УДК 517.986+517.58

А. У. Клімик, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т теорет. фізики АН України, Київ)

Многочлени Кравчука і зображення груп

Визначені многочлени Кравчука дискретної змінної та різноманітні типи q-многочленів Кравчука. Показано значення цих многочленів в теорії зображень груп Лі і Шевалле, симетричної і квантових груп. Стаття є оглядом сучасних результатів цих напрямків.

Определены многочлены Кравчука дискретного переменного и различные типы q-многочленов Кравчука. Показано значение этих многочленов в теории представлений групп Ли и Шевалье, симметрической и квантовой групп. Статья представляет собой обзор современных результатов в этом направлении.

1. Вступ. Теорія спеціальних функцій — один з важливих розділів математики. Спеціальні функції, що виникають у математичній фізиці, як пра-

вило, є частковими або граничними випадками гіпергеометричної функції, введеної в 1769 р. Ейлером і глибоко дослідженої на початку XIX століття Гауссом. Такими є многочлени Якобі, Гегенбауера, Лежандра, Ерміта, Лагерра, функції Бесселя, Неймана, Макдональда, Уітекера та ін.

Розвиток теорії зображень неперервних груп (особливо груп обертань, груп псевдоортогональних матриць, групи рухів евклідової площини та деяких інших) показав, що спеціальні функції тісно пов'язані з цією теорією. Більше того, теорія зображень груп Лі дає єдиний підхід до теорії основних класів спеціальних функцій гіпергеометричного типу [1—3].

Сильний поштовх для вивчення зв'язку теорії зображень груп зі спеціальними функціями дав розвиток фізики. Для розв'язування диференціальних рівнянь, які виникали в квантовій механіці, потрібно було використати симетрію фізичних систем, тобто груп перетворень, що залишають інваріантними деякі їх важливі характеристики (наприклад, потенціал в рівнянні Шредінгера). Оскільки розв'язок цих рівнянь в деяких часткових випадках (наприклад, для гармонічного осцилятора) вдавалося виразити через спеціальні функції, то виникла потреба у встановленні зв'язку між теорією цих функцій та групами перетворень, що залишають незмінними досліджувані фізичні системи. Тут слід відзначити роботи Г. Вейля [4] та Вігнера [5].

Вивчаючи незвідні унітарні зображення тривимірного аналогу SO_0 (2,1) групи Лоренца, Баргман [6] виявив, що їх матричні елементи виражаються через гіпергеометричну функцію, а для зображень так званої дискретної серії — через їх частинний випадок (многочлени Якобі). Через многочлени Якобі виражаються матричні елементи незвідних зображень групи обертань SO (3). «Випрямляючи» групи SO_0 (2, 1) та SO (3), одержуємо групу ISO (2) рухів евклідової площини. Матричні елементи незвідних зображень цієї групи виражаються через функцію Бесселя [1—3].

Те, що матричні елементи зображень груп виражаються через спеціальні функції, дозволяє вивчати властивості цих функцій. Наприклад, запис матричних елементів у вигляді $\langle T(g)\, u, v\rangle$ при відповідній реалізації простору зображення дає інтегральні формули для спеціальних функцій, з рівності $T(g_1)\, T(g_2) = T(g_1 g_2)$ випливають теореми додавання. З них, використовуючи ортогональність матричних елементів незвідних зображень, виводимо теореми множення для спеціальних функцій, породжуючі функції і т. д.

Довгий час поза рамками інтенсивного вивчення за лишалися многочлени, ортогональні на дискретній множ ині точок. Їх називають многочленами дискретної змінної. До них в першу чергу відносяться многочлени Кравчука, Мейкснера, Хана та Уілсона. Увагу до многочленів дискретної змінної викликав розвиток дискретної математики, який в свою чергу стимулювався розвитком теорії кодувань, комп'ютерної техніки, асоціативних схем теорії дизайну і т. д. Поява інтересу до вивчення многочленів дискретної змінної привела до застосування теоретико-групових методів в теорії таких многочленів. Виявилося, що для вивчення многочленів дискретної змінної придатні зображення як неперервних, так і дискретних груп. Однак ідея застосувань теорії зображень неперервних груп до вивчення цих многочленів дещо інша.

Нехай зображення T деякої групи G унітарне, а базис в його просторі ортонормований. Тоді при фіксованому $g \in G$ матриця $(t_{kj}(g))$ цього зображення унітарна. Якщо розглянемо матричні елементи $t_{kj}(g)$ як функцію від k при фіксованих g і j, то одержимо ортонормовані функції дискретного змінного k. Для деяких груп при цьому і виникають многочлени дискретної змінної. Наприклад, якщо $G = SU$ (2), то ці функції виражаються через многочлени Кравчука. Матричні елементи незвідних зображень дискретної серії групи SU (1,1) приводять до многочленів Мейкснера, а група Гейзенберга — до многочленів Шарльє. Зауважимо, що таким чином можна одержати континуальні аналоги многочленів дискретної змінної. Для цього потрібно розглядати ядра відповідних зображень як функції «континуального номера» стовпця [2, 3].

Многочлени дискретної змінної виникають і при вивченні тензорних добутків представлень груп. Якщо T_1 і T_2 — незвідні зображення групи G, то в просторі $L_1 \otimes L_2$ тензорного добутку цих зображень двома способами можна вибрати ортонормовані базиси: розглядаючи тензорні добутки базисних елементів в L_1 та в L_2 або спочатку розкладаючи добуток $T_1 \otimes T_2$ на незвідні зображення, а потім вибираючи базиси в просторах одержаних зображень. Матриця переходу від одного базису до іншого унітарна. Її елементи називають коефіцієнтами Клебша—Гордана даного тензорного добутку. У випадку групи SU (2) ці коефіцієнти виражаються через многочлени Хана, а у випадку групи S_4, близької до групи Гейзенберга,— через *многочлени* Кравчука [2].

У випадку дискретних груп елементи групи можна занумерувати дискретним параметром і матричні елементи зображень в ортонормованому базисі є функціями цього параметру. При розгляді зображень симетричної групи таким чином приходимо до многочленів дискретної змінної, зокрема до многочленів Кравчука.

Окремий клас ортогональних многочленів дискретної змінної складають так звані q-ортогональні многочлени. Вони виражаються через q-гіпергеометричні функції і залежать від параметру q. До вивчення таких многочленів також можуть бути застосовані теоретико-групові методи. Виявилося, що q-ортогональні многочлени з $q = p^s$, де p — просте число, а s — ціле додатне число, зв'язані з незвідними зображеннями груп Шевалле. А саме, через них виражаються зональні сферичні функції цих зображень. За допомогою теоретико-групових методів можна вивести теореми додавання і множення для q-ортогональних многочленів.

