УДК 514.7

А. Н. Кочубей, д-р физ.-мат. наук («Укрэнергосетьпроект», Киев)

Многообразия с инвариантной полуримановой структурой почти произведения

Рассматривается многообразие M с полуримановой структурой почти произведения, инвариантной относительно группы преобразований G. В соответствующем расслоении реперов на M построена связность с некоторым свойством G-инвариантности.

Розглядається многовид M із напівріманововою структурою майже добутку, інваріантною відносно групи перетворень G. У відповідному розшаруванні реперів на M побудована зв'язність із деякою властивістю G-інваріантності.

1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Структурой почти произведения (СПП) на многообразии M называется (см., например, [1]) задание на M такой пары гладких распределений $M_m^{(1)}, M_m^{(2)}$, что в каждой точке $m \in M$ касательное пространство $T_m M$ распадается в прямую сумму: $T_m M = M_m^{(1)} \oplus M_m^{(2)}$.

Предположим, что на M действует некоторая группа преобразований G. Левое действие элемента $g \in G$ на M будем обозначать L_g. СПП называется G-инвариантной, если каждое линейное отображение $dL_g : T_m M \to T_{L_g m} M$ представимо в виде прямой суммы

$$dL_g = l_g^{(1)} \oplus l_g^{(2)}, \quad l_g^{(j)} : M_m^{(j)} \to M_{L_g m}^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Назовем G-инвариантную СПП с $M_m^{(1)} \neq \{0\}$ полуримановой, если на каждом подпространстве $M_m^{(1)}$, $m \in M$, задано вещественное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$, удовлетворяющее условиям: 1) пусть на некотором открытом множестве $U \subset M$ заданы векторные поля $X_1(m), \ldots, X_{n_1}(m)$, задающие локальный базис распределения $M_m^{(1)}$ ($n_1 = \dim M_m^{(1)}$); тогда $\alpha_{ij}(m) = \langle X_i(m), X_j(m) \rangle_m$ — гладкие функции на U; 2) отображения $l_g^{(1)}$ сохраняют скалярные произведения.

Многообразия с G-инвариантными полуримановыми СПП представляют интерес в связи с доказанным в [2] существованием на них случайных процессов диффузионного типа с G-инвариантными инфинитезимальными характеристиками. К числу таких многообразий принадлежит, в частности, тотальное пространство ассоциированного расслоения (G — группа автоморфизмов соответствующего главного расслоения $\mathcal{P}$), если в $\mathcal{P}$ задана G-инвариантная связность, а на стандартном слое существует риманова метрика, инвариантная относительно структурной группы [2]. Указанные условия выполнены, например (см. [2]), в случае, когда M — фазовое пространство общей теории относительности, G — группа движений пространства-времени.

В настоящей работе доказывается основное геометрическое свойство рассматриваемой структуры — существование в соответствующем ей расслоении реперов на M связности с некоторым свойством G-инвариантности (этот результат, использованный в [2], был приведен там без доказательства). Указан, в дополнение к [2], еще один пример многообразия с инвариантной полуримановой СПП.

2. Пусть многообразие M паракомпактно, и на M задана G-инвариантная полуриманова СПП. Обозначим через $\mathcal{F}_1(M)$ множество всех наборов $(m, f_1, \ldots, f_{n_1}, f_{n_1+1}, \ldots, f_n)$, где $m \in M$, $(f_1, \ldots, f_{n_1})$ — ортонормированный базис в $M_m^{(1)}$, $(f_{n_1+1}, \ldots, f_n)$ — произвольный базис в $M_m^{(2)}$. Пусть $G_1 = O(n_1) \times GL(n - n_1, \mathbb{R})$. Будем представлять элементы группы G_1 блочно-диагональными матрицами

$$a = \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 \\ 0 & a^{(2)} \end{pmatrix}, \quad a^{(1)} \in O(n_1), \quad a^{(2)} \in GL(n - n_1, \mathbb{R}).$$

Правое действие группы G_1 на $\mathcal{F}_1(M)$ задается так: если $a = (a_{ij})$, то

$$R_a(m, f_1, \ldots, f_n) = \left(m, \sum_{i=1}^{n} a_{i1} f_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} f_i\right).$$

Непосредственно проверяется, что $R_a: \mathcal{F}_1(M) \to \mathcal{F}_1(M)$, причем G_1 свободно действует на $\mathcal{F}_1(M)$, и $\mathcal{F}_1(M)/G_1$ естественно отождествляется с M. Каноническая проекция $\pi: \mathcal{F}_1(M) \to M$ имеет вид $\pi(m, f_1, \ldots, f_n) = m$.

