УДК 51/09

О. С. Парасюк, акад. АН України (Ін-т теорет. фізики АН України, Київ),
Н. О. Вірченко, д-р фіз.-мат. наук (Київ. політехн. ін-т)

Коротко про наукову спадщину академіка М. Кравчука

Подано короткий огляд основних етапів життя і наукової діяльності визначного українського математика, академіка ВУАН М. Кравчука, репресованого 1938 року й незаслужено замовчуваного протягом багатьох десятиріч.

Дан краткий обзор основных этапов жизни и научной деятельности выдающегося украинского математика, академика ВУАН М. Кравчука, репрессированного в 1938 году и незаслуженно замалчиваемого на протяжении многих десятилетий.

27 вересня 1992 року виповнюється 100 років від дня народження Михайла Пилиповича Кравчука, видатного українського математика, академіка ВУАН, що вніс фундаментальний вклад у різні галузі математики (алгебра і теорія чисел, теорія функцій дійсної і комплексної змінних, теорія диференціальних та інтегральних рівнянь, теорія ймовірностей і математична статистика тощо). Все його багатогранне творче і громадське життя було тісно пов'язане з науковими установами, вузами, школами України. В одній з характеристик 1929 р., поданих при висуванні М. Кравчука до Академії Наук, справедливо говорилося: «...жодне явище в створенні математичної науки (в Україні) не сталося без його участі... перші українські школи в місті та по селах, перші курси, перші українські університети народний та державний (обидва в Києві) ...математична термінологія та наукова мова...— нічого цього не робилося без найактивнішої участі М. П. Кравчука».

М. Кравчук народився в с. Човниці тепер Ківерцівського району на Волині в сім'ї землеміра. У 1901 р. він разом з батьками переїздить до Луцька, де у 1910 р. закінчує гімназію із золотою медаллю. У 1910 р. М. Кравчук вступає на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету. З великим захопленням він студіює тут математику, фізику, астрономію, бере активну участь у роботі наукових семінарів під керівництвом проф. Д. О. Граве, проф. Б. Я. Букреєва.

1914 року М. Кравчук закінчує університет з дипломом 1-го ступеня, його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. За 1915—1917 рр. він склав магістерські іспити та написав кілька статей з питань лінійної алгебри, української математичної термінології і т. д.

Національно-культурне й державне відродження України після повалення царизму не пройшло повз молодого вченого. Він уперто й послідовно працює для розбудови молодої української науки, середньої та вищої школи, для виховання талановитих наукових кадрів. У перші пореволюційні роки поряд з великою суто науковою працею М. Кравчук викладає математичні предмети у I та II українських гімназіях Києва, в Українському народному університеті, він — член Українського наукового товариства в Києві, член Фізико-математичного товариства при Київському університеті, співробітник новоствореної Української Академії Наук, пізніше — член комісії математичної термінології при Інституті Наукової мови УАН. М. Кравчук викладає різні курси математики у низці вищих навчальних закладів (державний університет, Електротехнічна школа, інститути: політехнічний, архітектурний, ветеринарно-зоотехнічний, сільськогосподарський і т. д.).

У важкі роки розрухи М. Кравчук виїздить на село. У 1919—1921 рр. він був учителем і директором школи в с. Саварці (тепер Богуславського району на Київщині).

Велику педагогічну та громадську роботу М. Кравчук поєднує з широкою та розмаїтою науковою творчістю. Він одержує ряд фундаментальних результатів з теорії змінних матриць, з теорії білінійних форм та лінійних перетворень. Ці результати і лягли в основу його докторської дисертації, яку М. Кравчук блискуче захистив у 1924 р. У 1925 р. М. Кравчуку було присвоєно звання професора.

Висока наукова продуктивність та працездатність, оригінальність та гнучкість мислення М. Кравчука, вимогливість і наукова щедрість, самовідданість науці викликали захоплення у його колег та співробітників, ширшало коло його учнів та послідовників. У вересні 1928 р. М. Кравчук був учасником Міжнародного математичного конгресу в Італії (м. Болонья), де виступив з кількома цікавими доповідями, а по дорозі додому виголосив доповідь на засіданні Математичного товариства у Парижі. З 1927 р. М. Кравчук член Французького математичного товариства. 29 червня 1929 р. його одностайно обрано дійсним членом ВУАН. Цей рік і наступні вісім років — найплідніші у творчості визначного математика. М. Кравчук вів і велику громадську роботу: він був членом Управи Київського Інституту Народної Освіти, деканом факультету Професійної Освіти, членом міської ради, Української Центральної Ради Секції Наукових Робітників і ін.

Самовіддана праця М. Кравчука в ім'я розбудови української науки, його неперевершений викладацький хист і авторитет серед студентської та наукової молоді не могли пройти непоміченими. 21 лютого 1938 р. М. Кравчука заарештували і інкримінували йому звичайний для тих літ набір стереотипів контрреволюційної діяльності: український буржуазний націоналіст, шпигун і т. п.

23 вересня 1938 р. М. Кравчука засуджено на 20 років тюремного ув'язнення та на п'ятирічне заслання, відправлено на Колиму. Три каторжних зими й літа відбув він там, хворий і напівупалий здоров'ям, а 9 березня 1942 р. залишився вже на віки вічні у колимській мерзлоті. Реабілітований посмертно 15 вересня 1956 р.

М. Кравчук — автор понад 180 наукових праць, у тому числі більше десяти монографій, з різних галузей математики: алгебри та теорії чисел, теорії функцій дійсної та комплексної змінних, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, математичної статистики та теорії ймовірностей тощо.

Результати, одержані М. Кравчуком за роки наукової творчості, можна віднести до таких основних напрямів:

дослідження з теорії комутативних матриць, квадратичних та білінійних форм, лінійних перетворень, теорії алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, теорії чисел;

теорія функцій дійсної та комплексної змінних;

розробка проблем інтерполяції, розвиток способу найменших квадратів в теорії наближеного розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь;

створення і математичне обгрунтування узагальненого методу моментів, застосування його до наближеного розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, інтегральних рівнянь тощо;

розвиток теорії кореляції, застосування методу моментів у математичній статистиці;

запровадження та застосування многочленів, пов'язаних з біноміальним розподілом, які тепер відомі (у світовій літературі) як многочлени Кравчука.

Наукові інтереси молодого Кравчука великою мірою формувались під впливом математичної творчості Д. О. Граве, що з 1902 р. працював у Київському університеті. Широка науково-педагогічна робота Д. О. Граве, його курси лекцій, посібники з математики, науково-популярні праці відіграли значну роль у розвитку математичної освіти в Україні, а наукові семінари під керівництвом Д. О. Граве фактично були основою майбутньої всесвітньовідомої Київської алгебраїчної школи, з якої вийшли відомі алгебраїсти: М. Кравчук, О. Шмідт, М. Чеботарьов, Б. Делоне, Є. Жилінський, О. Островський та багато інших.

Алгебра та теорія чисел

Розвиваючи традиції Київської математичної школи, М. Кравчук працював над питаннями лінійної алгебри, розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та над теорією чисел. Своє перше дослідження («О параметрическом представлении перестановочных матриц») він написав у 1913 р. Наукові результати, одержані в цій роботі, а також трохи пізніше, відображено у статті [1].

У 1905 р. німецький математик Шур довів, що число лінійно незалежних матриць комутативної групи матриць n-го порядку не більше $[n^2/4]+1$. М. Кравчук дав простіше доведення теореми Шура, скориставшись так званими кореневими групами Фробеніуса. Він побудував комутативну кореневу групу, яка містить $[n^2/4]$ лінійно незалежних матриць, довів, що не існує комутативної кореневої групи n-го порядку з більшим числом лінійно незалежних матриць [9]. М. Кравчук довів теорему Шура для загального випадку, зокрема, встановив, що коли до елементарної комутативної множини матриць n-го порядку належить матриця M $(\nu-1)$-го рангу така, що $M^{\nu-1}\neq 0$, а $M^{\nu}=0$, то найбільше можливе значення числа лінійно незалежних матриць відповідної повної множини дорівнює величині

$$\left[\frac{(n-\nu)^2}{4}\right]+n=\left[\frac{(n-\nu+2)^2}{4}\right]+\nu-1.$$

Якщо ж найвищий ранг матриць M дорівнює $\nu-1$, то число лінійно незалежних матриць відповідної повної множини рівне n. М. Кравчук повністю розв'язав задачу знаходження всіх повних комутативних множин матриць n-го порядку, матриці яких справджують рівняння другого степеня [1, 7—9, 31, 60, 66].

Від часів Лангранжа, Коші, Якобі проблема лінійного перетворення квадратичних форм від довільного числа змінних стала класичною задачею, що має важливі застосування в різних галузях математики та в інших науках. Якобі, Вейєрштрасс, Кронекер чимало зробили для розвитку теорії білійних та квадратичних форм. Гідним їх продовжувачем у цих дослідженнях став М. Кравчук. Його докторська дисертація «Про квадратичні форми та лінійні перетворення» [9] — це фундаментальне дослідження з теорії комутативних матриць, квадратичних та білінійних форм, зокрема, М. Кравчук тут також подав узагальнення і спрощення основних задач з теорії квадратичних та білінійних форм, розв'язав велику низку складних задач з теорії лінійних перетворень.