Останніми роками було показано, що q-ортогональні многочлени пов'язані з зображеннями квантових груп. Квантові групи не існують як многовиди (як це має місце у випадку груп Лі). Компактні квантові групи визначаються за допомогою алгебри функції на квантовій групі, яка є алгеброю Хопфа. В принципі вивчення q-ортогональних многочленів за допомогою квантових груп таке ж, як вивчення ортогональних многочленів і спеціальних функцій за допомогою зображень груп Лі, але складніша структура квантових груп приводить до складніших і більш громіздких викладок порівняно з випадком груп Лі.

2. Многочлени Кравчука. Кравчук ввів свої многочлени в роботі [7]. Тепер їх означення дещо модернізовано. А саме, якщо задано натуральне число N і число p з інтервалу (0, 1), то многочлени

$$K_s(x; p, N) = {}_2F_1(-x, -s; -N; p^{-1}), \quad s = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

називають многочленами Кравчука змінної x. Співвідношення ортогональності для них має вигляд

$$\sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} K_s(x; p, N) K_t(x; p, N) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^s \binom{N}{s}^{-1} \delta_{st}. \tag{2}$$

Узагальненням гіпергеометричної функції ${}_nF_{n-1}$ є так звані базисні гіпергеометричні функції ${}_n\varphi_{n-1}$, які визначаються таким чином. Нехай q — число з інтервалу (0, 1). Позначимо через $(a; q)_n$ величину

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\ldots(1-aq^{n-1}).$$

Границя $(a; q)_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a; q)_n$ є аналітичною функцією від $a \in C$. Вираз $(q^a; q)_n/(q; q)_n$ є аналогом співвідношення $\Gamma(a+n+1)/\Gamma(a+1)$. Базисна гіпергеометрична функція (або q-гіпергеометрична функція ${}_n\varphi_{n-1}$ визначається формулою

$${}_n\varphi_{n-1}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_{n-1} \end{matrix} \middle| q, z\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_j \ldots (a_n; q)_j}{(b_1; q)_j \ldots (b_{n-1}; q)_j} \frac{z^j}{(q; q)_j}.$$

Якщо цей ряд обривається, то ${}_n\varphi_{n-1}$ можна розглядати і при $q > 1$.

За допомогою базисних гіпергеометричних функцій вводяться q-ортогональні многочлени [8]. q-Аналогами многочленів дискретної змінної є

q-многочлени Кравчука, Хана і Ескі — Уілсона. Є декілька типів q-многочленів Кравчука [9], які в границі приводять до многочленів Кравчука (1). q-Многочлени Кравчука

$$K_j(q^{-x}; c, N \mid q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-x}, & -cq^{j+1}, & q^{-j} \\ & 0, & q^{-N} \end{matrix}\middle| q, q\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{3}$$

ортогональні на множині $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Співвідношення ортогональності має вигляд

$$\sum_{x=0}^{N} K_s(q^{-x}; c, N \mid q) K_t(q^{-x}; c, N \mid q) w(x) = h_s \delta_{st},$$

де

$$w(x) = (-cq)^{-x} (q^{-N}; q)_x [(q; q)_x]^{-1},$$

$$h_s = (-q^{-N-s-1} c^{-1}; q)_{N-s} (q^{-1}; q^{-1})_s (-cq^{s+1}; q)_s [(q^{-N}; q)_s]^{-1}.$$

При $q \to 1$ маємо

$$\lim_{q \to 1} K_j(q^{-x}; c, N \mid q) = K_j(x; (1+c)^{-1}, N),$$

$$\lim_{q \to 1} K_j(q^{-x}; q^c, N \mid q) = K_j\left(x; \frac{1}{2}, N\right).$$

Інший тип q-многочленів Кравчука задається формулою

$$\widetilde{K}_j(x; a, b \mid q) = \frac{(q^a; q^{-1})_j (q^b; q^{-1})_j q^{-m}}{(q^{-1}; q^{-1})_j} {}_2\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-x}, & q^{-j} \\ q^{-a}, & q^{-b} \end{matrix}\middle| q, q\right), \tag{4}$$

де a, b — цілі числа такі, що $0 \leqslant j \leqslant \min(a, b)$. Співвідношення ортогональності для них записується у вигляді

$$\sum_{x=0}^{\min(a,b)} \frac{(q^a; q^{-1})_x (q^b; q^{-1})_x}{(q^{-1}; q^{-1})_x} q^{-x} \widetilde{K}_j(x; a, b \mid q) \widetilde{K}_n(x; a, b \mid q) =$$

$$= q^{ab-n} (q^a; q^{-1})_n (q^b; q^{-1})_n [(q^{-1}; q^{-1})_n]^{-1} \delta_{jn}.$$

Афінні q-многочлени Кравчука визначаються формулою [10]

$$K_j^{\mathrm{Aff}}(q^{-x}; q^{-a}, N \mid q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-j}, & q^{-x}, & 0 \\ q^{-a}, & q^{-N} & \end{matrix}\middle| q, q\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{5}$$

Вони ортогональні на множині $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$ відносно ваги

$$w(x_k) = (q; q)_N (q^a; q^{-1})_k (-1)^k q^{k(k-1)/2} [(q; q)_k (q; q)_{N-k}]^{-1},$$

де $x_k = q^{-k}$. При цьому $\| K_j^{\mathrm{Aff}}(q^{-x}; q^{-a}, N \mid q) \|^2 = q^{aN}/w(x_j)$.

Четвертий тип q-многочленів Кравчука задається формулою [11]

$$k_n(x; b, N \mid q) = {}_2\varphi_1(q^{-n}, x; q^{-N}; q, bq^{n+1}). \tag{6}$$

Співвідношення ортогональності для них має вигляд

$$\sum_{x=0}^{N} k_n(x; b, N \mid q) k_m(x; b, N \mid q) w(x) = h_n \delta_{mn},$$

де $$w(x) = (bq, q)_{N-x} (-1)^{N-x} q^{x(x-1)/2} [(q; q)_{N-x} (q; q)_x]^{-1},$$

$$h_n = (-1)^n b^N (q; q)_n (q; q)_{N-n} (bq; q)_n q^{(N^2-n^2+N-n+2Nn)/2} / (q; q)_N^2.$$

q-Многочлени Кравчука є частковими або граничними випадками q-многочленів Хана

$$Q_n(q^{-x}; a, b, N \mid q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, & abq^{n+1}, & q^{-x} \\ & aq, & q^{-N} \end{matrix}\middle| q, q\right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