Пусть $m \in M$, U — достаточно малая окрестность точки m, $Y_1(\mu), \ldots, Y_{n_1}(\mu)$ — векторные поля на U, порождающие $M_\mu^{(1)}$; $X_{n_1+1}(\mu), \ldots, X_n(\mu)$ — векторные поля на U, порождающие $M_\mu^{(2)}$, $\mu \in U$. Введем векторные поля $X_1(\mu), \ldots, X_{n_1}(\mu)$, полученные ортонормализацией при каждом $\mu \in U$ векторов $Y_1(\mu), \ldots, Y_{n_1}(\mu)$. Определим отображение $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \to G_1$ из соотношений

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_U(\mu, f_1, \ldots, f_n))_{ji} X_j(\mu), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и отображение $\psi_U: \pi^{-1}(U) \to U \times G_1$, полагая

$$\psi_U(\mu, f_1, \ldots, f_n) = (\mu, \varphi_U(\mu, f_1, \ldots, f_n)).$$

Отображение ψ_U биективно, и с его помощью на $\pi^{-1}(U)$ можно определить структуру многообразия так, что ψ_U — диффеоморфизм.

Если $U, V \subset M$ — открытые множества, для которых имеет смысл конструкция ψ_U, ψ_V, то, как легко видеть, структуры многообразия на $\pi^{-1}(U \cap V)$, определенные с помощью ψ_U, ψ_V, диффеоморфны. Тем самым задана структура многообразия на $\mathcal{F}_1(M)$, относительно которой действие группы G_1 гладкое. Итак, $\mathcal{F}_1(M)$ — главное расслоение со структурной группой G_1, базой M и проекцией π. Расслоение $\mathcal{F}_1(M)$ получается из расслоения $L(M)$ всех линейных реперов редукцией его структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$ к подгруппе G_1.

Связность Γ в подрасслоении $\mathcal{F}_1(M)$ расслоения $L(M)$ однозначно задает связность в $L(M)$ [3, 4]. Тем самым на M задается линейная связность, которой соответствует экспоненциальное отображение exp. Пусть D_m — область определения отображения $\exp_m$, $m \in M$.

Теорема. *Связность Γ в расслоении $\mathcal{F}_1(M)$ можно выбрать так, что для всех $m \in M$, $g \in G$, $f \in M_m^{(1)} \cap D_m$ имеем $dL_g(f) \in D_{L_g m}$ и*

$$L_g(\exp_m f) = \exp_{L_g m} dL_g(f). \quad (1)$$

Доказательство. Построение требуемой связности напоминает «конструкцию A» римановой связности в [3]. Пусть вначале в $\mathcal{F}_1(M)$ задана произвольная связность с формой связности $\varphi = (\varphi_{ij})$. Определим на $\mathcal{F}_1(M)$ 1-формы $\theta_1, \ldots, \theta_n$ следующим образом: значение $\theta_k(X)$, $X \in T_p\mathcal{F}_1(M)$,

$p = (m, f_1, \dots, f_n)$, равно коэффициенту c_k разложения $d\pi(X) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$. $\mathbb{R}^n$-значная 1-форма $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ называется канонической формой G_1-структуры [4]. Формы $\theta_1, \dots, \theta_n$ горизонтальны и в каждой точке из $\mathcal{F}_1(M)$ задают базис пространства, сопряженного к горизонтальному подпространству. Форма кручения Θ является $\mathbb{R}^n$-значной горизонтальной 2-формой. Поэтому, обозначая $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$, имеем

$$\Theta_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} T^i_{jk} \theta_j \wedge \theta_k, \quad T^i_{jk} = -T^i_{kj}, \tag{2}$$

T^i_{jk} — гладкие функции на $\mathcal{F}_1(M)$.

Положим

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n_1} (T^i_{jk} + T^j_{ki} + T^k_{ji})\, \theta_k, & 1 \leqslant i \leqslant n_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_1, \\ 0 \text{ — для остальных значений } i, j; \end{cases}$$

$$\omega_{ij} = \varphi_{ij} + \tau_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Как и в случае римановой связности [3], проверяется, что форма $\omega = (\omega_{ij})$ принимает значения в $o(n_1) \times gl(n - n_1, \mathbb{R})$ и является формой связности на $\mathcal{F}_1(M)$. Покажем, что, определив связность Γ с помощью формы ω, получим экспоненциальное отображение exp, удовлетворяющее (1).

