УДК 517.58

Г. И. Иризва, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

Ортогональні многочлени Кравчука

Наведено огляд основних результатів акад. М. П. Кравчука і його учнів у галузі ортогональних многочленів дискретної змінної. Відмічено їх значення для подальшого розвитку теорії, узагальнень і різних застосувань вказаного класу спеціальних функцій.

Дан обзор основных результатов акад. М. Ф. Кравчука и его учеников в области ортогональных многочленов дискретной переменной. Отмечено их значение для дальнейшего развития теории, обобщений и различных приложений указанного класса специальных функций.

Ім'я видатного українського вченого-математика М. П. Кравчука назавжди залишиться в світовій математичній літературі. Воно увічнене названим на його честь класом ортогональних многочленів (поліномів) дискретної змінної.

У даній статті зроблено спробу науково-історичного осмислення саме тієї грані творчості М. П. Кравчука, що відноситься до відкриття та дослідження так званих многочленів Кравчука. Аналізується доробок наукової школи М. П. Кравчука щодо цієї тематики, простежується подальший шлях деяких досліджень у галузі ортогональних многочленів дискретної змінної і їх різноманітних застосувань.

Слід відмітити, що публікації періоду 1929—1931 рр., які містять основні результати щодо вказаних вище многочленів, вже давно стали майже недоступними для ознайомлення в оригіналі.

В 1921—1929 рр. М. П. Кравчук працював на посаді професора, «керівника катедри математики та варіяційної статистики» Київського сільсько-господарського інституту. Тут видавався науковий журнал «Записки КСГІ», членом редакційної колегії якого був проф. М. П. Кравчук. Саме до цього журналу 29 грудня 1928 р. надійшла наукова праця вченого «Про інтерполяцію з допомогою ортогональних многочленів» [1]. Стаття складається з невеликої передмови, чотирьох параграфів і резюме французькою мовою.

У передмові вказується, що «П. Чебишов кількома нападами розбирав задачу параболічної інтерполяції способом найменших квадратів із допомогою ортогональних многочленів. Джерелом його дослідів була теорія алгебричних ступанкових дробів. Свої загальні формули він особливо пристосував до практичних рахунків у частиннім випадку, коли всі дані вартості інтерпольованої функції мають однакову вагу і є рівновіддалені».

Як відомо, П. Л. Чебишов з метою полегшення обробки результатів артилерійських стрільб методом найменших квадратів і складанням відповідних таблиць стрільб ввів до розгляду так звані поліноми Чебишова дискретної змінної. У статті [1], як підкреслює М. П. Кравчук, «коротко подано висліди Чебишова незалежно від теорії ступанкових дробів і докладніше розглянено згаданий частинний випадок». Саме цей підхід «привів Чебишова до взагальнення Legendre'ових многочленів».

Другий випадок, «коли вага даних вартостей інтерпольованої функції зміняється згідно з законом біноміяльного розподілу ймовірностей», «дає взагальнення многочленів Hermite'овиx». Саме цей випадок і приводить до нових класичних ортогональних многочленів дискретної змінної — многочленів Кравчука.

Стаття [1] містить шість посилань на роботи П. Л. Чебишова [2, 3] і поза всякими сумнівами написана саме під впливом праць цього великого математика.

Розглянемо більш докладно основні результати роботи [1]. § 1 містить загальну постановку задачі. Ось її фрагмент: «Нехай дано якісь вартості незалежного змінного $x: x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, що між ними нема рівних, та відповідні вартості функції $y: y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Сучинники A_m наближеної рівності

$$y \approx A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + \ldots + A_k\psi_k(x) \quad (k < n), \tag{1}$$

де $\psi_m(x)$ є многочлен m-го ступеня, визначаємо вимогою

$$J_k^2 = \sum_{i=0}^{n-1} p_i [y_i - A_0\psi_0(x_i) - A_1\psi_1(x_i) - \ldots - A_k\psi_k(x_i)]^2 = \min, \tag{2}$$

а функції $\psi_m(x)$ — умовами ортогональности

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i\psi_l(x_i)\,\psi_m(x_i) = 0 \quad (l \neq m) \tag{3}$$

та нормальности

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i\psi_m^2(x_i) = 1, \tag{4}$$

де $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i = 1$».