ортогональних на множині $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$ [12]. Наприклад,

$$k_n(x; b, N \mid q) = \lim_{a \to \infty} Q_n(x; a, b, N \mid q).$$

3. Многочлени Кравчука і зображення неперервних груп. Один з методів дослідження многочленів і функцій дискретної змінної полягає в наступному. Нехай T — унітарне незвідне зображення групи G, а $\{\mathbf{e}_n \mid n \in I\}$ — ортонормований базис простору V зображення T. Матричні елементи $t_{mn}(g) = \langle \mathbf{e}_m, T(g)\mathbf{e}_n \rangle$ зображення T мають властивість

$$\sum_{n \in I} t_{mn}(g) \overline{t_{kn}(g)} = \delta_{mk}. \tag{7}$$

Покладаючи $F_m(x; g) = t_{mx}(g), x \in I$, одержуємо ортогональну систему функцій на I. Завдяки унітарності оператора $T(g)$ кожну функцію f на I таку, що $\|f\|^2 \equiv \sum_{x \in I} |f(x)|^2$, можна розкласти за функціями $F_m(x; g)$, $m \in I$: $f(x) = \sum_{m \in I} a_m F_m(x; g)$, де $a_m = \sum_{x \in I} f(x) \overline{F_m(x; g)}$. Таким чином, $F_m(x; g)$, $m \in I$, — повна ортогональна система функцій на I. Часто $F_m(x; g)$ виражається через відомі многочлени або спеціальні функції. Тоді ці многочлени і функції можна вивчати за допомогою теорії зображень.

Нехай G співпадає з групою $SU(2)$ унітарних комплексних матриць $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Незвідні зображення T_l цієї групи задаються цілим чи напівцілим числом l. Їх можна реалізувати в лінійному просторі V_l многочленів степені $2l$ від однієї змінної за формулою

$$T_l(u) f(z) = (bz + \bar{a})^{2l} f\left(\frac{az - \bar{b}}{bz + \bar{a}}\right).$$

Функції $\psi_k(z) = [(l-k)!\,(l+k)!]^{-1} (-iz)^{l-k}$, $k = -l, -l+1, \ldots, l$, утворюють ортонормований базис цього простору відносно скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle$, для якого $\langle z^{l-k}, z^{l-r} \rangle = (l-k)!\,(l+k)!\,\delta_{kr}$. Враховуючи, що матричний елемент $t^l_{mn}(u) = \langle \psi_m, T_l(u)\psi_n \rangle$, одержуємо вирази для нього через гіпергеометричну функцію. Один з таких виразів є

$$t^l_{mn}(u) = \frac{(2l)!\,a^{-m-n} b^{l+n} (-\bar{b})^{l+m}}{[(l+m)!(l-m)!(l+n)!(l-n)!]^{1/2}} \times$$

$$\times {}_2F_1(-l-n, -l-m; -2l; |b|^{-2}).$$

Поклавши в ньому $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $N = 2l$, $s = l + m$, $x = l + n$ та взявши до уваги означення (1) многочленів Кравчука, будемо мати [13]

$$t^l_{mn}(u) = \frac{(-1)^x N! \cos^{N-s-x}\theta \sin^{x+s}\theta}{[s!x!\,(N-s)!\,(N-x)!]^{1/2}} K_s(x; \sin^2\theta, N). \tag{8}$$

Підставляючи цей вираз у формулу (7), одержуємо співвідношення ортогональності (2) для многочленів Кравчука.

Рекурентні співвідношення для матричних елементів $t^l_{mn}(u)$ [3] приводять до різницевого рівняння другого порядку для $K_s(x; p, N)$:

$$x \Delta \nabla K_s(x; p, N) + \frac{Np - x}{1 - p} \Delta K_s(x, p, N) + \frac{s}{1 - p} K_s(x; p, N) = 0,$$

де $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$, і до рекурентної формули

$$p(N - s) K_{s+1}(x; p, N) - [s - x + p(N - 2s)] K_s(x; p, N) +$$
$$+ (1 - p) s K_{s-1}(x; p, N) = 0.$$

Породжуюча функція для матричних елементів $t^l_{mn}(u)$ [3] приводить до породжуючої функції для многочленів Кравчука:

$$(-1)^x p^{-x}(z+1)^{N-x}(1-p(z+1))^x = \sum_{s=0}^{N}\binom{N}{s} K_s(x; p, N)\, z^{N-s}.$$

За допомогою співвідношення між матричними елементами зображень та коефіцієнтами Клебша—Гордана групи $SU(2)$ виводяться теореми додавання та множення для многочленів Кравчука [3]. Ми не приводимо цих теорем через їх громіздкість. Наведемо лише частковий випадок теореми множення [14]

$$K_k(x; p, N)\, K_k(y; p, N) = \sum_{z=0}^{N} \frac{x!y!(N-x)!(N-y)!}{p^{x+y}(1-p)^2 N!}\left[\sum_j \frac{p^j}{(j-z)!}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(1-p)^j(2p-1)^{z+x+y-2j}}{(j-x)!(j-y)!(z+x+y-2j)!(N-j)!}\right] K_k(z; p, N),$$

де друге підсумовування ведеться по тих невід'ємних цілих значеннях j, для яких факторіали мають зміст.

Многочлени Кравчука з'являються також в методі дерев при розгляді власних функцій оператора Лапласа на сфері S^{n-1} в різних системах координат. Через них виражаються коефіцієнти переходу від однієї системи координат до іншої (докладніше див. [15, 16]). За допомогою многочленів Кравчука проводиться діагоналізація інфінітезимальних операторів деяких незвідних унітарних зображень унітарної групи $U(3)$ [17].

4. Зображення групи $SU(1,1)$ і функції Кравчука — Мейкснера. Група $SU(1,1)$ складається з комплексних матриць $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$ таких, що $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Нехай τ — комплексне число, а $\varepsilon \in \{0, 1/2\}$. Тоді парі (τ, ε) відповідає зображення групи $SU(1,1)$ в просторі $L^2(0, 2\pi)$, яке задається формулою

$$T_{\tau,\varepsilon}(g) f(e^{i\theta}) = (be^{i\theta}+\bar{a})^{\tau+\varepsilon}(\bar{b}e^{-i\theta}+a)^{\tau-\varepsilon} f\left(\frac{ae^{i\theta}+\bar{b}}{be^{i\theta}+\bar{a}}\right).$$

Вибираючи ортонормований базис $\{(2\pi)^{-1/2}e^{ip\theta} \mid p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ у цьому просторі, для матричних елементів $t^{\tau,\varepsilon}_{mn}(g)$ операторів $T_{\tau,\varepsilon}(g)$ маємо інтегральну формулу

$$t^{\tau,\varepsilon}_{mn}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(be^{i\varphi}+\bar{a})^{\tau+n+\varepsilon}(\bar{b}e^{-i\varphi}+a)^{\tau-n-\varepsilon}e^{i(m-n)\varphi}d\varphi,$$

де m і n — цілі чи напівцілі числа в залежності від значення ε. Цей інтеграл обраховується за допомогою формули для бінома Ньютона Покладемо $\varepsilon = 0$, $a = \operatorname{sh}\theta$, $b = \operatorname{ch}\theta$. Функцію

$$k_n(x; \operatorname{ch}\theta, \tau) = \frac{\Gamma(\tau+x+1)\,\Gamma(\tau-x+1)}{\Gamma(2\tau+1)\operatorname{ch}^\tau\theta}\left(\frac{1+\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\theta}\right)^{(x+n)/2} t^{\tau,0}_{xn}(g)$$

дискретного змінного $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ називають функцією Кравчука — Мейкснера.