Обозначим через F_p горизонтальное подпространство (относительно связности Γ) в $T_p\mathcal{F}_1(M)$, $p \in \mathcal{F}_1(M)$. Из определения связности следует, что сужение отображения $(d\pi)_p : T_p\mathcal{F}_1(M) \to T_{\pi(p)}M$ на F_p есть изоморфизм

$$\chi_p : F_p \to T_{\pi(p)}M.$$

Обозначим $F_p^{(1)} = \chi_p^{-1}(M^{(1)}_{\pi(p)})$.

При $i \leqslant n_1$ на векторах из $F_p^{(1)}$

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \wedge \theta_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} (T^j_{ki} + T^k_{ji})\, \theta_k \wedge \theta_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n_1} T^i_{jk} \theta_k \wedge \theta_j = -\Theta_i$$

в силу (2), поскольку

$$(T^j_{ki} + T^k_{ji})\, \theta_k \wedge \theta_j + (T^k_{ji} + T^j_{ki})\, \theta_j \wedge \theta_k = 0,$$

а с другой стороны, $\theta_k(X) = 0$ при $k > n_1$, $X \in F_p^{(1)}$. Воспользуемся первым уравнением структуры (см. [3] для случая расслоения $L(M)$; обобщение на редуцированные расслоения содержится в [4]):

$$d\theta_i = -\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \wedge \theta_j + \Theta_i, \quad i = 1 \dots, n.$$

При $i \leqslant n_1$ на векторах из $F_p^{(1)}$

$$d\theta_i = -\sum_{j=1}^{n_1} (\varphi_{ij} + \tau_{ij}) \wedge \theta_j = -\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \theta_j.$$

Пусть $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ — форма кручения, соответствующая форме связности ω. Записав первое уравнение структуры для формы связности ω, видим, что на векторах из $F_p^{(1)}$ компоненты $\Omega_1, \dots, \Omega_{n_1}$ формы кручения Ω обращаются в нуль.

Действие L_g группы G на многообразии M продолжается до автоморфизма Φ_g расслоения $\mathcal{F}_1(M)$:

$$\Phi_g(m, f_1, \dots, f_n) = (L_g m, dL_g(f_1), \dots, dL_g(f_n)) = (L_g m, l_g^{(1)}(f_1), \dots, l_g^{(1)}(f_{n_1}), \\ l_g^{(2)}(f_{n_1+1}), \dots, l_g^{(2)}(f_n));$$

соответствующий автоморфизм структурной группы G_1 есть тождественное отображение. Очевидно, $\pi \circ \Phi_g = L_g \circ \pi$, $d\pi \circ d\Phi_g = dL_g \circ d\pi$.

Исходя из связности Γ, автоморфизм Φ_g индуцирует на $\mathcal{F}_1(M)$ новую связность Γ' с формой связности $\omega'(Z) = \omega(d\Phi_g(Z))$ (см. [3]). При этом $d\Phi_g$ отображает горизонтальные подпространства связности Γ' в горизонтальные подпространства связности Γ. Обозначим через F_p'' подпространство в горизонтальном подпространстве F_p' связности Γ', определяемое так же, как $F_p^{(1)}$ в случае связности Γ. Легко видеть, что $d\Phi_g$ задает при каждом $p \in \mathcal{F}_1(M)$ изоморфизм подпространств $F_p'' \to F^{(1)}_{\Phi_g(p)}$. Каноническая форма θ не зависит от выбора связности и Φ_g-инвариантна. Поэтому и $d\theta$ Φ_g-инвариантна. Из первого уравнения структуры следует, что для всех $X, Y \in T_p\mathcal{F}_1(M)$

$$\Omega'(X, Y) = \Omega(d\Phi_g(X), d\Phi_g(Y)),$$

где Ω' — форма кручения связности Γ', и значения форм кручения берутся в соответствующих точках многообразия $\mathcal{F}_1(M)$. В частности, для компонент формы Ω' получаем $\Omega_i'(X, Y) = 0$ при $i = 1, \ldots, n_1$; $X, Y \in F_p''$.