У першому розділі дисертації він узагальнив спосіб Лагранжа виділення квадратів з квадратичної форми та способи Плюкера—Гундельфінгера, Гульдельфінгера та Якобі розкладу квадратичної форми на суму квадратів лінійних форм. М. Кравчук одержав зручну формулу розкладу квадратичної форми на суму квадратів лінійних форм:

$$2f(x)=\frac{1}{A^{(p)}}\sum_{1}^{p}A_{ij}^{(p)}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{1}{(A^{(p)})^2A^{(p+p')}}\sum_{p+1}^{p+p'}A_{ij}^{(p+p')}\frac{\partial f'}{\partial x_i}\frac{\partial f'}{\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{(A^{(p+p')})^2A^{(p+p'+p'')}}\sum_{p+p'+1}^{p+p'+p''}A_{ij}^{(p+p'+p'')}\frac{\partial f''}{\partial x_i}\frac{\partial f''}{\partial x_j}+\dots$$

$$(A^{(p)}, A^{(p+p')}, A^{(p+p'+p'')}, \dots\neq 0),$$

де $2f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ — квадратична форма,

$$A^{(p)} = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1p} \\ \dots\dots \\ a_{p1}, \dots, a_{pp} \end{vmatrix}, \quad A_{ij}^{(p)} = \frac{\partial A^{(p)}}{\partial a_{ij}}.$$

Ця формула Кравчука цінна і тим, що дає змогу застосування ермітових форм до дослідження коренів алгебраїчного рівняння. Відмітимо, що формула Кравчука застосовна і в тому разі, коли серед головних мінорів дискримінанта квадратичної форми є нулі, тоді як формулою Якобі тут не можна скористатись.

Другий розділ дисертації М. Кравчука присвячено теорії перетворення до канонічного вигляду в'язок білінійних та квадратичних форм. Застосовуючи елементарні перетворення матриць, М. Кравчук істотно спростив і красиво виклав результати Вейєрштрасса та Кронекера, встановив нову необхідну та достатню умову еквівалентності двох в'язок білінійних форм, а саме:

якщо всі елементарні дільники двох в'язок білінійних форм

$$A - \lambda B, \quad A_1 - \lambda B_1 \ \ (|B| \neq 0, |B_1| \neq 0)$$

попарно дорівнюють один одному, то в'язки еквівалентні, тобто переходять одна в одну за допомогою лінійних перетворень змінних, і, навпаки, дві еквівалентні неособливі в'язки білінійних форм мають елементарні дільники, що попарно дорівнюють один одному.

М. Кравчук дав спосіб утворення канонічної форми для всякої, особливої і неособливої, в'язки білінійних форм, не поширюючи області вимірності, визначеної коефіцієнтами даних форм.

У третьому розділі М. Кравчук вперше подав спосіб визначення найбільшого числа лінійно незалежних матриць у комутативній множині, до якої належить довільна задана матриця, і вказав метод побудови всіх множин, які мають максимальну властивість. Він побудував множину комутативних матриць для випадку, коли до повної комутативної елементарної множини лінійних перетворень n-го порядку належить перетворення, характеристичний визначник якого має лише два непостійні елементарні дільники степеня n_1 та n_2 щодо λ. Йому вдалось знайти загальний випадок множини, яка має n лінійно незалежних перетворень, окрім того, він подав загальніший випадок множини, коли серед лінійних перетворень її непостійні елементарні дільники характеристичного многочлена всі дорівнюють нулеві.

У роботах [96, 112] та деяких інших розглядається питання теорії унітарних та ортогональних перетворень, зокрема дається розклад унітарних та ортогональних (дійсних і комплексних) перетворень n-го порядку на унітарні та ортогональні перетворення 2-го порядку. Наведемо декілька основних теорем цього змісту:

усяке унітарне перетворення n-го порядку є добутком щонайбільше $n(n-1)/2$ унітарних перетворень 2-го порядку;

якщо матриця n-го порядку з комплексними елементами є ортогональною, то її можна подати у вигляді добутку $q \leqslant n(n-1)/2$ ортогональних перетворень 2-го порядку та $r \leqslant n - 1$ перестановок рядків чи стовпців.

Важлива робота М. Кравчука [6] стосується дослідження алгебраїчного рівняння 28-го степеня. За допомогою ланцюгових дробів М. Кравчук докорінно узагальнив теорему Штурма про число дійсних коренів алгебраїчного рівняння на даному інтервалі. Він дав нові доведення основної теореми алгебри [21, 68], які вигідно відрізняються від відомого на той час доведення Коші саме тим, що дають водночас збіжні процеси для наближеного обчислення кореня з довільно малою наперед заданою похибкою, а окрім того, доведення теореми було настільки простим і елегантним, що довго вражало математиків того часу (Д. Граве, Б. Делоне, М. Чеботарьова та ін.).

З теорії чисел М. Кравчук довів деякі теореми про кубічне поле та розподіл простих чисел за класами підстановок, зокрема дав просте доведення теореми Делоне про двочленні одиниці числового алгебраїчного поля, залежного від кубічного кореня з цілого числа [15], спростив доведення теорем Фробеніуса та Чеботарьова про розподіл простих чисел по класах підстановок [15, 58, 61] тощо. До речі, М. Кравчук одержав ці важливі результати, значно спрощуючи відповідні доведення М. Чеботарьова, в якого він був опонентом по докторській дисертації (1927 р.)

Теорія функцій дійсної та комплексної змінних

Основні результати з теорії аналітичних функцій М. Кравчук виклав у працях [5, 12, 14, 37, 48, 63—65, 76, 78] та в монографії «Алгебраїчні студії над аналітичними функціями» [79].

Так, у роботі [12] глибоко досліджено інтеграл диференціального рівняння Бріо та Буке

$$f\left(y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

алгебраїчного щодо y та dy/dz, коли цей інтеграл у площині комплексної змінної $z = x + iy$ має скінченне число значень, тобто справджує алгебраїчне рівняння

$$y^m + g_1(z)\, y^{m-1} + g_2(z)\, y^{m-2} + \ldots + g_m(z) = 0,$$

де коефіцієнти $g_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, m$,— однозначні аналітичні функції. М. Кравчук дає напрочуд просте, нове доведення того, що інтеграл цього рівняння — це алгебраїчна функція або від самого аргументу z, або від $e^{2iz/\omega}$ при відповідно підібраному періоді ω, або від еліптичних функцій з відповідно підібраними періодами, зокрема, від функції Вейєрштрасса $\rho(z/\omega, \omega')$ та її похідної $\rho'(z/\omega, \omega')$. Зауважимо, що при доведенні цього результату М. Кравчук не користувався теоремою Пікара про поведінку трансцендентної аналітичної функції в околі ізольованої істотно особливої точки.

Відомо, що питання про найзагальнішу форму аналітичних функцій, які справджують алгебраїчну теорему додавання, вперше поставив і розв'язав Вейєрштрасс у курсі лекцій про еліптичні функції, але доведення цієї проблеми не опублікував. Пізніше математики (Фрагмен, Шварц та ін.) давали доведення цієї теореми, але воно було складним, з використанням згадуваної вище теореми Пікара тощо. М. Кравчук вперше довів такий факт:

якщо $\varphi(u)$ є алгебраїчна функція від u, або від $e^{2\pi iu/\omega}$, або, нарешті, від функції Вейєрштрасса $\rho(u/\omega, \omega')$, то справджує функціональне рівняння вигляду

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u + v)) = 0,$$

де G — знак многочлена.

Зауважимо, що теорема Вейєрштрасса дає обернене твердження. При доведенні свого твердження М. Кравчук спирається на свою працю [12].

Ряд цінних результатів М. Кравчук виклав у монографії [79]. На основі досліджень А. Маркова та Т. Стільтьєса в теорії ланцюгових дробів та класичних результатів Адамара щодо полюсів мероморфних функцій М. Кравчук сформулював та довів необхідні та достатні умови того, щоб m найменших за модулем полюсів мероморфної функції були дійсними (або додатніми) та з додатніми лишками. Розглянемо ці його положення детальніше.