Вирази для $t^{\tau,0}_{mn}(g)$ через гіпергеометричну функцію приводять до формули

$$k_n(x; p, \tau) = \frac{\Gamma(\tau+x+1)\,\Gamma(\tau-x+1)}{\Gamma(2\tau+1)\,\Gamma(x-n+1)}\times$$

$$\times p^{-\tau-n}(1+p)^{x+n}{}_2F_1(\tau+x+1, x-\tau; x-n+1; -p),$$

де $x \geqslant n$. При $x < n$ застосовуємо формулу $k_n(x; p, \tau) = k_x(n; p, \tau)$. За допомогою формули лінійного перетворення для гіпергеометричної функції звідси одержуємо, що при $x \geqslant n$, $\tau = i\rho - \frac{1}{2}$, $\rho \in R$

$$k_n(x; p, \tau) = \left(\frac{1+p}{p}\right)^{x+n} \left[{}_2F_1\left(-i\rho + x + \frac{1}{2}, -i\rho + n + \frac{1}{2}; -2i\rho + 1; -p^{-1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\Gamma(-2i\rho)\,\Gamma\left(i\rho + x + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i\rho - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2i\rho)\,\Gamma\left(-i\rho + x + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-i\rho - n + \frac{1}{2}\right)} p^{-2i\rho} \times$$

$$\left. \times {}_2F_1\left(i\rho + x + \frac{1}{2}, i\rho + n + \frac{1}{2}; 2i\rho + 1; -p^{-1}\right)\right].$$

Це є аналог формули (1) для функцій Кравчука — Мейкснера. У зв'язку з цим зауважимо, що при $\tau = l \in \frac{1}{2} Z_+, |m| \leqslant l, |n| \leqslant l$, $m - l \in Z$, $n - l \in Z$, функція $k_n(x; p, \tau)$ виражається через многочлен Кравчука [18].

Зображення $T_{\tau,\varepsilon}$ при $\tau = i\rho - \frac{1}{2}$, $\rho \in R$, унітарні і належать так званій основній унітарній серії. Тому застосувавши формулу (7), одержимо співвідношення ортогональності для $k_n\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right)$:

$$\sum_{x \in Z} M_\rho(x, p)\, k_n\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right) k_m\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right) = p \left(\frac{1+p}{p}\right)^n \delta_{mn},$$

де

$$M_\rho(x, p) = \left| \frac{\Gamma(2i\rho)}{\Gamma\left(i\rho + x + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i\rho - x + \frac{1}{2}\right)} \right|^2 \left(\frac{p}{1+p}\right)^x,$$

тобто функції $k_n\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, утворюють ортогональну систему функцій на множині Z цілих чисел. Всяка функція $f(x)$ на Z така, що $\sum_{x \in Z} M_\rho(x, p) |f(x)|^2 < \infty$, розкладається за функціями k_n:

$$f(x) = \sum_{n \in Z} a_n k_n\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right),$$

причому

$$a_n = \sum_{x \in Z} M_\rho(x, p)\, p^{n-1} (1+p)^{-n} f(x)\, \overline{k_n\left(x; p, i\rho - \frac{1}{2}\right)}.$$

Інше співвідношення ортогональності маємо для функцій Кравчука — Мейкснера $k_n(x; p, \tau)$ при $0 < \tau < 1$ (тобто для функцій Кравчука — Мейкснера, зв'язаних з унітарними зображеннями додаткової серії групи $SU(1,1)$):

$$\sum_{x \in Z} C_{2\tau}^{\tau+x} p^x (1+p)^{-x} k_n(x; p, \tau)\, k_m(x; p, \tau) = (C_{2\tau}^{\tau+n})^{-1} p^{-2\tau-n} (1+p)^n \delta_{mn},$$

де $0 \leqslant p < \infty$, $C_{2\tau}^{\tau+s} = \Gamma(2\tau+1)/\Gamma(\tau+s+1)\,\Gamma(\tau-s+1)$.

Функції Кравчука — Мейкснера задовольняють різницеве рівняння другого порядку

$$\left[(\tau + x)\,\Delta\nabla + \frac{2p\tau + \tau + x}{1+p}\,\Delta + \frac{4xp + \tau - n + 2x}{1+p}\right] k_n(x; p, \tau) = 0.$$

Породжуюча функція для $k_n(x; p, \tau)$ задається формулою

$$(\omega p)^{-\tau}(1+p)^x(\omega+1)^{\tau+x}(\omega p+p+1)^{\tau-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2\tau}^{\tau+n} k_n(x; p, \tau)\,\omega^n.$$

Для функцій Кравчука — Мейкснера справедлива теорема додавання

$$\sum_{x_1=-\infty}^{\infty}\frac{k_n(x_1;\ p,\tau_1)\,k_m(x-x_1;p,\tau_2)}{\Gamma(\tau_1+x_1+1)\,\Gamma(\tau_1-x_1+1)\,\Gamma(\tau_2+x-x_1+1)\,\Gamma(\tau_2-x+x_1+1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\tau_1+2\tau_2+1)}{\Gamma(2\tau_1+1)\,\Gamma(2\tau_2+1)}\,\frac{k_{m+n}(x;p,\tau_1+\tau_2)}{\Gamma(\tau_1+\tau_2+x+1)\,\Gamma(\tau_1+\tau_2-x+1)}.$$

5. Зображення напівпрямих добутків симетричної групи та многочлени Кравчука. Симетричною групою степеня n називають групу S_n всіх відображень множини $I_n=\{1,2,\dots,n\}$ на себе. Нехай n і k — натуральні числа, причому $k>1$ Позначимо через $(S_{n+1})^k$ прямий добуток k екземплярів групи S_{n+1}... Група S_k діє в $(S_{n+1})^k$ перестановками «координат». Позначимо через $S(n+1,k)$ напівпрямий добуток $(S_{n+1})^k$ з S_k відносно цієї дії. Таким чином, якщо $g_0, g_0'\in S_k$, $g_j, g_j'\in S_{n+1}$, $1\leqslant j\leqslant k$, і $g_0'; i\to m_i$, то

$$(g_0; g_1,\dots,g_k)(g_0'; g_1',\dots,g_k')=(g_0g_0'; g_{m_1}g_1',\dots,g_{m_k}g_k').$$

Групу $S(n+1,k)$ називають скрученим добутком груп S_{n+1} і S_k.