Обозначим $W_p = \{X \in T_p\mathcal{F}_1(M) \mid d\pi(X) \in M^{(1)}_{\pi(p)}\}$. Поскольку формы кручения горизонтальны, из доказанного выше вытекают равенства

$$\Omega_i(X, Y) = \Omega_i'(X, Y) = 0, \quad i = 1, \ldots, n_1; \quad X, Y \in W_p. \tag{3}$$

Рассмотрим разность форм связности $\omega' - \omega$. Из определения формы связности следует, что разность $\omega' - \omega$ обращается в нуль на вертикальных векторах. Поэтому

$$\omega_{ij}' - \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \theta_k,$$

где c_{ij}^k — гладкие функции. На W_p

$$\omega_{ij}' - \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} c_{ij}^k \theta_k. \tag{4}$$

Из (3), (4) и первого уравнения структуры следует, что на W_p

$$\sum_{j,k=1}^{n_1} c_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij}' - \omega_{ij}) \wedge \theta_j = 0,$$

откуда $c_{ij}^k = c_{ik}^j$, $i, j, k = 1, \ldots, n_1$, поскольку формы $\theta_1, \ldots, \theta_{n_1}$ линейно независимы над W_p. С другой стороны, матрицы (ω_{ij}'), (ω_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n_1$, кососимметричны, так что $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$. Теперь при $i, j, k \leqslant n_1$

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k = -c_{jk}^i = c_{kj}^i = c_{ki}^j = -c_{ik}^j = -c_{ij}^k,$$

т. е. $c_{ij}^k = 0$, откуда $\omega_{ij}' = \omega_{ij}$ на W_p, $i, j \leqslant n_1$.

Таким образом, если $X \in F_p^{(1)}$, то

$$\omega_{ij}(d\Phi_g(X)) = 0, \; i, j = 1, \ldots, n_1. \tag{5}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству равенства (1). Пусть $m(t)$ — геодезическая в M, $m(0) = m$, $\dot m(0) = f \in M_m^{(1)} \cap D_m$. Достаточно проверить, что $\mu(t) = L_g(m(t))$ — геодезическая.

Поставим произвольной точке $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ в соответствие стандартное горизонтальное векторное поле $E(\xi)$ на $\mathcal{F}_1(M)$ (ср. с [3]), значение которого в точке $p = (m, f_1, \ldots, f_n)$ определяется соотношениями

$$E(\xi)(p) \in F_p, \quad d\pi(E(\xi))(p) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i.$$

Пусть $p(t) = (m(t), f_1(t), \dots, f_n(t))$ — горизонтальный лифт кривой $m(t)$ в $\mathcal{F}_1(M)$ и $f = \sum_{j=1}^{n_1} \xi_j f_j(0)$, $\xi_j \in \mathbb{R}^1$. Тот факт, что $m(t)$ — геодезическая, означает, что $\dot{m}(t) = \sum_{j=1}^{n_1} \xi_j f_j(t)$. Отсюда следует, что $p(t)$ — интегральная кривая векторного поля $E(\xi)$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n_1}, 0, \dots, 0)$. Положим $p_g(t) = \Phi_g(p(t))$ и обозначим через $q(t)$ интегральную кривую поля $E(\xi)$, начинающуюся в точке $q(0) = \Phi_g(p(0))$.

Разложим вектор $\dot{p}_g(t)$ на вертикальную и горизонтальную компоненты:

$$\dot{p}_g(t) = h(t) + v(t), \quad h(t) \in F_{p_g(t)}, \quad v(t) \in V_{p_g(t)} \tag{6}$$

(здесь V_p — вертикальное подпространство в точке $p \in \mathcal{F}_1(M)$). Имеем $d\pi(h(t)) = d\pi(\dot{p}_g(t)) = d\pi(d\Phi_g(E(\xi)(p(t)))) = dL_g\left(\sum_{j=1}^{n_1} \xi_j f_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n_1} \xi_j dL_g(f_j(t))$. Это означает, что $h(t) = E(\xi)(p_g(t))$. С другой стороны, из (5) и (6) следует

$$\omega_{ij}(v(t)) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n_1. \tag{7}$$

Рассмотрим гладкое отображение тотальных пространств расслоений $\varkappa: \mathcal{F}_1(M) \to TM$ вида

$$\varkappa(m, f_1, \dots, f_n) = \left(m, \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k f_k\right).$$