Нехай коефіцієнти ряду $\Phi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, починаючи з якогось $m \geqslant 0$,— дійсні числа, а визначники

$$a_m^1 = a_m, \quad a_m^2 = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$a_m^l = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+l-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m+l-1} & a_{m+l-2} & \dots & a_{m+2l-2} \end{vmatrix},$$

a^l_{m+2}, a^l_{m+4}, ... відмінні від нуля, тоді, коли виконується умова

$$a_m^1 > 0, a_m^2 > 0, \dots, a_m^l > 0, \tag{1}$$

то всі нулі многочлена

$$\Psi_{ml}(z) = \frac{1}{a_m^l} \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+l-1} & z^l \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+l} & z^{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m+l} & a_{m+l-1} & \dots & a_{m+2l-1} & 1 \end{vmatrix}$$

дійсні й різні. А оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \Psi_{ml}(z) = \prod\limits_{i=1} (1 - \alpha_i z)$, то полюси α_1^{-1}, $\alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_l^{-1}$ функції $\Phi(z)$ усі дійсні, коли нерівності (1) виконуються для низки значень m: $m = m_1, m_2, \dots$, що зростають необмежено. М. Кравчук підкреслює, що полюси $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_l^{-1}$ дійсні, коли нерівності

$$a_m^1 > 0, a_m^2 > 0, \dots, a_m^l > 0; a_{m+2}^l > 0, a_{m+4}^l > 0, \dots \tag{2}$$

справедливі і для якогось одного m, зокрема, якщо

$$\Phi(z) = -G'(z)/G(z),$$

де $G(z)$ — ціла трансцендентна функція, то нерівності (2) для парного числа m і є необхідною та достатньою умовою, щоб полюси $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_l^{-1}$ (нулі функції $G(z)$) були дійсними.

Узагальнюючи результати Ерміта, пов'язані з теоремою Штурма, М. Кравчук за допомогою відповідних квадратичних форм довів критерій того, що серед m найменших за модулем полюсів мероморфної функції існує $m - 2s$ дійсних з додатніми лишками.

Особливо слід відмітити працю [64], в якій М. Кравчук довів, що коли $f(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots$, причому

$$s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

то $f(z)$ — функція вигляду $R_0 + \Sigma R/(1 - lz)$ ($R_0 \geqslant 0$, $R \geqslant 0$, l — дійсне) якщо тільки якась похідна від множини особливих точок цієї функції — нуль. Зокрема, всі полюси функції $zf(z)$ є простими з від'ємними лишками, а всяка ізольована особлива точка цієї функції — простий дійсний полюс.

М. Кравчук у роботі [95] узагальнив теорему Лагерра про нулі похідних від цілих функцій скінченного роду, одержав ряд істотних результатів, зокрема:

якщо однозначна функція $f(z) = s_{2k} z + s_{2k+1} z^2 + \dots$ *справджує умови*

$$s_{2k} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} & s_{2k+2} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} & s_{2k+3} \\ s_{2k+2} & s_{2k+3} & s_{2k+4} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

то сума $F\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ *має нуль між усякими двома сусід-*

німи ізольованими особливими точками x' та x'' функції $f(1/x)$, якщо тільки на $[x', x'']$ нема особливостей функції $\varphi(1/x)$;

якщо p є не нижчий із степенів многочленів $xP(x)$, $Q(x)$, а $\varphi(1/x) = F(x)/Q(x)$, то функція $F(1/x)$ може мати не більше, як p нулів, окрім тих, що чергуються з полюсами функцій $f(1/x)$;

якщо, окрім того, функція $F(x) = H/G$ — мероморфна, то цілі функції $H(z)$, $G(z)$ є скінченного порядку і одного роду. Звідси при $H = G'$ випливає випадок Лагерра.

Вивчаючи наукові праці М. Кравчука, захоплюєшся якоюсь особливою витонченістю, стрункістю, красою наукового викладу. Такою наочною ілюстрацією у цьому розділі можна, приміром, назвати працю [68], в якій доведено теорему про існування кореня алгебраїчного рівняння. М. Кравчук розглядає функцію

$$1/(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots . \tag{3}$$

При умові, що серед чисел $|b_{n+1}|, |b_{n+2}|, \dots, |b_{n+2p-1}|$ немає більшого за $|b_{m+i}|$, де i — одне з чисел $1, 2, 3, \dots, 2p-1$, встановлює нерівність

$$|a_p| \leqslant p\,[|\sqrt[n+i]{b_{m+i}}|^{\frac{n+i}{n+p}}]^p,$$

з якої випливає, що ряд (3) збігається не для всіх значень змінної x, а тому функція, що стоїть ліворуч в (3), має особливості і ці особливості можуть бути тільки полюсами. А полюси у даному разі — це нулі многочлена

$$1 + a_1x + \dots + a_px^p. \tag{4}$$

Отже, цим і доводиться існування кореня у всякого алгебраїчного рівняння. Далі дослідник подає іншу нерівність:

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{b_n} \geqslant |\sqrt[p]{a_p}|,$$

причому встановлює, що модулі всіх нулів многочлена (4) не перевищують величини $|\sqrt[p]{1/a_p}|$.

Понад 20 робіт [19, 29, 35, 53 та ін.] М. Кравчук присвятив питанням теорії функції дійсної змінної. Він довів кілька важливих формул узагальненої інтерполяції через рівні інтервали, зокрема:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{\sin \pi nz}{\pi n}\, \frac{(-1)^n f(x_i)}{z - x_i}\, dz$$

$$\left(\alpha = n^{2\delta-1};\ \frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}\right),$$

що збігається в усякому внутрішньому інтервалі сегменту (0, 1).

Питання про умови існування старших похідних для функції дійсного змінного цікавило багатьох вчених, зокрема Монтеля, М. Крилова, М. Боголюбова, та саме М. Кравчук у працях [53, 66] дає вичерпну відповідь на це питання, а саме:

а) достатня умова існування похідної d^ky/dx^k на інтервалі (0, 1) — це обмеженість величини

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}}\right)^2}\,;$$

б) якщо вираз

$$(x-\alpha)^{k+r} \sum_{i=0}^{m-k} \frac{(x - \alpha - \overline{i+1h})(x - \alpha - \overline{i+2h}) \dots (x - \alpha - \overline{i+kh})}{k!} \times$$

$$\times \frac{\Delta y^{k+1}(\alpha + ih)}{h^{k+1}} \quad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant a-1,\, a \leqslant x \leqslant 1,\, 0 < r \leqslant 1,\, h = \frac{x-\alpha}{m}\right)$$

є обмеженим, то похідна $y^{(k)}(\alpha)$ існує і функція

$$h^{-r}\Delta y^{(k)}(\alpha) = h^{-r}(y^{(k)}(\alpha + h) - y^{(k)}(\alpha))$$

є обмеженою, та навпаки. Аналогічні результати М. Кравчук одержав і для похідних від функцій кількох змінних [29, 62].

Перетворення Гріна та Стокса український вчений досліджував у [32, 45, 52, 69] як з погляду узагальнення умов неперервності, що накладаються на функції, які в цих перетвореннях фігурують, так і з погляду узагальнення самих формул перетворення. Зокрема, він подає таке узагальнення перетворення Стокса та Гріна [38]:

$$\int_S \cdots \int \sum{}' F_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \sum{}'' \int_{V_{i_1 \ldots i_{k+1}}} \cdots \iint \left(\sum_{a, \ldots, f, h = 1}^{k+1} \frac{\partial F_{i_a \ldots i_f}}{\partial x_{i_h}} \right) dx_{i_1} \ldots dx_{i_{k+1}}.$$

Тут S — множина

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, \ldots, t_k) \\ &\ldots\ldots\ldots \quad (k < n) \\ x_n &= x_n(t_1, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

така, що всі її лінії, які справджують рівняння

$$x_{i_1} = \text{const},\, x_{i_2} = \text{const}, \ldots, x_{i_{k-1}} = \text{const}$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1, 2, \ldots, n)$$

замкнені. Коли рівняння множини

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= x_{i_1}(t_1, \ldots, t_k) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_{k+1}} &= x_{i_{k+1}}(t_1, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

є $V_{i_1 \ldots i_{k+1}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}}) = 0$, то одна з двох визначуваних множин—перша—умовою $V < 0$, друга — умовою $V > 0$, обмежена; її у формулі й позначено через $V_{i_1 \ldots i_{k+1}}$. Знаки Σ', Σ'' поширюються на всі комбінації із значків $\overline{1, n}$ відповідно по k, $k+1$; значки $a, \ldots, f, h$ — всі різні. Випадок $n = 3$, $k = 1$ дає перетворення Стокса, а випадок $n = 3$, $k = 2$ — перетворення Гріна.

У праці [90] М. Кравчук встановив цікаву властивість опуклих функцій:

якщо функція $\varphi(x)$ росте і є опуклою, а $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$, то сума

$$[\varphi(A_2 - A_1) + \varphi(A_n - A_{n-1})] + [\varphi(A_3 - A_1) + \varphi(A_4 - A_2) + \ldots]$$

становить мінімум усіх сум типу

$$\varphi(|A_{\alpha_1} - A_{\alpha_2}|) + \varphi(|A_{\alpha_2} - A_{\alpha_3}|) + \ldots + \varphi(|A_{\alpha_n} - A_{\alpha_{n-1}}|) + \varphi(|A_{\alpha_1} - A_{\alpha_n}|).$$

Досліджуючи остачу ряду Лагранжа, М. Кравчук одержує нову форму остачі для випадку дійсних змінних [35, 43], з якої формули Чебишева та Золотарьова випливають як частинний випадок.

Теорія диференціальних та інтегральних рівнянь

Чи не найбільше місце у науковій спадщині М. Кравчука посідають студії з теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, зокрема, наближених методів їх розв'язання та ін. [36, 44, 49, 57, 75, 76, 84, 98, 101, 104, 105 та ін.].