Нехай S_{n+1} діє на множині $I_{n+1}=\{0\}\cup I_n$. Позначимо через S_n підгрупу в S_{n+1}, що складається з перестановок елементів з I_n. Елементам j з I_{n+1} поставимо у відповідність вершини $\mathbf{a}_j$ симплексу X_n в R^n, вписаного в сферу S^{n-1} одиничного радіуса. При цьому $\mathbf{a}_0=(1,0,\dots,0)$, $\mathbf{a}_i=(\beta_n, r_n\mathbf{a}_{i-1}')$, $1\leqslant i\leqslant n$, де $\beta_n=\beta_{n-1}/(1-\beta_{n-1})$, $r_n=(n^2-1)^{1/2}/n$, а $\mathbf{a}_i'$ — вершини симплексу X_{n-1}. Оскільки довжина вектора $\mathbf{a}_i$ рівна 1, то

$$\mathbf{a}_1=\left(-\frac{1}{n},\frac{(n^2-1)^{1/2}}{n},0,\dots,0\right),\quad \mathbf{a}_i=\left(-\frac{1}{n},-\frac{(n^2-1)^{1/2}}{n(n-1)},\dots\right),$$

$$2\leqslant i\leqslant n.$$

Дія S_{n+1} на I_{n+1} визначає дію S_{n+1} на X_n. Оскільки $\mathbf{a}_j\in S^{n-1}$, то одержуємо вкладення S_{n+1} в ортогональну групу $O(n)$. Підгрупа S_n залишає інваріантною точку $\mathbf{a}_0$ симплексу X_n. Тому X_n можна ототожнити з S_{n+1}/S_n.

Координатні функції в R^n позначаємо через $z_1,\dots,z_n$. Легко перевірити, що функції 1, z_i, $1\leqslant i\leqslant n$, утворюють ортогональний базис простору $L^2(X_n)$, причому $\|1\|=1$, $\|z_i\|^2=\dfrac{1}{n}$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Побудована відповідність $I_{n+1}\to X_n$ дозволяє замість $(I_{n+1})^k$ розглядати X_n^k. При цьому точці $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ з $(I_{n+1})^k$ співставляється точка $(\mathbf{a}_0,\dots,\mathbf{a}_0)$ з X_n^k. На X_n^k діє група $S(n+1,k)$. Якщо $g=(g_0; g_1,\dots,g_k)$ і $b=(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_k)\in X_n^k$, то $gb=g_0(g_1\mathbf{b}_1,\dots,g_k\mathbf{b}_k)$.

Група $S(n+1,k)$ діє транзитивно на X_n^k, причому стаціонарною підгрупою точки $(\mathbf{a}_0,\dots,\mathbf{a}_0)$ є $S(n,k)$. Тому $X_n^k\sim S(n+1,k)/S(n,k)$.

Якщо $b=(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_k)\in X_n^k$, то через $w(b)$ позначимо число елементів множини $\{i\mid \mathbf{b}_i\neq\mathbf{a}_0\}$. Покладемо $z_{ij}=z_i(\mathbf{b}_j)$. Кожному $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_k)\in$ $\in(I_{n+1})^k$ співставимо множину $c(\mathbf{u})=\{j\mid u_j\neq 0\}$. Введемо одночлени

$$z_{\mathbf{u}}=\prod_{j\in c(\mathbf{u})} z_{u_j j}=\prod_{j\in c(\mathbf{u})} z_{u_j}(b_j).$$

Можна показати, що функції $z_{\mathbf{u}}$ утворюють ортогональний базис в $L^2(X_n^k)$, причому $\| z_{\mathbf{u}} \|^2 = n^{-|c(\mathbf{u})|}$, де $|c(\mathbf{u})|$ — число елементів в $c(\mathbf{u})$.

Формула $T(g) f(b) = f(g^{-1}b)$, $f \in L^2(X_n^k)$, задає унітарне зображення групи $S(n+1, k)$ в $L^2(X_n^k)$. Воно звідне. Лінійні комбінації одночленів $z_{\mathbf{u}}$ таких, що $|c(\mathbf{u})| = s$, утворюють підпростір P_s розмірності $k!n^s/s!(k-s)!$. Він інваріантний відносно зображення T. Звуження зображення T на P_s позначаємо через T_s. Справедливе таке твердження. Для кожного s, $0 \leqslant s \leqslant k$, T_s є незвідним зображенням групи $S(n+1, k)$. Зональна сферична функція φ_s цього зображення має вигляд

$$\varphi_s(b) = \frac{s!\,(k-s)!}{k!} \sigma_s(z_{u_1}, \ldots, z_{u_k}),$$

де σ_k — елементарна симетрична функція степені s від $z_{u_1}, \ldots, z_{u_k}$. Точки b і b' з X_n^k належать одній і тій же орбіті відносно підгрупи $H = S(n, k)$, якщо $w(b) = w(b')$.

З цього твердження випливає, що функції f, інваріантні відносно дії підгрупи H, залежать тільки від $w(b)$ тобто $f(b) = \tilde{f}(w(b))$. Тому

$$\sum_{b \in X_n^k} f(b) = \sum_{s=0}^{k} \frac{k!n^s}{k!\,(k-s)!} \tilde{f}(s).$$

Застосовуючи цю рівність до функції $\varphi_s(b)$, одержуємо [19]

$$\varphi_s(b) = K_s\left(w(b); \frac{n}{n+1}, k\right), \quad 0 \leqslant s \leqslant k, \quad b \in X_n^k, \tag{9}$$

де K_s — многочлени Кравчука.

Теорема додавання для зональних сферичних функцій на однорідному просторі $X = G/H$ доводиться таким чином. Беремо незвідне зображення T що відповідає зональній сферичній функції φ, звужуємо його на підгрупу H і розкладаємо одержане зображення підгрупи на незвідні компоненти. Позначимо через V простір зображення T. Нехай V розкладається на незвідні підпростори за формулою $V = \sum\limits_{\alpha} \oplus V_\alpha$, де одиничне зображення T_0 міститься з одиничною кратністю. Нехай P_α — проекційний оператор з V, на V_α. Оператор P_α комутує зі звуженням T на H. Нехай p — точка в X, інваріантна при дії H, і $\varphi(p) = 1$. Теорема додавання витікає з рівності

$$\varphi(gx) = \sum_{\alpha} (P_\alpha(L(g^{-1})\varphi))(x), \quad g \in G,$$

де $L(g^{-1})$ — оператор лівого квазірегулярного зображення групи G. Вона одержується при $x = hg_1p$, $g_1 \in G$, $h \in H$:

$$\varphi(g_2hg_1p) = \sum_{\alpha} L(h^{-1})(P_\alpha(L(g_2^{-1})\varphi))(g_1p).$$

