УДК 517.91/912

Т. Ф. Лучка, канд. фіз.-мат. наук (Київ. технол. ін-т легкої пром-ті),
А. Ю. Лучка, д-р. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

Розвиток прямих методів математичної фізики у працях М. П. Кравчука

Висвітлено основні результати праць М. П. Кравчука, присвячених становленню та розвитку методу моментів для диференціальних та інтегральних рівнянь.

Освещены основные результаты работ М. Ф. Кравчука, посвященных становлению и развитию метода моментов для дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Джерела прямих методів математичної фізики. Ряд задач математичної фізики, механіки, теорії пружності зводяться до варіаційних. Основний метод варіаційного числення полягає в тому, що знаходження екстремуму деякого функціоналу зводиться до розв'язування певного рівняння — рівняння Ейлера. На жаль, цей метод не завжди дає бажаний результат, оскільки знайти розв'язок рівняння Ейлера в явному вигляді можна лише у виняткових випадках. В зв'язку з цим виникла потреба створення методів, які б застосовувались безпосередньо до варіаційних задач, без попереднього їх зведення до рівнянь Ейлера. Пошуки таких методів увінчались успіхом і привели до створення прямих методів варіаційного числення, ідею яких виклав В. Рітц у працях [1, 2].

Розвиток варіаційних методів стимулював створення більш загальних проекційних методів, частинними випадками яких є метод Бубнова — Гальоркіна, метод моментів, метод колокації та ін. Розробці проекційних методів сприяла також потреба знаходження розв'язків несамоспряжених задач математичної фізики. Ідеї методу Бубнова — Гальоркіна містяться у відомих працях І. Г. Бубнова [3] і Б. Г. Гальоркіна [4].

Обгрунтуванню і подальшому розвитку варіаційних методів присвячені фундаментальні роботи М. М. Крилова [5—7] і М. М. Боголюбова [8]. В них, зокрема, М. М. Крилов створив прямий метод, який у літературі часто називають «метод моментів». Ідею методу він повідомив на засіданні секції фізико-математичного відділення ВУАН 26 лютого 1926 року і виклав у праці [9]. Так, М. М. Крилов, розглядаючи крайову задачу

$$y'' + q(x)\, y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{1}$$

запропонував наближений розв'язок шукати у вигляді

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x), \tag{2}$$

де $\{\varphi_i(x)\}$ — задана координатна система функцій, а невідомі параметри $a_i = a_i(n)$, $i = \overline{1, n}$, визначати з умови

$$\int_a^b L(y - y_n)\, M\varphi_k dx = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

тобто із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У співвідношенні (3) $(Ly) \times \times (x) := y'' + q(x)\, y$ і M — лінійний диференціальний оператор, що задовольняє умову

$$\int_a^b LzMzdx > 0 \quad \forall z \in D(L). \tag{4}$$

У випадку, коли $(Mz)(x) := z'' + r(x)\, z$ і виконуються співвідношення $q(x) + r(x) < 0$, $q''(x) + r''(x) + 2q(x)\, r(x) > 0$, М. М. Крилов довів справедливість нерівності (4) і встановив оцінки

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon_n}, \int_a^b |y''(x) - y_n''(x)|^2 dx \leqslant K\varepsilon_n. \tag{5}$$

В оцінках похибки (5) $y(x)$ — точний розв'язок крайової задачі (1), $y_n(x)$ — наближений розв'язок, знайдений за методом (2), (3), C і K — сталі, які не залежать від n, і

$$\varepsilon_n = \int_a^b |M(y - u_n)|^2 dx, \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x), \tag{6}$$

причому коефіцієнти b_i визначаються з умови мінімуму інтегралу (6).

Зауважимо, що в науковому повідомленні на засіданні фізико-математичного відділення ВУАН 2 квітня 1926 року М. М. Крилов виклав суть методу для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Із викладеного випливає, що М. М. Крилов не тільки запропонував новий прямий метод математичної фізики, але й обгрунтував його для частинних класів рівнянь.

Метод моментів грунтовно дослідив М. П. Кравчук у фундаментальних працях, опублікованих в 1926—1937 роках. Основні результати його досліджень описані нижче.