Праці М. Кравчука з теорії наближеного інтегрування диференціальних та інтегральних рівнянь поруч із дослідженнями М. Крилова, М. Боголюбова та інших сприяли активному застосуванню варіаційних методів до наближеного розв'язання різних задач прикладної математики та фізики. Його методи особливу вагу мають тепер у зв'язку з розвитком кібернетики, зокрема, при програмуванні багатьох складних явищ і процесів.

М. Кравчук успішно розвивав метод найменших квадратів у теорії наближеного інтегрування диференціальних та інтегральних рівнянь. Метод найменших квадратів він досліджував головне у двох напрямках, а саме: у напрямку зменшення похибки наближених розв'язків та в напрямку доведення збіжності похідних від цих наближень при відповідних граничних умовах та відповідному виборі функцій, з яких складається наближений розв'язок. Але найголовніше — М. Кравчук довів збіжність способу М. Крилова у загальному випадку. Відмітимо, що метод М. Кравчука поєднує в собі переваги способу найменших квадратів щодо доведення збіжності та простоту обчислення коефіцієнтів наближення способу Рітца. Ці результати М. Кравчук доповів і на Міжнародному математичному конгресі в Болоньї 1928 року. Зокрема, там він подав і таку загальну теорему:

якщо рівняння

$$L(y) \equiv y^{(k)} + A_1(x)\, y^{(k-1)} + \dots + A_k(x)\, y = f(x)$$

має інтеграл, що справджує граничні умови типу

$$\sum_{i=0}^{k-1} [\alpha^{(k)} y(0) + \beta_i^{(k)} y(1)] = 0$$

і коли функції $\varphi_i(x)$ справджують ті самі умови, а функції $\varphi_i^{(k)}(x)$ утворюють повну систему, то функція

$$y_m = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

визначена рівняннями

$$\int_0^1 L(y_m)\, \varphi_i^{(k)}(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, \varphi_i^{(k)}(x)\, dx \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

справджує такі рівності:

$$\lim_{m=\infty} y_m = y, \lim_{m=\infty} y'_m = y', \dots, \lim_{m=\infty} y_m^{(k-1)} = y^{(k-1)}.$$

Причому можна визначити ступінь похибки рівностей

$$y^{(i)} - y_m^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

залежно від m, а функції $\varphi(x)$ узяти у формі многочленів.

Переважну більшість праць М. Кравчука з теорії наближеного інтегрування [46, 116, 117, 122, 131, 146, 149, 156, 166, 167, 168, 175 та ін.] присвячено розвиткові та застосуванню методу моментів до наближеного розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь математичної фізики, диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь.

Основна ідея методу моментів — визначати функцію на даному інтервалі (a, b) через моменти на тому самому інтервалі, тобто через інтеграли

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_i(x)\, dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\varphi_i(x)$ — задані функції.

Основні свої результати з теорії моментів М. Кравчук виклав у фундаментальній двотомній монографії «Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь» [116, 155].

Перший том цієї праці — це дослідження методу моментів в його застосуванні до наближеного розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь та систем цих диференціальних рівнянь.

Самоспряжена задача про визначення на інтервалі (a, b) функції $y(x)$ в умов

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \tag{5}$$

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{6}$$

може бути зведена до задачі варіаційного числення, а саме — знаходження функції $y(x)$ у формі даного виразу від x та від довільної кількості параметрів a_i:

$$y(x) \approx y_m(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

через мінімізацію інтегралу

$$\mathcal{J}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \int_a^b F[x, y_m(x, a_1, \dots, a_m),$$

$$y'_m(x, a_1, \dots, a_m)]\, dx.$$

Функцію y_m можна вибрати, як лінійну функцію від параметрів a_i, і тоді її визначення зведеться до розв'язання системи m лінійних рівнянь щодо параметрів a_i. Рітц довів рівність

$$\lim_{m=\infty} y_m(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = y(x)$$

для частинного випадку при вузьких обмеженнях на функцію $p(x)$. Та практика вимагала розширення алгоритму Рітца. М. Кравчук, Р. Курант, Л. Ліхтенштейн та інші довели збіжність способу Рітца або подібних до нього в усіх випадках, коли розв'язок $y(x)$ задачі (5), (6) існує. Більш того, М. Кравчук виявив цікавий факт: щоб забезпечити цю збіжність, досить вибрати функцію y_m у вигляді

$$y_m(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$$

за певних умов на функції $\varphi_i(x)$. Найзручніше вимагати, вказує М. Кравчук, щоб ці функції $\varphi_i(x)$ були фундаментальними функціями іншого, відповідно підібраного лінійного диференціального рівняння з тими самими граничними умовами (6). Далі М. Кравчук показав, як таке рівняння підібрати: тут завжди можна обмежитися рівнянням зі сталими коефіцієнтами, отже функції $\varphi_i(x)$ можна взяти у вигляді раціональних комбінацій з многочленів, показникових та тригонометричних функцій.

У наступних розділах монографії М. Кравчук показав, як звільнитися від варіаційного алгоритму Рітца, перейти до значно загальнішого методу. Ці результати М. Кравчука мали велике значення, оскільки різко збільшили застосовність методу, дозволили поширити його і на несамоспряжені задачі. Завдяки згаданому вище способові добору функцій $\varphi_i(x)$, підкреслює М. Кравчук, вдається одержати і точні розв'язки для лінійних одновимірних задач у формі певних рядів, у яких функції $\varphi_i(x)$ відіграють роль, подібну до ролі фундаментальних функцій, маючи одначе ту перевагу, що їх завжди можна взяти точно й у простому вигляді.

У третьому розділі автор будує повну теорію наведеного вище наближеного методу, незалежного навіть від загальних теорем про існування розв'язок. Безперечно, таке поєднання теорії з практикою мало велику і наукову, і методологічну цінність на той час, бо відкривало дорогу до нових перспективних досліджень у цьому напрямку. Справді, ці дослідження звільняли на практиці від надзвичайно складних обчислень, зв'язаних з характеристичними числами та фундаментальними функціями, а окрім того, вказували шляхи до утворення функцій, які могли б заміняти собою характеристичні функції у випадках несамоспряжених задач.

У другому томі монографії розглядаються лінійні рівняння з частинними похідними математичної фізики. Відомо, що спосіб Рітца не дає збіжного результату навіть у випадку рівняння Лапласа, сам Рітц довів збіжність свого способу для бігармонічного рівняння $\Delta\Delta z = 0$ при крайових умовах типу

$$z = \theta(s), dz/dn = \tilde{\theta}(s)$$

на контурі s, що обмежує область, в якій визначається функція $z(x, y)$.

М. Кравчук узагальнив спосіб Рітца, зокрема довів і збіжність його для обох вказаних рівнянь та для набагато загальніших рівнянь.

У своїх дослідженнях М. Кравчук обмежився лише лінійним диференціальним рівнянням еліптичного типу з двома незалежними змінними, та його метод має загальний характер, він придатний для лінійних рівнянь з частинними похідними з будь-яким числом незалежних змінних, а також і для систем лінійних диференціальних рівнянь. Методові моментів Кравчука наближеного інтегрування лінійних рівнянь математичної фізики притаманна особлива властивість, що, приміром, для звичайних диференціальних рівнянь k-го порядку збігається не тільки саме наближення y_m, а й його похідні до $(k-1)$-го порядку включно, а похідна k-го порядку збігається в середньому; для рівнянь з двома незалежними змінними k-го порядку похідні відповідного наближення розв'язку збігаються всі до $(k-2)$-го порядку, похідні $(k-1)$-го порядку збігаються у середньому тільки з найвищих членів відповідного диференціального рівняння.

М. Кравчук встановив, що метод моментів для достатньо широкого класу лінійних диференціальних рівнянь з лінійними умовами дає наближення до інтегралу задачі того самого порядку, що й наближення цього інтегралу скінченною сумою Фур'є, а пізніше поширив ці результати на загальнішу групу задач і на різні способи аналітичного зображення шуканих функцій.

У монографії подано також застосування згадуваних вище ідей до інтегральних рівнянь. М. Кравчук, зокрема, підкреслює, що вживаний іноді спосіб заміни диференціального рівняння рівнянням інтегральним у багатьох випадках не спрощує задачі і що ідею Гільберта розв'язувати лінійні інтегральні рівняння за допомогою рядів ортогональних функцій можна, з відповідними змінами, застосувати й безпосередньо до диференціальних рівнянь. Розглянемо хоча б на одному прикладі застосування методу моментів до наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.

Нехай $y(x)$ — єдиний на (a, b) розв'язок інтегрального рівняння

$$L[y] = y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x)$$

із змінним параметром λ. $K(x, \xi)$, $f(x)$ інтегровні на тому інтервалі, можуть бути і необмеженими. Але коли K та f, як функції від x, мають p-ті похідні, причому похідна $\partial^p K(x, \xi)/\partial x^p$ — неперервна, то існує й похідна $y^{(p)}(x)$. Загальніше, коли $\dfrac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p}$ існує та неперервна, то різниця $y - f$ має p-ту похідну. Наступна теорема Кравчука показує, як метод моментів можна застосувати до розв'язання щойно згаданого інтегрального рівняння.