Традиційні процеси знаходження функцій $\psi_m(x)$, коефіцієнтів A_m, аналіз формули (1) і середньої квадратичної похибки подані у § 2. Результати сформульовано у формі визначників.

У § 3 автор докладніше розглядає той простий випадок, коли $p_0 = p_1 = \ldots = p_{n-1} = \frac{1}{n}$ і всі інтервали $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ теж рівні, причому $x_0 = 0$, $\Delta x_i = 1$. Показано, що

$$\psi_m(x) = c_m\Delta^m[x(x-1)\ldots(x-m+1)(x-n)(x-n-1)\ldots(x-n-m+1)], \tag{5}$$

де c_m знаходяться із співвідношення

$$1 = \frac{1}{n}\, c_m^2\, \frac{(m!)^2\, n\,(n^2-1)(n^2-4)\ldots(n^2-m^2)}{2m+1}. \tag{6}$$

«Отож формула (1) у цьому випадку виглядатиме так:

$$y \approx \sum_{m=0}^{k} \frac{(2m+1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}(i+1)\ldots(i+m)(n-1+i)\ldots(n-m-i)}{(m!)^2 n\,(n^2-1)(n^2-4)\ldots(n^2-m^2)} \times$$
$$\times \Delta^m y_i \Delta^m [x(x-1)\ldots(x-m+1)(x-n)(x-n-1)\ldots(x-n-m+1)]. \tag{7}$$

Виписана середня квадратична похибка такого наближення.

Зазначимо, що формули (5), (6) повністю визначають поліноми Чебишова дискретної змінної. Далі, «впровадивши зазначення $\frac{x}{n} = t$, $\frac{1}{n} = dt\ (n \to \infty)$», автор дістає з них «вираз: $\frac{\sqrt{2m+1}}{m!}\,\frac{d^m}{dt^m}\,t^m(1-t)^m$, тобто Legendre'ів многочлен».

Основний оригінальний результат міститься у § 4. М. П. Кравчук зазначає:

«Нехай буде знов $x_0 = 0$, $\Delta x_i = 1$, але візьмімо

$$p_x = p(x) = \binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-x)}{1\cdot 2\ldots x}\, p^x q^{n-1-x}, \tag{8}$$

де $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$.

При тім уважатимемо, що $\binom{k}{l} = 0$ для $l < 0,\ l > k$.

Цей випадок має особливе значіння для математичної статистики».

Встановлюється, що

$$\psi_m(x) = c_m \Delta^m \left[\binom{n-m-1}{x-m} p^{x-m} q^{n-x-1}\right] : \left[\binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x}\right], \qquad (9)$$

де

$$c_m^2 = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{m!} (pq)^m. \qquad (10)$$

«Отже інтерполяційна формула (1) у цьому випадку виглядає так:

$$y \approx \sum_{m=0}^{k} \left[\binom{n-1}{m} (-pq)^m \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-m-1}{i-m} p^{i-m} q^{n-i-1} \Delta^m y_{i-m}\right] \times$$

$$\times \frac{\Delta^m \left[\binom{n-m-1}{x-m} p^{x-m} q^{n-1-x}\right]}{\binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x}}, \qquad (11)$$

а її середня квадратична похибка так:

$$J_k = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i q^{n-1-i} y_i^2 \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1}{m} (pq)^m \times}$$

$$\overline{\times \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-m-1}{i-m} p^{i-m} q^{n-i-1} \Delta^m y_{i-m}\right]^2}. \qquad (12)$$

Далі, «впровадивши замість змінного x змінне t через рівність $x - np = t\sqrt{npq}$ і взявши $dt = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ $(n \to \infty)$» автор одержує «по граничнім переході:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \psi_m = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{m!}} \frac{d^m}{dt^m} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

отже, многочлени (9) є взагальнення т. зв. Hermite'ових многочленів».

