{\nu}, \quad F_{0,0} \neq 0 \tag{9}$$

(ρ, σ, $D_{\mu,\nu}$ и $F_{\mu,\nu}$ — неопределенные постоянные).

В случае иррегулярных особенностей в зависимости от величины ранга $p = 1 + k$ ряды в правых частях (4), (6), (8) и (9) умножаются на множитель $\exp Q(x, y)$, где

$$Q(x, y) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} u^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} v^{k+1} + \ldots + \alpha_{10} u + \alpha_{01} v$$

— многочлен от двух переменных u и v; $\alpha_{k+1,0}$, $\alpha_{0,k+1}, \ldots, \alpha_{11}$, α_{10}, α_{01} — неизвестные постоянные, которые следует определить [6]. В результате этого придем к понятиям нормальных и нормально-регулярных решений двух переменных.

Система (7) интересна тем, что многие гипергеометрические функции двух переменных, в том числе функции Аппеля F_1, F_2 и F_3 получаются как решения частных случаев этой системы. Так, в случае $k = 2$ при одних и тех же значениях коэффициентов из (7) и (1), (2) получаются две системы.

Решениями первой системы

$$u(1-u)Z_{uu} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2}+2\right)u\right]Z_u +$$
$$+\frac{m}{2}vZ_v + \frac{1}{2}m\left(\frac{m+n}{2}+1\right)Z = 0,$$
$$v(1-v)Z_{vv} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{m}{2}+2\right)v\right]Z_v +$$
$$+\frac{n}{2}uZ_u + \frac{1}{2}n\left(\frac{n+m}{2}+1\right)Z = 0$$

являются функции Аппеля F_2.

$$Z(u,v) = AF_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, u, v\right) +$$
$$+ Bu^{\frac{1}{2}}F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, u, v\right) +$$
$$+ Cv^{\frac{1}{2}}F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, u, v\right) +$$
$$+ Du^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, u, v\right).$$

Вторую систему получим из (1), (2) и решениями ее являются [7] известные полиномы двух переменных $V_{m,n}(x, y)$. Это показывает, что указанные выше полиномы выражаются через функции F_2, т. е.

$$V(x,y) = AF_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) +$$
$$+ BxF_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right) +$$
$$+ CyF_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1, -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right) +$$
$$+ DxyF_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\right).$$

При определении особенностей следует учитывать и коэффициенты при смешанных частных производных Z_{xy}.

3. Наиболее простой частный случай получается при $p_1 = p_3 = g_1 = g_2 = 0$:

$$\begin{aligned} &x^2(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)}x^k)Z_{xx} + x(a_{00}^{(2)} + a_{10}^{(2)}x^k)Z_x + (a_{00}^{(4)} + a_{10}^{(4)}x^k)Z = 0,\\ &y^2(b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)}y^k)Z_{yy} + y(b_{00}^{(3)} + b_{01}^{(3)}y^k)Z_y + (b_{00}^{(4)} + b_{01}^{(4)}y^k)Z = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрированию первого уравнения системы (10) было уделено внимание еще в работах Эйлера. Решение этой системы строим в виде рядов, расположенных по убывающим степеням x и y. Применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем соотношения

$$\begin{aligned} a_{10}^{(4)} &= -a_{10}^{(2)}\rho - a_{10}^{(1)}\rho(\rho-1),\\ b_{01}^{(4)} &= -b_{01}^{(3)}\sigma - b_{01}^{(1)}\sigma(\sigma-1), \end{aligned} \tag{11}$$

выражающие равенства нулю коэффициентов при старших степенях x и y в процессе подстановки рядов в уравнения системы. С помощью соотношения (11) определяются условия, где все коэффициенты, начиная с некоторых членов, обратятся в нуль, и следовательно, уравнения системы имеют частные решения в конечной форме. Отсюда убеждаемся, что частные решения системы (10) могут определяться в виде произведения многочленов относительно x и y, т. е. в виде

$$F_{n,m}(x, y) = P_{n-m}(x) Q_m(y), \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Они определяют ортогональные многочлены по двум переменным в виде произведения известных классических ортогональных многочленов [8].

К. Я. Латышева, используя понятие размаха коэффициентов, установила [1] более общие необходимые и достаточные условия существования конечных решений для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Если в (10) $k = 1$, то оба уравнения системы имеют размах коэффициентов равный двум. Тогда особенностями первого и второго уравнений будут точки: $x = 0$, $x = -a_{10}^{(0)}/a_{00}^{(0)}$, $x = \infty$ и $y = 0$, $y = -b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}$, $y = \infty$ соответственно. Это показывает, что система (10) в данном случае имеет такие же особенности, как и система (7). Для этого случая справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (10) *при* $k = 1$ *имела решения в конечной форме, необходимо и достаточно, чтобы в разности пар* $(\gamma, \delta) - (\alpha, \beta) = (q, g)$ *числа* q *и* g *были целыми числами или нулями.*

Здесь числа q и g определяют степени многочленов относительно x и y, а показатели (α, β) и (γ, δ) находятся как решения определяющих систем (3) и (7). Система (10) всегда совместная.

Мы убедились, что систему (1), (2) с помощью замены можно привести к виду (7). Поэтому утверждения, справедливые для (7), будут справедливы и для системы (1), (2).

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1)—(2), *размах которой равен двум, имела решения в конечном виде, необходимо и достаточно, чтобы в разности пар* $(\gamma, \delta) - (\alpha, \beta) = (q, g)$ *числа* q *и* g *были целыми числами или нулями.*

Возможно существование до четырех конечных решений.

Теорема 3. *Если разности* $(\gamma_i - \alpha_i, \delta_i - \beta_i) = (m_i, n_i)$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda_1$, $\gamma_2 - \gamma_1 = \lambda_2$, $\beta_2 - \beta_1 = \lambda_3$, $\delta_2 - \delta_1 = \lambda_4$ *являются целыми неотрицательными числами и* $\lambda_1 > m_1$, $\lambda_2 > m_2$, $\lambda_3 > n_1$, $\lambda_4 > n_2$, *то система* (1), (2) *имеет четыре решения в конечной форме.*

Теорема 4. *Если разности* $(\gamma_i - \alpha, \delta_i - \beta)$ *или* $(\gamma - \alpha_i, \delta - \beta_i)$ *равны целым неотрицательным числам, то конечные решения определяются теми из разностей, которые являются минимальными.*

1. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Метод Фробениуса— Латышевой.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.— 394 с.
2. *Тасмамбетов Ж. Н.* О конечном решении одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Аналит. и числ. методы решения задач математики и механики.— Алма-Ата: Наука, 1984.— С. 145—149.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Тасмамбетов Ж. Н.* Решения в конечной форме регулярной системы дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев, 1990.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.21).
4. *Тасмамбетов Ж. Н.* Об определении регулярных особенностей одной системы в частных производных // Изв АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1988.— № 3.— С. 50—53.
5. *Тасмамбетов Ж. Н.* Іррегулярні особливості однієї спеціальної системи в частинних похідних другого порядку // Вісн. Київ. ун-ту.— 1990.— Вип. 32.— С. 132—136.
6. *Терещенко Н. И., Тасмамбетов Ж. Н.* О ранге системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат.— 1972.— № 5.— С. 72—78.
7. *Appell P., Kampe de Feriet M. G.* Fanctions hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite.— Paris: Gauthier-Villars, 1926.— 434 s.
8. *Суетин М. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным.— М. : Наука, 1988.— 384 с.

Получено 11.06.91