Теорема. *Сумма*

$$y_m = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{m-1}\varphi_{m-1},$$

де функції $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *утворюють повну систему, а коефіцієнти* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *справджують рівняння*

$$\int_a^b L[y_m]\, A\varphi_i dx = \int_a^b Af\varphi_i dx \quad (i=0, 1, \ldots, m-1; A(x) > 0),$$

має властивість:

$$\lim_{m=\infty} \int_c^x y_m dx = \int_c^x y dx \quad (a \leqslant c \leqslant x \leqslant b)$$

для всякого значення параметра λ, для якого існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння. Коли до того ж функція y має p-ту похідну з модулем неперервності $\omega(x)$, *то*

$$y - y_m = \frac{M\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{p-1}},$$

де M — обмежена функція від m. Отже,

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y.$$

З деякими модифікаціями метод моментів застосовний і до системи лінійних інтегральних рівнянь

$$L_l[y_1, y_2, \ldots, y_k] = y_l(x) - \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{k} K_{lj}(x, \xi)\, y_i(\xi)\, d\xi = f_l(x) \quad (l = 1, 2, \ldots, k),$$

якщо вона має на інтервалі (a, b) єдиний розв'язок $y_1, y_2, \ldots, y_k(x)$.

Метод моментів Кравчука вміло поєднує спосіб варіаційного алгоритму та спосіб найменших квадратів, які спираються на принцип мінімуму, разом із безліччю їх варіантів в одному загальному принципі. Окрім того, очевидно, що він являє собою і пряме узагальнення відомого способу моментів.

У монографії міститься також багато оригінальних сміливих думок автора про діалектику розвитку наукової думки щодо варіаційного числення, стосовно застосування загальних досліджень та способів цієї праці до питань математичної статистики, зокрема, до задачі про криві розподілу тощо. Нарешті, він пише: «Потреби внутрішнього викінчення методу, нерозв'язані проблеми, що мають своє коріння в звичайному способі моментів; незакінчені питання, зв'язані з застосуванням мінімального принципу в задачах математичної фізики; математичний апарат статистичних теорій сучасної фізики; конкретне розроблення методу в технічних застосуваннях,— ось питання, що промовляють на користь дальшої роботи над обсягом, що його начеркнено в цій роботі».

До цієї серії питань відноситься і робота М. Кравчука «Про одну алгебраїчну задачу в проблемі моментів» [129], в якій одержано такі важливі результати:

якщо всі відповідні кристофелеві числа від першого до n-го порядку двох невід'ємних функцій $p(x)$ та $q(x)$ рівні, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x^k dx = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} q(ax + b)\, x^k dx \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n - 1),$$

де a, b — відповідним чином вибрані числа;

якщо всі відповідні кристофелеві числа функцій $p(x)$ та $q(x)$ попарно рівні, то існують такі числа a, b, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = |a| \int_{-\infty}^{-\infty} q(ax + b)\, dx$$

для всякого дійсного значення змінної x.

У праці [156] дано цікаве застосування методу моментів до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах.

Математична статистика та теорія ймовірностей

Вражає глибина та розмаїтість наукових інтересів М. Кравчука. Так, працюючи над теорією ймовірностей і матем тичною статистикою з 1925 р., він уже через кілька років отримав низку глибоких результатів, що стосуються теорії кореляції, нормального закону розподілу при двох змінних ознаках, подав цінні застосування методу моментів у математичній статистиці тощо [22, 33, 34, 47, 102 та ін.].

Аналізуючи задачу кореляції за допомогою способу найменших квадратів, М. Кравчук встановив критерій застосовності білінійної залежності для знаходження зв'язку між двома залежними ознаками. Щоб уникнути неозначеності в рівняннях лінійної регресії у випадку двох змінних та спростити розв'язання задачи лінійної кореляції довільного числа змінних, М. Кравчук приходить до постановки задачі на умовний екстремум та до симетричного критерію для міри скорельованості змінних. Вправно використавши косокутню систему координат, автор дає зручні графічні та механічні способи для дослідження статистичних розподілів за двома ознаками.

У 1929 р. М. Кравчук одержав фундаментальні результати з теорії імовірностей, пов'язані з біноміальним розподілом, а саме: ввів многочлени цього розподілу, відомі тепер у світовій літературі як многочлени Кравчука (див., приміром, Г. Бейтмен, А. Ердейи. Высшие трансцендентные функции.— М., Наука, 1966.— Т. 2.— С. 220—223). Можна процитувати більше сотні джерел із світової наукової літератури, починаючи з 1930 р. і по сьогодні, в яких многочлени Кравчука досліджувалися, узагальнювалися, вказувались різноманітні застосування, починаючи з теорії імовірностей і до теорії квантових алгебр, теорії спеціальних функцій тощо (див., приміром, статтю А. У. Клімика у цьому номері журналу). М. Кравчук за допомогою своїх многочленів довів нову інтерполяційну формулу та встановив скінченні розгорнення для деяких функцій, зокрема, для розподілу імовірностей у схемі неповернених куль [87, 111] та ін.

Многочлени Кравчука мають вигляд

$$k_n(x) = \frac{(-1)^n x!\,(N-x)!}{n!\,p^x q^{N-x}} \Delta^n \left[\frac{p^x q^{N-x+n}}{(x-n)!\,(N-x)!}\right],$$

де $n = 0, 1, \ldots, N$; $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, N — додатнє ціле число, функція стрибків

$$j(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x},$$

властивість ортогональності

$$\sum_{x=0}^{N} j(x)\, k_n(x)\, k_m(x) = \binom{N}{n} p^n q^n \delta_{mn}.$$

Многочлени Кравчука явно виражаються через гіпергеометричну функцію Гаусса:

$$k_n(x) = q^n \binom{x}{n} F\left(-n, x-N; x-n; -\frac{p}{q}\right).$$

Твірна функція для цих многочленів має вигляд

$$\sum_{n=0}^{N} k_n(x)\, z^n = (1+qz)^x (1-pz)^{N-x}.$$

Результати своєї праці [145] про деякі висновки з нерівності Лебега М. Кравчук не раз успішно застосовував, викристалізовуючи основні положення своєї узагальненої проблеми моментів. Зокрема, він встановив таку важливу нерівність:

$$\rho_{ni} < \frac{1}{n}(UM + B) \int_{\pi/(2n+1)}^{\pi/2} \omega(u)/u\,du,$$

де ω — модуль неперервності функції $p(x)$, U, B — абсолютні сталі, M — верхня межа модуля цієї функції, ρ_{ni} ($i = 1, 2, \ldots, n$) — кристофелеві числа n-ї квадратури типу Гаусса для невід'ємної характеристичної функції $\frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $p(x) < M$. А в роботі [167] М. Кравчук істотно узагальнює результати, викладені в [145], а саме: вказує точність визначення на даному скінченному інтервалі неозначеного інтегралу невід'ємної функції, що має перші n моментів однакові з відповідними моментами якоїсь іншої невід'ємної обмеженої функції. Якщо $p(x) \geqslant 0$, а $Q(x) \geqslant 0$ — неспадна та обмежена функція, причому функції справджують рівності

$$\int_{-a}^{+a} x^k \frac{dQ(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{-a}^{+a} x^k \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1),$$

інтеграли взято в розумінні Стільтьєса, то М. Кравчук встановлює нерівність, яка і дає обмеження для абсолютної величини різниці, тобто

$$\left| \int_{-a}^{x} \frac{dQ(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int_{-a}^{x} \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right| < \{M[p] + Ca_\varepsilon e^{2N/a}\} \frac{A + B \log N}{N} +$$

$$+ \varepsilon e^{2N/a} (D + E \log N),$$

де $M[p]$ — верхня межа функції $|p(x)|$ на $(-a, a)$; A, B, C, D, E — абсолютно сталі. Коли, наприклад, $a \backsim N$, $\varepsilon \backsim 1/N$, то модуль вказаної вище різниці буде меншим величини

$$\frac{U + \tilde{B} \log N}{N} \{M[p] + G_1\},$$

де U, $\tilde{B}$ — абсолютно сталі, G_1 — стала, тобто наближення функції

$$\int_{-a}^{x} \frac{dQ(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

функцією $\int_{-a}^{x} \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ буде порядку величини $\log N/N$ або й вищого.

Зауважимо, що в [149] М. Кравчук поширює свої ідеї, подані раніше в [145], для дослідження проблеми моментів у випадку нескінченного інтервалу. Фактично М. Кравчук вперше сформулював і сам розв'язав проблему моментів в апроксимаційному аспекті, а саме:

коли не всі, а тільки перші $2n$ моментів двох невід'ємних функцій рівні, то яка різниця між інтегралами від цих двох функцій, взятими в будь-яких однакових межах?

як зміниться ця апроксимація, коли збільшити інтервал, для якого розв'язується питання, або коли рівність перших моментів не точна, а наближена?