Многочлени (9), де c_m задаються шляхом (10), і являють собою систему знаменитих ортогональних многочленів Кравчука, яка задовольняє умови

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x} \psi_l(x) \psi_m(x) = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ 1 & (l = m) \end{cases}. \qquad (13)$$

У 1926—1929 рр. в одному з найбільш престижних математичних журналів світу — журналі Паризької Академії наук «Comptes Rendus» — вийшло 11 робіт М. П. Кравчука. Серед них чільне місце посідає стаття «Про узагальнення поліномів Ерміта» [4], написана французькою мовою. Вона представлена 23 вересня 1929 року видатним французьким математиком, директором інституту ім. Анрі Пуанкаре, членом Паризької Академії наук Емілем Борелем.

У стислій формі без доведень тут подано основні результати щодо поліномів (9), встановлені в [1]. Цікаво відмітити, що поряд з формулою (9) наведена ще одна

$$\psi_m(x) = \psi_m(x, n; p, q) =$$

$$= \sqrt{\binom{n-1}{m}^{-1}(pq)^{-m}}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n-x-1}{m-i}\binom{x}{i}p^{m-i}q^i. \qquad (14)$$

Аналізуючи граничну поведінку многочленів (14) при $n \to \infty$, автор пропонує тут іншу заміну змінної x, впроваджуючи замість неї нову змінну t за формулою $x = p(n-1) + t\sqrt{2qp(n-1)}$. Як і раніше, при граничному переході з'являються многочлени Ерміта

$$\text{const} \cdot e^{t^2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2}.$$

Новою, порівнюючи з [1], є формула, яка вказує на граничну поведінку многочленів (14) при $n \to \infty$, якщо $p(n-1) = a$. Виявляється, що при такому граничному переході з'являються многочлени

$$\text{const} \cdot \frac{x!}{a^x} \Delta^m \left[\frac{a^{x-m}}{(x-m)!}\right]. \qquad (15)$$

Принагідно відзначимо, що многочлени (15) також відносяться до класичних ортогональних поліномів дискретної змінної. Вони були вперше введені до розгляду ще в 1905 р. відомим шведським математиком C. Charlier [5] і названі многочленами Шарльє. В роботі М. П. Кравчука [1] цей граничний випадок зовсім не згадується. Тут же ці многочлени наведено ще без будь-яких посилань на першоджерела. Трохи випереджуючи події вкажемо, що в роботі [6] М. П. Кравчук вже детально аналізує «так званий Poisson'ів розподіл імовірностей $\frac{e^{-a}a^x}{x!}$» як граничний для Bernoulli'євої схеми і доводить, що «коли за характеристичну функцію взяти цей вираз», то ортогональними щодо неї будуть саме многочлени (15), посилаючись при цьому на їх «відомий вигляд», наведений у монографії [7], автор якої, до речі, і сам звертався до вивчення ортогональних многочленів дискретної змінної [8].

У [4] встановлені також формули для обчислення так званих неповних узагальнених і факторіальних моментів k-го порядку біноміального розподілу ймовірностей $P(x, n; p, q) = \binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x}$. Подається цікаве співвідношення, пов'язане з розвиненням цього розподілу за многочленами (14).

З 1929 р. М. П. Кравчук зосереджує свою наукову і науково-організаторську роботу у ВУАН. Він — вчений секретар фізико-математичного відділу Академії наук. Про надзвичайно активну творчу працю академіка свідчить хоча б такий факт: протягом 1930 р. М. П. Кравчук чотири рази виступав з науковими доповідями на засіданнях фізико-математичного відділу ВУАН.

21 лютого 1930 р. він зробив наукову доповідь «Про ортогональні многочлени, зв'язані із схемами повернених та неповернених куль». Стаття [6], опублікована у 1931 р. в «Записках фіз.-мат. відділу ВУАН»,—повний і детальний виклад цієї доповіді. Вона складається з восьми параграфів і великого резюме французькою мовою.

В § 1 в скороченій формі викладені основні, встановлені в [1, 4], формули для многочленів (9) або (14). Йдеться про їх граничні випадки та рекурентні залежності між трьома сусідніми многочленами $\psi_m(x)$.