Таким чином, для одержання теореми додавання необхідно одержати вираз $(P_\alpha(L(g_2^{-1})\varphi))(g_1p)$. Виберемо в просторі V ортонормований базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^N$, узгоджений з розкладом $V = \sum\limits_{\alpha} \oplus V_\alpha$. Нехай $\mathbf{e}_1$ інваріантний відносно підгрупи H і $t_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, T(g)\mathbf{e}_j \rangle$. Тоді $\varphi(gp) = t_{11}(g)$, $g \in G$, і набір $\{t_{i1}(g) \mid 1 \leqslant i \leqslant N\}$ може розглядатися як ортогональний базис у V. Зафіксуємо α і позначимо через I множину індексів, що нумерують базисні елементи в V_α. Тоді кожне $f \in V$ має вигляд $f = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j t_{j1}(g)$, причому $P_\alpha f = \sum\limits_{j \in I} c_j t_{j1}(g)$. Застосовуємо ці твердження до функції $L(g^{-1})\varphi$ і вводимо функцію

$$f_\alpha(g_1, g_2) = (P_\alpha(L(g_1^{-1})\varphi))(g_2 p), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Тоді

а) $f_\alpha(g_1, g_2) = \sum_{j\in I} t_{1j}(g_1) t_{j1}(g_2) = \sum_{j\in I} \overline{t_{j1}(g_1^{-1})}\, t_{j1}(g_2)$;

б) $\sum_{g_2\in G} |f_\alpha(g_1, g_2)|^2 = \sum_{j\in I} |t_{j1}(g_1^{-1})|^2/N = f_\alpha(g_1, g_1^{-1})/N$;

в) $f_\alpha(h_1 g_1, g_2 h_2) = f_\alpha(g_1, g_2), \quad h_1, h_2 \in H$;

г) $f_\alpha(g_1, hg_2) = f_\alpha(g_1 h, g_2), \quad h \in H$;

д) $f_\alpha(g_1, kg_2) = f_\alpha(g_1, g_2), \quad k \in g_1^{-1} H g_1 \cap H$.

Ці рівності випливають з теореми Петера—Вейля, з того, що T унітарне і P_α комутує зі звуженням T на H, та з визначення $f_\alpha(g_1, g_2)$.

Припустимо, що для кожного $g_1 \in G$ існує однозначно визначена функція (з точністю до скалярного множника) $F(g_1, x) \in V_\alpha$, інваріантна відносно дії елементів з $g_1^{-1} H g_1 \cap H$. Тоді з рівності д) випливає, що існує залежне від g_1 число $F_1(g_1)$ таке, що $F_1(g_1) F(g_1, g_2 p) = f_\alpha(g_1, g_2)$. Беручи суму квадратів модулів цієї функції по g_2 і враховуючи співвідношення б), одержуємо рівняння для F_1, з якого випливає

$$f_\alpha(g_1, g_2) = \overline{F(g_1, g_1^{-1}p)}\, F(g_1, g_2 p) \left[(N\,|H|/|G|) \sum_{x\in X} |F(g_1, x)|^2\right]^{-1}.$$

Застосовуючи цей метод для $G = S(n+1, k)$, $H = S(n, k)$ і використовуючи формулу (9), Данкл [19] одержав теорему додавання для многочленів Кравчука. Нехай $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \min(x, N-y)$, $0 \leqslant r \leqslant x - s$, $0 \leqslant n \leqslant N$. Тоді ця теорема додавання має вигляд

$$K_n(2s + r + y - x;\ p, N) = \sum_{k=0}^{\min(n,x)} \sum_{l=\max(0,k+y-N)}^{k} \binom{k-l}{x-l}\binom{l}{x-s} \times$$

$$\times (-1)^{k+l} \frac{(-n)_k (y-N)_{k-l} (n-N)_{k-l}}{(-N)_{2k-l} (k-N-1)_{k-l}} (2p-1)^l p^{-2k} K_{n-k}(x-k;$$

$$p, N-2k+l) K_{n-k}(y-k;\ p, N-2k+l) K_l\left(r;\ \frac{2p-1}{p},\ x-s\right) \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} l-k,\ k-N-1,\ -s \\ y-N,\ l-s \end{matrix}\right| 1\right),$$

де $(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$.

6. Групи Шевалле та q-многочлени Кравчука. Число елементів кожного скінченного поля рівне $q = p^s$, де p — просте число. Більше того, для кожного $q = p^s$ існує єдине (з точністю до ізоморфізму) поле, яке містить q елементів. Його називають полем Галуа і позначають через $GF(q)$. Ми позначатимемо його через F. Через F^n позначатимемо n-вимірний простір над F. Нехай в F^n задана невироджена форма $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ над F і нехай $q = p^s$ непарне. Якщо форма B білінійна і кососиметрична, то n парне, $n = 2N$, і можна вибрати такий базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{-1}, \ldots, \mathbf{e}_{-N}\}$, що при $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = \sum_i w_i \mathbf{e}_i$ маємо

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} (v_i w_{-i} - v_{-i} w_i).$$

В цьому випадку говорять, що F^n — простір типу C_N. Групу лінійних перетворень в F^n, які зберігають цю форму, позначають через $Sp(2N, q)$.

Якщо форма B білінійна і симетрична, а n парне, то можуть бути дві можливості: 1) в F^n є такий базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-N}\}$, що

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} (v_i w_{-i} + v_{-i} w_i);$$

тоді F^n називають простором типу D_N, а групу лінійних перетворень, що зберігають цю форму, позначають $O(2N, q)$; або 2) в F^n є такий базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N+1}, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-N-1}\}$, що

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} (v_i w_{-i} + v_{-i} w_i) + v_{N+1} w_{N+1} - \varepsilon v_{-N-1} w_{-N-1},$$

де ε — фіксований елемент в F, що не є квадратом іншого елемента з F. Тоді говорять, що F^n належить типу ${}^2D_{N+1}$, а відповідну групу позначають через $O^{\varepsilon}(2N+2, q)$.

Якщо форма B симетрична, а n непарне, $n = 2N+1$, то в F^n є такий базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-N}, \mathbf{e}_0\}$, що

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} (v_i w_{-i} + v_{-i} w_i) + 2 v_0 w_0.$$

Тоді говорять, що простір F^n належить типу B_N, а відповідну групу позначають через $O(2N+1, q)$.

Якщо число елементів $|F|$ поля F рівне q^2, то в F можна визначити інволюцію $x \to \bar{x}$, що залишає нерухомими елементи підполя F_0, $|F_0| = q$. Тоді при парному n існує ермітова форма B і базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-N}\}$ такий, що

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} (\bar{v}_i w_{-i} + \bar{v}_{-i} w_i),$$

де ε — ненульовий фіксований елемент з F такий, що $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$. У цьому випадку F називають простором типу ${}^2A_{2N-1}$, а відповідну лінійну групу позначають через $U(2N, q^2)$.