Если $X \in V_p$, $\omega_{ij}(X) = 0$ при $i, j \leqslant n_1$, то $d\varkappa(X) = 0$. В самом деле, рассмотрим отображение σ, ставящее в соответствие каждому элементу A алгебры Ли группы G_1 фундаментальное векторное поле $A^* = \sigma(A)$ [3]. Известно [3], что $A \to A^*(p)$ есть изоморфизм на вертикальное подпространство V_p. Пусть A таков, что $A^*(p) = X$. Поскольку $\omega(A^*) = A$, то компоненты A_{ij} с $i, j \leqslant n_1$ равны нулю. Пусть $r(t)$ — интегральная кривая поля A^*, $r(0) = p$, $\dot{r}(0) = X$. Кривая $r(t)$ представляет собой образ кривой $\{e^{tA}, t \geqslant 0\} \subset G_1$ относительно действия G_1 на $\mathcal{F}_1(M)$. С учетом блочной структуры матрицы A получаем, что множество $\{\varkappa(r(t)), t \geqslant 0\}$ состоит из одной точки $\varkappa(p)$, т. е. $d\varkappa(X) = 0$.

Теперь из (7) следует

$$d\varkappa(\dot{p}_g(t)) = d\varkappa(h(t)) = d\varkappa(E(\xi)(p_g(t))).$$

Но $\varkappa(p_g(0)) = \varkappa(q(0))$, т. е. $\varkappa(p_g(t)) \equiv \varkappa(q(t))$, так как $d\varkappa(\dot{q}(t)) = d\varkappa(E(\xi)(q(t)))$, а $d\varkappa(E(\xi))$ — сужение корректно определенного векторного поля на TM (пульверизации линейной связности [4]). Получаем $\mu(t) \equiv \pi(q(t))$. Это означает [3], что $\mu(t)$ — геодезическая. Теорема доказана.

3. Пусть $\mathcal{P}(M, K)$ — главное расслоение с базой M и структурной группой K. Будем предполагать, что K — компактная полупростая группа Ли. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — группа автоморфизмов расслоения $\mathcal{P}(M, K)$ и в $\mathcal{P}(M, K)$ задана $\mathfrak{A}$-инвариантная связность (см. [3]): $T_p\mathcal{P} = V_p \oplus H_p$, где V_p — вертикальное, а H_p — горизонтальное подпространство. Пусть группа $\mathfrak{A}$ действует на $\mathcal{P}$ слева; тогда определено левое действие на $\mathcal{P}$ группы $G = \mathfrak{A} \times K$:

$$L_{(a,k)} = L_a \circ R_{k-1}, \quad a \in \mathfrak{A}, \quad k \in K$$

(R_k обозначает правое действие элемента структурной группы).

Связность задает СПП на $\mathcal{P}$. Распределение H_p является K-инвариантным по определению связности и $\mathfrak{A}$-инвариантным в силу инвариантности связности. G-инвариантность вертикального распределения легко следует из представления

$$V_p = \{X \in T_p\mathcal{P} \mid d\pi(X) = 0\},$$

где π — каноническая проекция.

Пусть $\mathcal{K}$ — алгебра Ли группы K, φ — форма Картана — Киллинга на $\mathcal{K}$. Каждому элементу $\varkappa \in \mathcal{K}$ соответствует фундаментальное векторное поле $\varkappa^*$ на $\mathcal{P}$, причем $\varkappa \mapsto \varkappa^*(p)$ есть линейный изоморфизм $\mathcal{K}$ и V_p. Определим на V_p скалярное произведение, полагая для $X_1, X_2 \in V_p$

$$\langle X_1, X_2\rangle_p = -\varphi(\varkappa_1, \varkappa_2), \tag{8}$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2 \in K$, $X_j = \varkappa_j^*(p)$, $j = 1, 2$. Из формулы преобразования фундаментального векторного поля под действием структурной группы [3], инвариатности формы φ относительно присоединенного представления группы K и инвариантности фундаментальных векторных полей относительно автоморфизмов расслоения [5] следует, что преобразования из G сохраняют скалярное произведение (8). Таким образом, на $\mathcal{P}$ задана G-инвариантная полуриманова СПП.

1. *Yano K.* On affine connexions in an almost product space // Kodai Math. Semin. Repts.— 1959.— **11**, N 1.— P. 1—24.
2. *Кочубей А. Н.* О диффузиях с инвариантными производящими операторами // Теория вероятностей и ее применения.— 1989.— **34**, 4.— С. 656—663.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2-х т.— М. : Наука, 1981.— Т. 1.— 344 с.
4. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М. : Мир, 1970.— 412 с.
5. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения.— М. : Мир, 1975.— 350 с.

Получено 21.02.92