В § 2 детально досліджується явний вигляд многочленів (9). Для їх подання у формі

$$\psi_m(x, n; p, q) = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)}(n)[p(n-1)x]^k}{\sqrt{1 \cdot 2 \ldots m(pq)^m(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}} \qquad (16)$$

встановлено алгоритм знаходження «сучинників $a_k^{(m)}(n)$». Крім представлення (16), автора «цікавить і завдача обернена. Ясно, що існує рівність:

$$[p(n-1)-x]^m = \sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)}(n)\,\theta_i, \tag{17}$$

де $\theta_i = \sqrt{1\cdot 2 \ldots i\,(pq)^i (n-1)(n-2)\ldots(n-i)}\ \psi_i(x, n; p, q)$.» Також встановлено алгоритм знаходження чисел $b_i^{(m)}(n)$.

Про деякі характеристики біноміального розподілу $P(x, n; p, q)$, що виникає у схемі повернених куль (Bernoulli'євій схемі), йдеться в §§ 3—4. Це

$$R_m(x, n) = \sum_{i=0}^{x-1} P(i, n; p, q)\,[p(n-1)-x]^m \tag{18}$$

—«неповний m-й центральний момент»;

$$\rho_m(x, n) = \sum_{i=0}^{x-1} P(i, n; p, q)\,\psi_m(i, n; p, q) \tag{19}$$

— «неповний m-й узагальнений момент»;

$$S_{a|m}(n) = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{x-a}{m} P(x, n; p, q) \tag{20}$$

— «повний факторіяльний момент щодо точки a»;

$$t_{ab|mn}(u) = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{x-a}{m}\binom{b-x}{n} P(x, u; p, q) \tag{21}$$

—« повний (m, n)-й мішаний факторіяльний момент щодо точок a і b».

Моменти типу (21) застосовуються в § 5 при дослідженні розвинення розподілу $P(x, n; p, q)$ за многочленами (9).

Аналізу Pearson'ової функції розподілу, що виникає у схемі неповернених куль,

$$Q(x, u; n, v) = \binom{u-1}{x}\binom{n-u}{v-x} : \binom{n-1}{v}, \tag{22}$$

присвячений § 6. Вивчається відповідний «узагальнений момент» типу (19).

В явному вигляді обчислені «середнє арифметичне M» та «середній квадратичний відхил σ розподілу» (22):

$$M = \frac{v}{n-1}(u-1),\ \sigma = \sqrt{\frac{v}{n-1}\left(1-\frac{v}{n-1}\right)(u-1)\left(1-\frac{u-2}{n-2}\right)}.$$

Показано, як можна «вирахувати й дальші центральні моменти» цього розподілу.

Цікавим є таке «розвинення»:

$$Q(x, u; n, v) = P(x, u; p, q) \sum_{m=0}^{u-1} \sqrt{\frac{\binom{u-1}{m}}{\binom{n-1}{m}}}\ \psi_m(v, n; p, q)\,\psi_m(x, u; p, q), \tag{23}$$

«правдиве для $x = 0, 1, \ldots, u-1$ та для довільного p».

Більш «докладніший розбір розвинення» (23) зроблено в § 7. Вивчено питання про те, «наскільки точно Pearson'ову функцію розподілу $Q(x, u; n, v)$ можна віддати за допомогою Bernoulli'євої функції $P(x, u; p, q)$ та кількох перших многочленів із ряду: $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$».

Надзвичайно багатий результатами та їх можливими узагальненнями останній параграф статті. М. П. Кравчук розглядає тут новий клас ортогональних многочленів дискретної змінної.

Як вказувалося вище, у співвідношенні (13) характеристичною функцією є вираз $P\ (x,\ n;\ p,\ q)$. Многочлени Кравчука (9) — «ортогональні і нормальні щодо цієї характеристичної функції». «Візьмемо, нпр., за характеристичну функцію вираз $Q\ (x,\ u;\ n,\ v)$ замість $P\ (x,\ n;\ p,\ q)$ і пошукаємо для неї відповідні ортогональні многочлени».

Виявляється, «що такими многочленами будуть вирази:

$$\varphi_m (x, u; n, v) = c_m \Delta^m Q\,(x - m, u - m; n - 2m, v - m) : Q\,(x, u; n, v) \quad (24)$$

$$(m = 0, 1, \dots , u - 1),$$

де c_m є сталий додатний чинник», причому

$$c_m^2 = \frac{1}{m!\,(n-1)\,(n-2) \dots (n-m)} \left[\frac{v\,(n-v-1)\,(u-1)\,(n-u)}{(n-1)\,(n-2)} \right]^m . \quad (25)$$

Зазначено, що з допомогою цих нових многочленів «для Pearson'ового розподілу розв'язуються ті задачі, що їх функції $\psi_m\ (x)$ розв'язують для Bernoulli'євого».