Роботи М. Кравчука [173, 170] містять конкретні результати з питань апроксимації в проблемі моментів, як для одновимірного випадку, так і для випадку будь-якого числа змінних.

Кілька окремих статей та заміток М. Кравчук присвятив доведенню різноманітних нерівностей для оцінки середніх похибок основних величин теорії кореляції без спеціальних обмежень на характер розподілу досліджуваних величин, доведенню формули Стірлінга тощо [102, 151, 145, 59 та ін.].

М. Кравчук одержав багато нових результатів в області інтерполяції та механічних квадратур, зокрема, повністю розв'язав питання про визначення механічної квадратури її коефіцієнтами та коефіцієнтами квадратур нижчих порядків. Лебединою піснею — останньою друкованою науковою працею М. Кравчука і була якраз студія з розподілу абсцис механічних квадратур гауссового типу [178]. Вона опублікована 1938 р. в Томську, коли авторові її вже прослався хресний шлях через Сибір на Колиму.

Неймовірна широчінь наукового кругозору, здібність аналізувати складні питання філософії, історії математики та методики її викладання, нові проблеми в суміжних до математики науках, зокрема у фізиці, біології, хімії тощо, особливо проявились у таких роботах М. Кравчука, як от: «Простір, час, матерія» [16], «Сучасний атомізм» [27], «Математична наука на Україні» [71], «Вплив Ейлера на дальший розвиток математики» [134], «Математика та математики в Київському університеті за сто років» [139], «Про розчинювання кришталів та кришталізацію» [26], «Про зростання організмів» [74], «Математика на службе народного хозяйства» [157], а також ряд інших.

М. Кравчук пропонував ще в 30-ті роки широко використовувати наближені обчислення як вихідну основу при опануванні деяких нових теоретичних понять (ірраціональні числа, логарифми, границі та ін.), сміливіше подавати учням наочно-графічні ілюстрації, наводити конкретні приклади та задачі. Він вважав, що і наближені обчислення торують шлях до засвоєння найглибших математичних ідей, тим-то вони повинні стати органічним елементом навчання ще в середній школі [159], зокрема, підкреслював, що саме наближене обчислення — це необхідна умова успішного сприйняття учнями складного поняття нескінченності і т. д.

Михайло Пилипович Кравчук був людиною неабиякої ерудиції та культури. Вільно володіючи кількома мовами (французькою, німецькою, італійською, польською та ін.), він підтримував наукові й особисті дружні зв'язки з відомими математиками світу, як от: Адамаром, Гільбертом, Курантом, Трікомі та ін. А свої наукові праці писав різними мовами, але найбільше — рідною мовою, і ця мова — добрий зразок українського науково-математичного стилю. Своїми працями та безпосередньою викладацькою роботою М. Кравчук відіграв значну роль у підвищенні науково-методичного рівня викладання математики в школах та вузах. Він був організатором першої математичної олімпіади учнів м. Києва (1935 р.).

Володіючи і непересічним педагогічним талантом, блискучим хистом пропагандиста наукових ідей, М. Кравчук організовує навколо себе групу молодих вчених, день у день запалює їх своїм творчим ентузіазмом, вміло керує їхньою науковою працею. Багато з його учнів пізніше стали відомими математиками.

Уже цей короткий огляд далеко не всіх наукових праць М. Кравчука переконливо засвідчує його унікальний математичний талант, велику ерудицію та різноманітні наукові інтереси. Він не лише ставить і розв'язує ті чи інші проблеми, але й вказує великі перспективні проблеми для майбутніх дослідників. Цікаво було б уважно простежити подальший розвиток розмаїтих наукових ідей М. Кравчука, одначе це вже тема для окремого дослідження, яке виходить за рамки даного стислого огляду.

ПОКАЖЧИК ПРАЦЬ М. КРАВЧУКА

У покажчику праці М. Кравчука розташовані по роках видань, в межах року — за абеткою по такій схемі: книжки та брошури, статті, мова — спочатку українська, а потім — інші. Всі роботи (за винятком тих, що позначені зірочкою) переглянуто de visu.

1914

1*. О группах перестановочных матриц // Сообщ. Харьк. мат. о-ва.— Сер. 2.— 14.— С. 169—176.

1917

2. Проєкт алгебричної термінології.— К. : Вид-во Тов-ва Шкільн. Освіти.— 8 с.
3. Проєкт геометричної термінології.— К. : Вид-во Тов-ва Шкільн. Освіти.— 15 с.

1919

4*. Геометрія. Курс лекцій в Українському народному університеті.— К., Літогр.

1923

5. Деякі уваги про розв'язання алгебричних рівнянь, основані лише на понятті незведимости / М. М. Крилов, М. П. Кравчук // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 1, вип. 2.— С. 62—72.

6. До теорії кривих четвертого ступеня // Наук. зап. Київ. н.-д. каф.— 1.— С. 76—84.
7. До теорії перемінних матиць // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 1, вип. 2.— С. 28—33.
8. Про одно перетворення квадратичних форм // Там же.— С. 87—90.

1924

9. Про квадратичні форми та лінійні перетворення // Тр. фіз.-мат. відділу УАН.— 1, вип. 3.— С. 1—91.
10. Довід теореми про суцільність коренів алгебричного рівняння // Наук. зап. Київ. н.-д. каф.— 1, вип. 2.— С. 71—81.
11. До загальної теорії білінійних форм // Изв. КПИ и Киев. с.-х. ин-та.— 1, вып. 1.— С. 72—80.
12. Замітка про рівняння Briot та Bouquet // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту.— 1.— С. 101—103.
13. Новий довід одної теореми Міньковського // Наук. зап. Київ. н.-д. каф.— 1, вип. 2.— С. 66—70.
14. Про алгебричну теорему додавання // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту.— 1.— С. 104—106.
15. Про одиниці поля $R(\sqrt[3]{\rho})$ // Изв. КПИ и с.-х. ин-тов.— Кн. 1, вып. 1.— С. 17—18.
16. Простір, час, матерія (до теорії релятивности) // Червоний Шлях. — № 4—5.— С. 226—244.
17. Démonstration du théorème fondamentale d'algebre // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 1.— S. 28—29.
18. Note sur la longueur de la circomf'erence en géometrie // Ibid.— S. 28—29.
19.* Note sur l'interpolation géneralisse//University of Toronto Press, Italy, Toronto (доповідь на Всесвітньому конгресі математиків у Toronto).

1925

20*. Математика для сільсько-господарських профшкіл / М. П. Кравчук, І. П. Білик.
21. Доказ основної теореми альгебри//Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ.— 23, 24.— С. 49—52.
22. До теорії кореляції // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту.— 3.— С. 43—47.
23. Замітка про обвід кола в неевклідовій геометрії // Зб. мат.- природопис.- лікар. секції НТШ.— 23, 24.— С. 53—54.
24. Інтерполяція та деякі питання з теорії функцій дійсного змінного. I // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 1, вип. 3.— С. 70—74.
25. Інтерполяція та деякі питання з функцій дійсного змінного. II // Там же.— С. 74—82.
26. Про розчинювання кришталів та кришталізацію // Зап. н.-и. каф. технол. с.-х. пр-ва при КПИ.— С. 222—225.
27. Сучасний атомізм // Червоний Шлях.— № 6—7.— С. 194—223.

1926

28. Zur Theorie der Determinanten // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 2, вип. 1.— С. 77—80.
29. До теорії функцій дійсного змінного // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти.— 1.— С. 94—100.
30. Замітка про обвід кола в неевклідовій геометрії // Зап. Київ. с-г. ін-ту.— 1.— С. 74—75.
31. Перемінні множини лінійних перетворень // Там же.— С. 25—51.
32. Про Green, ове та Stokes, ове перетворення // Зб. мат.- природопис.- лікар. секції НТШ.— 25.— С. 82—92.
33. Про кореляцію // Зап. Київ. Вет.-Зоотехн. ін-ту.— 4.— С. 43—60.
34. Про нормальний закон розподілу при двох змінних ознаках / М. П. Кравчук, А. А. Оконенко // Зап. Київ. с.-г. ін-ту.— 1.— С. 95—99.
35. Про остачу Lagrange,ового ряду // Зб. мат.-природопис.- лікар. секції НТШ.— 25.— С. 46—48.
36. Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтерполяції диференціяльних рівнянь // Тр. фіз.-мат. відділу УАН.— 5, вип. 2.— С. 12—33.
37. Про суцільність коренів цілої трансцендентної функції // Вісти КПІ.— Кн. 1.— С. 63—64.
38. Über die partielle Integration // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 2, вип. 1.— С. 77—80.
39. Програми з курсу «Елементи вищої математики в пристосуванні до сільського господарства» // Програми сільсько-господарських технікумів рільничного типу.— К.: Вид-во НКО.— Ч. 1.
40. Програми з математики // Програми сільсько-господарських профшкіл рослинознавства.— К. : Вид-во НКО.
41. Note sur la distribution des racines des polynómes derives // L'Ens. Math.— 25, N 3.— P. 74—77.
42. Note sur les déterminants // Ibid.— P. 72—74.
43*. Note sur le reste d'une série de Lagrange // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Šečt. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 4.— P. 6.