Якщо ж n непарне, $n = 2N+1$, то існує такий базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-N}, \mathbf{e}_0\}$, що

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i} (\bar{v}_i w_{-i} + \bar{v}_{-i} w_i) + (-1)^{N+1} \bar{v}_0 w_0.$$

У цьому випадку кажуть, що F^n має тип ${}^2A_{2N}$, а відповідну групу позначають через $U(2N+1, q^2)$.

Розглянуті групи є аналогами простих (редуктивних) груп Лі. Вони відносяться до так званих груп Шевалле. До них відноситься і група $GL(n, q)$ невироджених лінійних перетворень в F^n.

Підпростір $W \subset F^n$ називають ізотропним, якщо $B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = 0$ для всіх $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in W$. У всіх розглянутих вище випадках $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ породжують максимальний ізотропний підпростір відносно відповідної білінійної форми. Всі максимальні ізотропні підпростори в F^n мають однакові розмірності.

Максимальною параболічною підгрупою H_k групи $GL(n, q)$ називають підгрупу лінійних перетворень, що залишають інваріантним деякий лінійний підпростір L, $\dim L = k$. У відповідному базисі така підгрупа складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad A \in GL(k, q), \quad D \in GL(n-k, q).$$

Для останніх розглянутих вище груп максимальні параболічні підгрупи H_n складаються з лінійних перетворень, що переводять в себе деякий ізотропний підпростір максимальної розмірності.

Стентон [20—22] вирахував сферичні функції на однорідних просторах G/H_v, інваріантних відносно підгрупи H_n. Більшість цих функцій виражаються через q-многочлени Кравчука. Ці сферичні функції показані в таблиці. Число m, яке є індексом q-многочленів Кравчука, характеризує незвідне зображення групи G класу 1 відносно підгруп H_v і H_n, яке реалізується в деякому підпросторі простору $L^2(G/H_v)$.

Тип простору	Група Шевалле	Підгрупи H_n і H_v	Сферичні функції
B_N	$SO(2N+1, q)$	$H_N,\ H_v.\ \ 1 \leqslant v \leqslant N$	$K_m(q^{-k};\ q^{-N-2},\ v \mid q)$
C_N	$Sp(2N, q)$	$H_N,\ H_v,\ \ 1 \leqslant v \leqslant N$	$K_m(q^{-k};\ q^{-N-2},\ v \mid q)$
${}^2D_{N+1}$	$SO^-(2N+2, q)$	$H_N,\ H_v,\ \ 1 \leqslant v \leqslant N$	$K_m(q^{-k};\ q^{-N-3},\ v \mid q)$
${}^2A_{2N-1}$	$SU(2N, q^2)$	$H_N,\ H_v,\ \ 1 \leqslant v \leqslant N$	$K_m(q^{-2k};\ q^{-2N-5},\ v \mid q^2)$
${}^2A_{2N}$	$SU(2N+1, q^2)$	$H_N,\ H_v,\ \ 1 \leqslant v \leqslant N$	$K_m(q^{-2k};\ q^{-2N-3},\ v \mid q^2)$
D_N	$SO(2N, q)$	$H_N,\ H_N$	$K_m(q^{-2k};\ q^{-N-1},\ N \mid q)$
A_{N-1}	H_n	$H_N = H_v = GL(n, q) \times$ $\times\, GL(N-n, q)$	$K_m^{\mathrm{Aff}}(q^{-k};\ q^{n-N},\ n \mid q)$.
D_M	H_M	$H_N = H_v = GL(M, q)$	$K_m^{\mathrm{Aff}}(q^{-2k};\ q^{1-M},\ M/2 \mid q^2)$
${}^2A_{2M-1}$	H_M	$H_N = H_v = GL(M, q^2)$	$K_m^{\mathrm{Aff}}((-q)^{-k};\ (-q)^M,$ $M \mid -q)$

Зональні сферичні функції φ_m незвідних зображень групи G відносно підгрупи H_n (вони є сферичними функціями однорідного простору G/H_n, інваріантними відносно підгрупи H_n) задовольняють співвідношення

$$\varphi_m(g_1)\varphi_m(g_2) = |H_n|^{-1} \sum_{h \in H_n} \varphi_m(g_1 h g_2),$$

де $|H_n|$ — число елементів підгрупи H_n. Застосовуючи цю формулу до знайдених сферичних функцій, дістаємо формули множення для q-многочленів Кравчука. Наприклад, якщо s, t, m, N — цілі числа, $q = p^n$, де p — просте непарне число, і $0 \leqslant s, t, m \leqslant N$, то

$$K_m(q^{-s};\ q^{-N-2},\ N \mid q)\, K_m(q^{-t};\ q^{-N-2},\ N \mid q) =$$
$$= \sum_{x,y} A(x, y, s, t, N, q)\, K_m(q^{-(s-t+2x+y)};\ q^{-N-2},\ N \mid q).$$

Явний вираз для коефіцієнта $A(x, y, s, t, N, q)$ можна знайти в роботі [21]. В [20—22] виведені також інші формули множення і формули додавання для q-многочленів Кравчука.

7. Квантова група $SU_q(2)$ та q-многочлени Кравчука. Зображення груп Шевалле описують q-многочлени Кравчука з $q = p^s$, де p — просте число. q-Многочлени Кравчука з довільним q можна описати за допомогою зображень квантових груп [11]. Квантові групи виникли в квантовому методі оберненої задачі розсіяння. Вони є більш складними структурами, ніж дискретні чи неперервні групи. А саме, квантова група не існує як многовид. Вона визначається за допомогою алгебри функцій на квантовій групі, яка є алгеброю Хопфа. (Детальний і ясний опис квантових груп як алгебр Хопфа див. в [23].) Зображення квантової групи $SU_q(2)$ детально описані в [24, 25].