На жаль, многочлени (24) на відміну від (9) або (14) не ввійшли у світову математичну літературу як ще один клас ортогональних поліномів дискретної змінної Кравчука. Лише у 1949 р. німецький математик W. Hahn, дослідивши в роботі [9] більш загальні ортогональні многочлени, що містили всі відомі класичні системи як граничні випадки, знову дійшов, зокрема, і до многочленів (24).

Вітчизняна математична література 30-х років цілком справедливо повністю віддавала пріорітет в цих питаннях роботам М. П. Кравчука. Поліноми (9) набули назви поліномів Кравчука — Bernoulli, а поліноми (24) — Кравчука—Pearson'а. За традицією класичні ортогональні многочлени дискретної змінної позначають першою літерою прізвища математика, який їх відкрив. Отож, і поліноми (9) стали позначати через $K_m^{(B)} (x)$, або $K_m^{(B)} (x, n; p, q)$, а поліноми (24) — через $K_m^{(P)} (x)$, або $K_m^{(P)} (x, u; n, v)$.

Один з найбільш відомих учнів М. П. Кравчука — майбутній (з 1938 р.) професор О. С. Смогоржевський у роботах [10—12] детально дослідив многочлени $K_m^{(B)}\ (x)$ і $K_m^{(P)}(x)$. Різноманітні співвідношення, оцінки, зв'язок з гіпергеометричним і узагальненим гіпергеометричним рядами, графіки — ось неповний перелік питань, розглянутих О. С. Смогоржевським щодо цих поліномів.

Особливо відзначимо роботу [13], в якій розглянуто новий клас ортогональних поліномів дискретної змінної, що є узагальненням поліномів Кравчука.

Інший учень Михайла Пилиповича—С. М. Кулик—активно продовжив наукові дослідження за цією тематикою. В його роботах [14, 15] встановлені нові рекурентні залежності для поліномів Кравчука, вивчаються питання про їх межі та зв'язок з поліномами Jacobi. В статті [16] встановлено різницеві рівняння для названих тут так вперше узагальнених многочленів Кравчука, досліджених в [13]. Відповідні результати для поліномів (9) та (24) подаються як частинні випадки. Виділяється велика за об'ємом (близько 50 стор.) робота [17]. Вона — підсумок всього доробку наукової школи М. П. Кравчука щодо ортогональних многочленів дискретної змінної.

У додаток до них вкажемо на цікаву студентську розробку О. К. Лебединцевої [18], в якій досліджене питання про лінійне зображення многочленів (9) за допомогою поліномів Ерміта та одержано формули для послідовного визначення коефіцієнтів цього зображення.

Очолюючи в 1934—1938 рр. відділ математичної статистики Інституту математики АН УРСР, М. П. Кравчук розглядав у [19] «исследования об ортогональных многочленах, связанных с различными дискретными распределениями вероятностей (Кравчук, Смогоржевский, Кулик)» як один з важливих і перспективних напрямків діяльності відділу.

Однак трагічні події різко змінили життя вченого. В серпні 1937 р. його було несправедливо звинувачено у буржуазному націоналізмі, а в кінці лютого 1938 р. заарештовано. Стаття [19] стала останньою в науковому доробку академіка. Рапорт інституту до XX роковин Жовтневої революції [20], вміщений у журналі, підписаному до друку 1 листопада 1937 р., вже зовсім не згадує ні про М. П. Кравчука, ні про роботу його відділу.

Дослідження вітчизняних вчених у цій галузі фактично було припинено. Відзначимо лише цікаву статтю С. Кулика [21], що надійшла до редакції, звичайно, без будь-яких посилань на роботи М. П. Кравчука, ще у лютому 1941 р. До речі, є відомості ще про одне повоєнне дослідження S. Kulik'a [22] в галузі ортогональних многочленів дискретної змінної.