44. Sur la méthode de N. Kryloff pour l'integration approchée des équations de la physique mathématique // C. r. Acad. sci.— **183**, N 9.— P. 474—476.
45. Über die Sätze von Green und Stokes // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 4.— P. 10—11.
46. Über mengen vertauschbarer natrizen // Зап. Київ. с.-г. ін-ту.— **2**.— С. 80—82.

1927

47. До способу моментів у математичній статистиці // Зап. Київ. с.-г. ін-ту.— **2**.— С. 83—95.
48. Замітка з приводу теореми Cauchy // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— **2**, вип. 2.— С. 33—36.
49. Замітка про спосіб М. Крилова для наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь математичної фізики // Там же.— С. 5—8.
50. Замітка про Taylor'ову формулу // Там же.— С. 1—14.
51.* Праці кафедри математики та варіаційної статистики за 1923—1927 р. //Зап. Київ. с.-г. ін-ту. — **3**.
52. Про деякі перетворення кратних інтегралів // Там же.— С. 77—88.
53. Про умови існування похідних у функцій дійсного змінного // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ.— **26**.— С. 85—96.
54. Про одну Hermite'ову формулу // Зап. Київ. с.-г. ін-ту.— **2**.— С. 80—82.
55. Про ортогональні перетворення/М. Кравчук, О. Смогоржевський // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти.— Кн. 2.— С. 151—156.
56. Про спосіб найменших квадратів та спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ.— С. 11—18.
57. Про похідні від наближених інтегралів деяких диференціяльних рівнянь // Там же.— С. 3—10.
58. Розподіл первісних чисел по підставленнях групи алгебричного рівняння /Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— **2**, вип. 2.— С. 25—32.
59. Формула Стірлінга / М. Кравчук, В. Левицький // Зап. Київ. с.- г. ін-ту.— **2**.— С. 89—90.
60. Sopra un teorema generale di Kronecker // Bolletino del l'Unione Mathematica Italiana. — **6**.— P. 12—15.
61*. Sur la distribution des nombres premiers // C. r. Acad. sci.—**183**.
62. Sur l'existence des dérivées superieures // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect.— H. 8.— P. 12—16.
63. Sur les fonctions analytiques à singularit'es réeles // C. r. Acad. sci.— **185**.— P. 1106—1109.
64. Sur les poèles des fonctions analytiques // Ibid.— P. 336—339.
65. Sur les pòeles des fonctions méremorphes // Ibid.— P. 178—180.
66*. Über die Existenz der Differentialquotienten höherer Ordnung//Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.—H. 7.— P. 5.
67. Über vertauschbare Matrizen // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.— **51**, N 2.— p. 126—130.

1928

68. Замітка про існування кореня в алгебричного рівняння // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти.— № 1.— С. 36—38.
69. Замітка про контурні інтеграли // Зб. мат.-природопис.- лікар. секції НТШ.— **27**.— С. 129—131.
70. Математика (бібліографічний огляд) // Україна.— № 6.— С. 97—99.
71. Математична наука на Україні (за десятиріччя 1918—1928)//Українські вісті.— Париж.— № 76.
72. Нотатки з подорожі // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти.— № 2.— С. 3—6.
73. Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів // Зб. мат.-природопис.-лікар. секції НТШ.— **27**.— С. 115—128.
74. Про зростання організмів // Зап. Київ. Ін-ту Нар. Освіти.— № 1.— С. 36—38.
75*. Sur l'integration approchée des equations differentielles lineáres //Atti dell Congresso Internationale dei Matematici.— Bologna.— **6**.
76. Sur la convergence des certaines continues fractions//Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 9.— P. 11—12.
77*. Sur la convergence de quelques procédes de l'integration approchée des équations differentielles // C. r. Acad. sci.— **187**.
78*. Šur une application du theorème de Sturm//Bulletin Société Mathematique de France,

1929

79. Алгебричні студії над аналітичними функціями // Тр. фіз.-мат. відділу ВУАН.— **12**, вип. 1.— С. 3—34.
80. Звідомлення з поїздки на Всесвітній Математичний Конгрес у Больонії та у Парижі.— Львів : Вид-во НТШ.— 13 с.
81. Про застосування способу моментів до наближеного розв'язання інтегральних та диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ.— Кн. 2.— С. 93—108.

√ 82. Про інтерполяцію з допомогою ортогональних многочлен ів // Зап. Київ. с.-г. ін-ту.— 4.— С. 21—28.
83. Промова на врочистому засіданні Київської міської ради 6.XI.1929 року // Вісті ВУАН.— № 9—10.— С. 22—24.
84. Про наближене розв'язання лінійних диференціяльних рівнань // Зап. Харк. Мат. тов-ва та Укр. ін-ту мат. наук.— Сер. 4.— 3.— С. 57—74.
85. Про наближене розв'язання лінійних задач математичної фізики//Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— 4, вип. 4.— С. 179—191.
86. Про наближене розв'язання рівнань // Зап. Київ. с.-г. Ін-ту.— 4.— С. 21—28.
√ 87. Sur un generalization des polynomes d'Hermite // C. r. Acad. sci.— 189, N 17.— P. 620—622.
88*. Sur la méthode de Laguerre pour la rèsolution approchée des équations // Stiz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko — Ges. Wiss.— H. 11.— P. 6.
89*. Sur la méthode de W. Ritz pour l'integration approchée des equations differentielles// Bolletin Matematico Buenos Aires.— 10.
90. Sur un problème de minimum // Sitz. Cath. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 10.— P. 5—8.
91. Sur la recherche des nombres caractéristiques et des fonctions fondamentales // C. r. Acad. sci.— 189.— P. 519—522.
92. Sur la résolution approchée des équations differentielles lineaires // Ibid.— P. 439—441.
93. Sur la résolution approchée des équations integrales lineaires // Ibid.— 188.— P. 978—980.
94. Sur la résolution des systémes des equations integrales lineaires // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl. Sect. Ševčenko.— Ges. Wiss.— H. 11.— P. 9—11.
95. Sur un théoreme de Laguerre // C. r. Acad. sci.— 188.— P. 299—301.

1930

√ 96. Замітка про ортогональні перетворення // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— 4, вип. 5.— С. 311—313.
97. Кілька висновків з Bessel' евої та Hadamard'ової нерівностей // Там же.— С. 249—267.
98. Про розв'язання систем лінійних диференціяльних рівнянь // Вісті КПІ.— 22, вип. 1.— С. 23—36.
99. Уваги до Laquerre'ового способу наближеного розв'язання рівнянь//Зб. мат.-природопис.- лікар. секції НТШ.— 28, 29.— С. 27—33.
100. Заключне слово на засіданні колективу ВУАН з приводу справи СВУ // Вісті ВУАН.— Рік 3, № 2.— С. 29.
101. Sur les dérivées des integrales approchées de certaines équations differentielles //Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.— 54.— P. 194—198.

1931

102. Замітка про похибки суцільної інтерполяції дискретних імовірносних розподілів // Журн. мат. циклу ВУАН.— № 4.— С. 3—4.
103. Рецензія на працю акад. М. Крилова «Методи наближеного і символічного розв'язання диференціяльних рівнянь математичної фізики й техніки»// Там же.— № 2—3.— С. 89—90.
104. Про існування та наближене визначення розв'язок деяких лінійних рівнянь із частинними похідними // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 5.— С. 49—60.
105. Про існування та наближене визначення розв'язок деяких лінійних рівнянь із частинними похідними // Зап. природн.- техн. відділу ВУАН.— № 1.— С. 45—89.
106. Про наближення інтегралів рівнянь з частинними похідними еліптичного типу // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 5.— С. 9—18.
107. Про незводність деяких многочленів // Журн. мат. циклу ВУАН.— № 1.— С. 29—36.
108. Про обрамлені визначники // Там же.— № 4.— С. 5—13.
109. Про одно взагальнення Hadamard'ової нерівности // Зап. природ.- техн. відділу ВУАН.— № 1.— С. 90—95.
110. Про одну нерівність // Там же.— С. 96—101.
√ 111. Про ортогональні многочлени, зв'язані зі схемами повернених та неповернених куль // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— 5.— С. 19—48.
√ 112. Про унітарні та ортогональні перетворення / М. Кравчук, О. Смогоржевський / Журн. мат. циклу УАН.— № 2—3.— С. 3—41.
113. Виступ акад. М. Кравчука на сесії Ради ВУАН 15.07.30 р. (Протоколи Ради ВУАН)// Вісті ВУАН.— № 3.— С. 25—26.
114. Note sur les déterminants // Sitz. Math. Naturwiss. Ärtzl., Sect. Šečvenko.— Ges. Wiss.— H. 15.— P. 5—7.

1932

115. Вступ до вищої математики / М. Кравчук, Г. Дрінфельд // Вид-во ВУАН.— 195 с.
116. Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціяльних та інтегральних рівнянь // Зап. природн.-техн. відділу ВУАН.— 7.— С. 1—168.

117. Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціяльних рівнянь // Журн. мат. циклу ВУАН.— № 1.— С. 7—31.
118. Кінцеве слово акад. М. Кравчука на сесії ради ВУАН // Вісті ВУАН.— Рік 5, № 1.— С. 48—49.
119*. Sur le probléme des moments // Verhandl. des Intern. Math. Kongr., Zürich.— 2.

1933

120. Вибрані питання з основ аналізи нескінченно малих / М. Кравчук, Д. Тополянський.— К. : Вид-во ВУАН.— 84 с.
121. Елементи теорії визначників / М. Кравчук, Г. Дрінфельд.— К. : Вид-во ВУАН.— 64 с.
122. Нові результати в способі моментів // Журн. мат. циклу ВУАН.— 1, № 1.— С. 3—20.
123. Про задачу моментів // Там же.— С. 21—39.
124*. Sur l'approximation des intégrales des équations differentielles lineaires // Зап. Харьк. мат. о-ва.— Сер. 4, 6.— С. 1—18.
125. Sur la distribution des racines de polynómes orthogonaux // C. r. Acad. sci.— 196.— P. 739—741.

1934

126*. Вища математика. Посібн. для студ. та самоосвіти у трьох частинах. Ч. I./ М. П. Кравчук, Касяненко, В. І. Можар, О. С. Смогоржевський.— К. : Вид-во ВУАН.— 407 с.
127. Диференціальні рівняння та їх застосування / М. Кравчук, В. Можар.— К. : Вид-во ВУАН.— 184 с.
128. Принцип середнього арифметичного і спосіб найменших квадратів // Журн. Ін-ту математики ВУАН.— № 2.— С. 65—86.
129. Про одну алгебричну задачу в проблемі моментів // Там же.— С. 87—92.
130*. Про одне трансцендентне рівняння // Тр. Киев. Авиац. Ин-та.— 3.
131. Про точність наближення способом моментів розв'язок лінійних диференціальних рівнянь // Журн. І-ту математики ВУАН.— № 2.— С. 23—64.
132. З поточної роботи Інституту математики ВУАН // Вісті ВУАН.— № 6—7.— С. 18—19.
133. Науковці вирушили в похід ім. XVII партз'їзду / М. П. Кравчук, Ю. В. Пфейфер//За комуністичні кадри.— 17 січня.

1935

134. Вплив Ейлера на дальший розвиток математики.— К. : Вид-во ВУАН.— 46 с.
135. Академік Ю. В. Пфейфер (з нагоди 35-ліття науково-педагогічної діяльності)/Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, Г. Дрінфельд, проф. Є. Ремез// Вісні УАН.— № 5.— С. 63—68.
136. Б. Я. Букреєв (з нагоди 50-ліття науково-педагогічної діяльності)/Акад. М. Крилов, акад. М. Кравчук, акад. Ю. Пфейфер, Б. Рибаков // Там же.— С. 67—72.
137. Замітка про Fourier'ів інтеграл / М. Кравчук, Д. Тополянський // Наук. зап. КДУ. Мат. зб.— 1, вип. 1.— С. 42—44.
138. Із роботи сектору математичної статистики УАН // Вісті УАН.— № 8—10.— С. 145—150.
139. Математика та математики в Київському університеті за сто років // Розвиток науки в Київському університеті за сто років.— К. : Вид-во КДУ.— С. 34—69.
140. Об одной алгебраической задаче в проблеме моментов // Докл. АН СССР.— 2, № 2.— С. 89—93.
141. Общая характеристика научных школ, существующих в ВУАН и Киевском университете // Тр. II Всесоюзн. мат. съезда (Л., 24—30 июня 1934 г.) — Л., М. : Изд-во АН СССР.— С. 48—50.
142. Одно обобщение приближения функций полиномами // Там же.— 2.— С. 180—183.
143. О структуре перестановочних групп матриц // Там же.— С. 11—12.
144. Півстоліття науково-педагогічної діяльності акад. Д. О. Граве / Акад. М. Кравчук, акад. М. Крилов, акад. Ю. Пфейфер, проф. І. Штаерман // Вісті УАН.— № 5.— С. 59—64.
145. Про деякі висновки з нерівності Lebesgue'a // Журн. Ін-ту математики УАН.— № 1. — С. 31—42.
146. Про задачу моментів // Там же.— № 2.— С. 13—34.
147. Про наближення многочленами функцій двох змінних в опуклих многокутних обсягах при певних умовах на межах тих обсягів // Журн. Ін-ту математики ВУАН.— С. 99—119.
148. Про одно узагальнення способу моментів у задачі наближеної інтеграції звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Там же.— № 3—4.— С. 77—98.
149. Про одну нерівність у проблемі моментів // Журн. Інту математики УАН.— № 1.— С. 35—43.
150. Про оцінку похибок у лінійній задачі способу найменших квадратів // Наук. зап. КДУ. Мат. зб.— 1, вип. 1.— С. 26—41.

151. Про середні похибки коефіцієнтів кореляції і регресії // Журн. Ін-ту математики ВУАН.— 1.— С. 121—131.
152. Про Hermite'ову формулу механічних квадратур / М. Кравчук, С. Мовшиць // Наук. зап. КДУ. Мат. зб.— 1, вип. 1.— С. 171—177.
153. Sur quelques inégalités dans le probléme des moments // C. r. Acad. sci.— 200.— P. 1567—1569.
154. Два ювілея / М. Кравчук, І. Штаєрман, Г. Дрінфельд, С. Мовшиць та ін.// За комуністичні кадри.— 25 травня.

1936

155. Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнань.— К. : Вид-во УАН, 1935.— 212 с. (Фактично книга за вихідними даними вийшла в 1936 р.).
Як «додаток» до книги вміщено 2 статті:
а) Деякі узагальнення при доборі операторів у застосуванні способу моментів до рівнянь з частинними похідними.— С. 165—168.
б) Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціальних рівнянь.— С. 169—189.
156. Застосування способу моментів для рівнянь з частинними похідними / М. Кравчук, К. Латишева // Журн. Ін-ту математики АН УРСР.— № 1.— С. 3—22.
157*. Математика на службе народного хозяйства // Научн. и метод. работа каф. математики Киев. индустр. ин-та.
158. Методична замітка про інтегрування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / М. Кравчук, М. Файн // Тр. Киев. Авиац. ин-та.— № 5.— С. 5—11.
159. Наближені обчислення в середній школі // Комун. освіта.— № 9.— С. 26—35.
160. Новий метод викладання логарифмів в середній школі / М. Кравчук, Б. Малінова // Там же.— № 1—2.— С. 96—104.
161. Об эквивалентности особенных пучков матриц / М. П. Кравчук, Я. С. Гольдбаум / Тр. Киев. Авиац. ин-та.— № 6.— С. 5—27.
162*. Применение способа моментов для приближенного решения дифференциальных уравнений / М. П. Кравчук, Д. Б. Тополянский // Там же.— № 7.
163. Применение способа моментов к приближенному решению линейных дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах / П. М. Кравчук, К. Я. Латышева // Докл. АН СССР.— 1, № 6.— С. 251—254.
164. Про групи комутативних матриць /М. Кравчук, Я. Гольдбаум // Тр. Киев. Авиац. ин-та.— № 5.— С. 12—23.
165. Про еквівалентність пар білінійних форм / М. Кравчук, Ю. Гроссберг // Наук. зап. КДУ. Фіз.-мат. зб.— 2, № 3.— С. 13—26.
166. Про збіжність способу моментів для рівнянь з частинними похідними // Журн. Ін-ту математики АН УРСР.— № 1.— С. 23—28.
167. Про узагальнену проблему моментів // Там же.— № 4.— С. 3—9.
168. Спосіб моментів у застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь з правильними інтегралами // Вісті Акад. наук УРСР.— № 5—6.— С. 291—298.
169. Частота, імовірність та закон великого числа // Наук. зап. КДУ. Фіз.-мат. зб.— 2, № 3.— С. 13—26.

1937

170. Об аппроксимациях в проблеме моментов для функций двух переменных // Докл. АН СССР.— 17, № 6.— С. 279—281.
171. Об одном трансцендентном уравнении // Сб. н.-и. работ Киев. индустр. ин-та.— 2.— С. 51—55.
172. О критерии линейной зависимости функций / М. Кравчук, М. Гордон // Там же.— С. 45—50.
173. О некоторых аппроксимациях в обобщенной проблеме моментов // Докл. АН СССР.— 14, № 3.— С. 91—94.
174. О работах Института математики Академии наук УССР // Успехи мат. наук.— 1937.— Вып. 3.— С. 249—251.
175. Про узагальнену проблему моментів // Вісті АН УРСР.— № 2—3.— С. 55—66.
176. Теорія подібності в середній школі // Комуністична освіта.— № 1.— С. 76—80.
177. До виходу з друку математичного збірника // За коммуністичні кадри.— 29 травня.

1938

178. О распределении абсцисс механических квадратур гауссова типа // Изв. н.-и. Ин-та математики и механики при Том. ун-те.— 2, вып. 1.— С. 57—62.

Одержано 11.02.92