Алгебра функцій $A \equiv A(SU_q(2))$ на квантовій групі $SU_q(2)$ є асоціативною алгеброю, породженою елементами x, u, v, y, які задовольняють с піввідношенням

$$ux = qxu, \quad vx = qxv, \quad yu = quy, \quad yv = qvy,$$
$$vu = uv, \quad xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1.$$

В цю асоціативну алгебру вводиться структура алгебри Хопфа, тобто задаються операції комноження $\Delta : A \to A \otimes A$, коодиниця $\varepsilon : A \to C$ є антипод $S : A \to A$, а також $*$-операція $a \to a^*$: $A \to A$, яка перетворює A в $*$-алгебру Хопфа. (Явний вигляд цих операцій див. в [24].) Незвідн- зображення квантової групи $SU_q(2)$ (які є козображеннями $*$-алгебри Хопфа A $(SU_q(2))$ [26] задаються цілим чи напівцілим додатним числом l і позначаються через T_l. В просторі зображення існує базис e_m, $m = -l$ $-l+1, \ldots, l$, в якому матричні елементи t^l_{mn} зображуються формулою, [11]

$$t^l_{mn} = a^l_{mn} (q^{-1/2} i^{-1} v)^{l-n} (q^{1/2} i v^*)^{l-m} \times$$
$$\times k_{l-m}\left(q^{-2l+2n};\ \frac{q^{-2l+2m-2}}{vv^*},\ 2l \mid q^2\right)(x^*)^{m+n}, \tag{10}$$

де $n \geqslant m \geqslant -n$ або $m \geqslant n \geqslant -m$, $k_n(x;\, b,\, N \mid q)$ — q-многочлени Кравчука (6) і x, v — породжуючі елементи алгебри $A\,(SU_q(2))$. Співвідношення ортогональності для матричних елементів $\sum\limits_m t^l_{nm} (t^l_{rm})^* = \delta_{nr}$ приводить до співвідношення ортогональності для q-многочленів Кравчука k_n.

Матричні елементи t^l_{mn} задовольняють співвідношенню

$$\sum_l \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & k & m \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ i & r & n \end{pmatrix}_q t^l_{mn} = t^{l_1}_{ji} t^{l_2}_{kr},$$

де $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & k & m \end{pmatrix}_q$ — коефіцієнти Клебша—Гордана квантової групи $SU_q(2)$ [27]. Використовуючи відповідний явний вигляд коефіцієнтів Клебша—Гордана та формулу (10), одержуємо формулу множення для q-многочленів Кравчука

$$k_n(q^{-x};\, b,\, N_1 \mid q)\, k_m(q^{-y};\, q^{m+n}c,\, N_2 \mid q) =$$
$$= \sum_r B(x, y, b, c, m, n, q)\, k_{N_1+m-n-r}(q^{x-y-N_1+r};\, q^{n-x-m+r}c,\, N_1 + N_2 - 2_r \mid q)$$

Явний вигляд коефіцієнтів $B(\ldots)$ див. в [28] або в [29].

1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп.— М. : Наука, 1965.— 588 с.
2. *Виленкин Н. Я., Климык А. У.* Представления групп Ли и специальные функции // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ.— 1990.— 59.— С. 145—264.
3. *Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U.* Representation of Lie groups and special functions.— Dordrecht: Kluwer, 1991.— Vol. 1.— 610 p.
4. *Weyl H.* The theory of groups and quantum mechanics.—New York: Dover, 1932.—312 p.
5. *Wigner E. P.* The application of group theory to the special functions of mathematical physics // Princeton Lect.— 1955.
6. *Bargmann V.* Irreducible unitary representations of the Lorentz group // Ann. Math.— 1947.— 48.— P. 568—590.
7. *Kzawtchouk M.* Sur une generalization des polynomes d'Hermite // C. r. Acad. sci. — 1929.— P. 620—622.
8. *Hahn W.* Uber Orthogonalpolynome, die q—Differenzengleichuugen geniigen // Math. Nachr.— 1949.— 2.— P. 4—34.
9. *Stanton D.* Orthogonal polynomials and Chevalley groups // Special functions: group theoretical aspects and applications.— Dordrecht: Reidel, 1984.— P. 87—128.
10. *Delsarte Ph.* Properties and applications of the recurrence $F(i+1,\, k+1,\, n+1) = q^{k+1} F(i,\, k+1,\, n) - q^k F(i,\, k,\, n)$ // SIAM J. Appl. Math.—1976.— 31.— P. 262—270.
11. *Koornwinder T. H.* Representations of the twisted SU (2) quantum group and some q-hypergeometric orthogonal polynomials // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A.— 1989.— 92.— P. 97—117.

12. *Andrews G. E., Askey R.* Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes Math.— 1985.— **1171**.— P. 36—62.
13. *Koornwinder T. H.* Krawtchouk polynomials, a unification of two different group theoretical interpretations // SIAM J. Math. Anal.— 1982.— **13**.— P. 1011—1023.
14. *Askey R., Gasper G.* Convolution structure for Laguerre polynomials // J. Anal. Math.— 1977.— **31**.— P. 48—68.
15. *Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U.* Representation of Lie groups and special functions.— Dordrecht: Kluwer, 1992.— Vol. 2.— 622 p.
16. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретного переменного.— М. : Наука, 1985.— 216 с.
17. *Роземблюм А. В.* Спектральный анализ генераторов представлений группы $U(3)$ // Теорет. и мат. физика.— 1987.— **73**.— С. 475—479.
18. *Виленкин Н. Я., Климык А. У.* Представления группы $SU(1,1)$ и функции Кравчука—Мейкснера // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 6.— С. 12—16.
19. *Dunkl C. F.* Krawtchouk polynomials addition theorem and wreath product of symmetric groups // Indiana Univ. Math. J.— 1976.— **25**.— P. 335—358.
20. *Stanton D.* Some q-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups // Amer. J. Math.— 1980.— **102**.— P. 625—662.
21. *Stanton D.* Three addition theorems for some q-Krawtchouk polynomials // Geom. dedic.— 1981.— **10**.— P. 403—425.
22. *Stanton D.* A partially ordered set and q-Krawtchouk polynomials // J. Combin. Theory A.— 1981.— **30**.— P. 276—284.
23. *Koornwindez T. H.* Orthogonal polynomials in connection with quantum groups // Orthogonal polynomials: theory and practice.— Dordrecht: Kluwer, 1991.— P. 257—292.
24. *Representations* of the quantum group $SU_q(2)$ and the little g-Jacobi polynomials // T. T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami etc.// J. Funct. Anal.— 1991.—**99**.— P. 357—386.
25. *Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U.* Representation of Lie groups and special functions. Vol. 3 Representations of classical and quantum groups and special functions.— Dordrecht: Kluwer, 1992.— 634 p.
26. *Abe E.* Hopf algebras.— cambridge: Cambridge univ. press, 1980.— 346 p.
27. *Groza V. A., Kachurik I. I., Klimyk A. U.* Matrix elements and Clebsch—Gordan coefficients of the quantum group $SU_q(2)$ // J. Math. Phys.— 1990.— **31**.— P. 2769—2780.
28. *Groza V. A., Kachurik I. I., Klimyk A. U.* The quantum algebra $U_q(su_2)$ and basic hypergeometric functions.— Kiev, 1989.— 32 p.— (Препринт/АН УРСР. Ін-т теорет. фізики; № 89-51E).
29. *Гроза В. А., Качурик И. И.* Теоремы сложения и умножения для q-многочленов Кравчука, Хана и Рака // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 5.— С. 3—6.

Одержано 28.01.92