На щастя, роботи зарубіжних учених в цій галузі успішно продовжували традиції української математичної школи. Ще у 1934 р. німецький математик J. Meixner розглянув новий клас ортогональних поліномів дискретної змінної [23]. Вони дістали назву класичних многочленів Мейкснера. В статті [24] автор поглибив свої дослідження.

Відзначимо дисертацію англійського вченого H. T. Gonin'a [25] і цікаву розвідку американського математика M. J. Gottlieb' a [26], в якій побудовано ортогональні многочлени, зв'язані з так званим геометричним розподілом імовірностей.

Класична монографія професора математики Станфордського університету (США) G. Szegö [27], написана у 1938 р., назавжди остаточно розставила всі крапки. Її розділ 2.82 (стор. 34—36) названо «Krawtchouk's polynomials».

Загальний інтерес до ортогональних многочленів дискретної змінної значно зріс у кінці 50-х років у зв'язку з появою фундаментальних результатів щодо ймовірнісних процесів народження і загибелі [28]. Многочлени Кравчука — один із інструментів досліджень у роботі [29].

Увагу автора цього огляду до ортогональних многочленів дискретної змінної привернув у 1964 р. чл.-кор. АН України М. Й. Ядренко. Результатом курсової роботи стала замітка [30], в якій побудовано клас ортогональних многочленів, близький до многочленів Мейкснера, досліджено процес народження і загибелі, зв'язаний із запропонованими многочленами.

Загальні підходи математичного і функціонального аналізу до вивчення ортогональних поліномів дискретної змінної і, зокрема, многочленів Кравчука — характерна риса робіт [31, 32]. Про цікаві узагальнення — так звані q-многочлени Кравчука — йдеться в [33].

Узагальненням класичних ортогональних многочленів дискретної змінної на випадок двох і більшого числа змінних, вивченню їх різноманітних властивостей та деяких застосувань присвячені роботи [34—40]. Майже в кожній з них згадуються многочлени Кравчука. Серед останніх досліджень цього напрямку виділимо статтю [41].

У галузі випадкових процесів, завдяки роботам [42, 43], введено процеси Кравчука та зв'язані з ними множини Кравчука і «моменти Кравчука» для матриць переходів таких процесів.

Як виявляється [44, 45], многочлени Кравчука надзвичайно важливі при дослідженні зображень груп обертань тривимірного простору і мають широку область фізичних застосувань [46]. Важливий апарат квантової механіки — узагальнені сферичні функції — легко виражаються через поліноми Кравчука. Це дозволяє працювати з сферичними функціями безпосередньо, базуючись на розробленій раніше теорії многочленів Кравчука [47].

Відзначимо також роботи українських вчених А. У. Клімика та його учнів (їх огляд подається у цьому журналі).

Світова математична література, присвячена ортогональним многочленам, відносить до класичних ортогональних поліномів дискретної змінної многочлени Чебишова, Шарльє, Кравчука, Мейкснера і Хана. Думка про те, що всі вони належать деякому широкому класу спеціальних функцій, довгий час не мала остаточних підтверджень. Відзначимо у цьому зв'язку цікаві дослідження [48, 49].

Пізніше, завдяки монографіям А. Ф. Нікіфорова, С. К. Суслова, В. Б. Уварова [50—53], систематично з єдиної точки зору розроблено підхід, який дозволяє всі ці поліноми вивчати як розв'язки певного різницевого рівняння гіпергеометричного типу.

Класичні ортогональні многочлени дискретної змінної — важливий клас спеціальних функцій, що виникає у багатьох питаннях прикладної та обчислювальної математики, теорії імовірностей, математичної статистики, теоретичної фізики і техніки. Всі ці галузі зараз інтенсивно розвиваються, і поліноми Кравчука та їх узагальнення, як невід'ємна складова частина ортогональних многочленів дискретної змінної, з успіхом застосовуються в них.

1. *Кравчук М.* Про інтерполяцію з допомогою ортогональних многочленів // Зап. КСПІ.— 1929.— 4.— С. 21—28.
2. *Чебышев П. Л.* Сочинения.— Спб., 1899.— Т 1.— С. 201—230, 379—384, 471—498, 541—560.
3. *Чебышев П. Л.* Сочинения.— Спб., 1907.— Т. 2.— С. 61—68, 217—242.
4. *Krawtchouk M.* Sur une généralisation des polynomes d'Hermite // Comptes Rendus.— 1929.— 189.— P. 620—622.
5. *Charlier C.* Über das Fehlergesetz.— Über die Darstellung willkürlicher Funktionen // Arkiv för Matematik, Astronomy och Fysik.— 1905—1906.— 2, N 8, 20.
6. *Кравчук М.* Про ортогональні многочлени, зв'язані зі схемами повернених та неповернених куль // Зап. фіз.-мат. відділу УАН.— 1931.— 5.— С. 19—48.
7. *Jozdan C.* Statististique mathématique.— Paris, 1927.
8. *Jozdan C.* Sur une série de polynomes dout chague somme partielle représente le meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode der maindre carrés //Proc. Lond. Math. Soc.— 1921.— 20, ser. 2.— P. 297—325.
9. *Hahn W.* Über Orthogonal Polynome, die *q*-Differenzengleichungen genügen // Math. Nachr.— 1949.— 2.— S. 4—34.
10. *Smohorshewsky A.* Note sur les polynômes orthogonaux // Sitzungsber. d. Ŝevĉenko—Gesellschaft d. Wiss.— 1932.— H. 16.— C. 12—16.
11. *Смогоржевский О.* Про ортогональні поліноми // Журн. Ін-ту математики УАН.— 1934.— № 3—4.— С. 171—186.
12. *Smogorschewsky A.* Sur les polynômes orthogonaux // Comptes Rendus.— 1935.— 200.— P. 801—803.
13. *Смогоржевський О. С.* Про ортогональні поліноми, зв'язані з імовірносною схемою С. Н. Бернштейна // Журн. Ін-ту математики УАН.— 1935.— № 3—4.— С. 111—125.
14. *Кулик С.* Уваги про поліноми Кравчука — Bernoulli // Там же.— № 2.— С. 133—140.
15. *Кулик С. М.* Межі коренів поліномів Кравчука // Там же.— № 3—4.— С. 89—95.
16. *Кулик С. М.* Різницеві рівняння для деяких ортогональних поліномів // Там же.— 1936.— № 4.— С. 97—109.
17. *Кулик С. М.* Ортогональні поліноми, зв'язані з деякими схемами дискретних розподілів імовірностей // Там же.— 1937.— № 1.— С. 89—136.
18. *Лебединцева О. К.* Ортогональні многочлени, зв'язані з Бернуллієвою схемою розподілу // Зб. студ. наук. праць КДУ.— 1937.— № 1.— С. 7—24.
19. *Кравчук М. Ф.* О работах Института математики Академии наук УССР // Успехи мат. наук.— 1937.— 3.— С. 249—251.
20. *Граве Д. О., Бреус К.* Інститут математики Академії Наук УРСР до XX роковин Великої Жовтневої Революції // Журн. Ін-ту математики АН УРСР.— 1937.— № 3.— С. 3—17.
21. *Кулик С. М.* Производящие функции некоторых ортогональных полиномов // Мат. сб.— 1943.— 12, № 3.— С. 320—334.
22. *Kulik S.* Orthogonal polynomials associated with the binomial probability function with a negative integral index // Proc. Shevchenko Sci. Soc. Sec. Math., Natur. Sci. and Med.— 1953.— N 1.— P. 7—10.
23. *Meixner J.* Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion // J. London Math. Soc.— 1934.— 9.— P. 6—13.
24. *Meixner J.* Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome // Math. Z.— 1938.— 44.— P. 531—535.
25. *Gonin H. T.* On the orthogonal polynomials in binomial and hypergeometric distributions.— Edinburgh: Univ. Edinburgh, 1935.
26. *Gottlieb M. J.* Concerning some polynomials orthogonal on a limite or enumerable set of points // Amer. J. Math.— 1938.— 60.— P. 453—458.
27. *Sregö G.* Orthogonal polynomials.— New York: Amer. Math. Soc., 1939.— 404 p. (рос. переклад: *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с).
28. *Karlin S., Mc. Gregor J.* The differential equations of birth—and—death processes and the Stieltjes moment problem // Trans. Amer. Math. Soc.— 1957.— 85.— P. 489—546.
29. *Karlin S., Mc. Gregor J.* Linear growth, birth and death processes // J. Math. and Mech.— 1958.— 7.— P. 643—662.
30. *Призва Г. Й.* Ортогональні многочлени, зв'язані з імовірнісним розподілом Паскаля // Вісник Київ. ун-ту. Сер. мех. та мат.— 1966.— № 8.— С. 153—160.
31. *Perlstadt M.* Chopped orthogonal polynomial expansions.— Some discrete cases // SIAM J. Alg. Disc. Math.— 1983.— 4.— P. 203—214.

32. *Perlstadt M.* A property of orthogonal polynomial families with polynomial duals // SIAM J. Math. Anal.— 1984.— **15**.— P. 1043—1054.
33. *Stanton D.* Some q-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups // Amer. J. Math. — 1980.— **102**.— P. 625—662.
34. *Призва Г. И.* Об одном классе ортогональных многочленов от двух дискретных переменных // Вычислит. и прикл. математика.— 1983.— **49**.— С. 64—70.
35. *Призва Г. Й.* Деякі класи ортогональних многочленів кількох дискретних змінних // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1983.— № 8.— С. 15—17.
36. *Призва Г. Й.* Про одне узагальнення многочленів Шарльє // Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех.— 1984.— **26**.— С. 99—104.
37. *Клунник А. А., Призва Г. И.* Ортогональные многочлены двух дискретных переменных, связанные с двумерным распределением Паскаля // Вычислит. и прикл. математика.— 1986.— **60**.— С. 15—19.
38. *Призва Г. И.* Некоторые классы ортогональных многочленов двух дискретных переменных.— Киев, 1986.— 22 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 411—86.
39. *Призва Г. Й.* Ортогональні многочлени, пов'язані з від'ємним триноміальним розподілом // Допов. АН УСРР. Сер. А.— 1987.— № 2.— С. 33—34.
40. *Призва Г. И.* Ортогональные многочлены многих дискретных переменных // Вычислит. и прикл. математика.— 1988.— **65**.— С. 46—51.
41. *Fratnik M. V.* Multivariable Meixner, Krawtchouk and Meixner—Pollaczek polynomials // J. Math. Phys.— 1989.— **30**, N 12.— P. 2740—2749.
42. *Cooper R. D., Hoare M. R., Rahman M.* Stochastic processes and special functions; On the probabilistic origin of some positive kernels associated with classical orthogonal polynomials // J. Math. Anal. and Appl.— 1977.— **61**.— P. 262—291.
43. *Hoare M. R., Rahman M.* Cumulative Bernoulli trials and Krawtchouk processes // Stochast. Process. and Appl.— 1983.— **16**.— P. 113—139.
44. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной в теории представлений групп // Теоретико-групповые методы в физике.— М. : Наука, 1983.— Т. 2.— С. 534—542.
45. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной и представления трехмерной группы вращений // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— **19**, № 3.— С. 22—35.
46. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной // Соврем. пробл. прикл. математики и мат. физики.— 1988.— С. 78—91.
47. *Koornwinder T. H.* Krawtchouk polinomials, a unification of two different group theoretic interpretations // SIAM J. Math. Anal.— 1982.— **13**.— P. 1011—1023.
48. *Lesky P.* Orthogonale Polynomsysteme als Losungen Sturm-Liouvillescher Differenzengleichungen // Monat. Math.— 1962.— **66**.— P. 203—214.
49. *Lesky P.* Wehrscheinlichkeitsfunktionen diskreter Verteilungen als Lösungen der Pearsonschen Differenzengleichung für die diskreten klassischen Orthogonalpolynome // Monat. Math.— 1984.— **98**, № 4.— P. 277—293.
50. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций.— М. : Наука, 1974.— 304 с.
51. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики.— М. : Наука, 1984.— 320 с.
52. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К.* Классические ортогональные полиномы.— М. : Знание, 1985.— 32 с.
53. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.— М. : Наука, 1985.— 216 с.

Одержано 16.03.92