2. Застосування методу моментів до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. В працях [10—24] М. П. Кравчук розглядав задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння

$$y^{(m)} + p_1(x)\, y^{(m-1)} + \ldots + p_m(x)\, y = f(x), \quad a < x < b, \tag{7}$$

який задовольняє крайові умови

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \beta_{ij} y^{(i)}(b)] = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{8}$$

де коефіцієнти $p_i(x)$ і функція $f(x)$ сумовні зі своїм квадратом на відрізку $[a, b]$.

До задачі (7) і (8) застосовується метод моментів, суть якого полягає в тому, що наближений розв'язок шукається у вигляді

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x), \tag{9}$$

а невідомі параметри $a_i = a_i(n)$, $i = \overline{1, n}$, визначаються з умови

$$\int_a^b (Ly_n - f) M\varphi dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

в якій

$$Ly := y^{(m)} + p_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + p_m(x) y, \tag{11}$$

$$My := y^{(m)} + q_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + q_m(x) y, \tag{12}$$

причому коефіцієнти $q_i(x)$ — неперервні функції, зокрема сталі, тобто із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} a_k = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

$$\beta_{ik} = \int_a^b L\varphi_k M\varphi_i dx, \quad f_i = \int_a^b f M\varphi_i dx, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Координатна система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ визначається із задачі

$$M\varphi_i = \psi_i, \quad U_l\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad l = \overline{0, m-1}, \tag{14}$$

в якій $\{\psi_i(x)\}$ — лінійно незалежна і повна в $L_2(a, b)$ система функцій, де оператор M виражається за формулою (12) і

$$U_l y := \sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} y^{(l)}(a) + \beta_{ij} y^{(l)}(b)], \qquad l = \overline{0, m-1}. \tag{15}$$

Основний результат робіт [13, 15, 18, 19] полягає в тому, що у випадку, коли задачі (7), (8) і (14) мають єдині розв'язки, при достатньо великих n система лінійних рівнянь (13) має єдиний розв'язок і справедливі співвідношення

$$\begin{gathered} |y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)| \to 0, \quad n \to \infty, \quad l = \overline{0, m-1}, \\ \int_a^b |y^{(m)}(x) - y_n^{(m)}(x)| dx \to 0, \quad n \to \infty. \end{gathered} \tag{16}$$

Аналіз співвідношень (16) показує, що наближення, побудовані згідно з методом моментів, разом з їх похідними до порядку m — 1-го включно збіжні рівномірно, а похідна m-го порядку — в середньому, відповідно до розв'язку задачі (7), (8) і його похідних. Основними засобами, з допомогою яких М. П. Кравчук обгрунтував метод моментів, були метод функції Гріна та теорія рядів Фур'є.

У випадку, коли координатні ф ункції у формулі (9) — власні функції задачі $M\varphi = \mu\varphi$, $U_i \varphi = 0$, $i = \overline{0, m-1}$, метод моментів вироджується у метод Бубнова — Гальоркіна або, як його називав М. М. Крилов, метод узагальненого гармонічного аналізу. Якщо в умові (10) $M = L$, метод моментів збігається з методом найменших квадратів.

У дослідженнях М. П. Кравчука і К. Я. Латишевої [22—24, 25] обгрунтовано метод моментів для лінійних диференціальних рівнянь з особливостями в коефіцієнтах.

При дослідженні прямих методів важливу роль відіграють оцінки, які характеризують швидкість збіжності методу залежно від числа вибраних координатних функцій. М. П. Кравчук поставив перед собою задачу визначення найбільш точно порядку малості похибки $y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)$, $l = \overline{0, m-1}$. Оскільки для довільної координатної системи функцій задача не розв'язана і по сьогодні, в дослідженнях [17 — 19, 21] він зупинився на двох важливих випадках, коли наближений розв'язок шукається у вигляді тригонометричного чи алгебраїчного многочленів.

Для самоспряженої періодичної задачі (7) з періодичними крайовими умовами з періодом 2π, тобто $a = 0$, $b = 2\pi$, $y^{(l)}(0) = y^{(l)}(2\pi)$, $l = \overline{0, m-1}$, у випадку, коли існує єдиний розв'язок, а координатна система $\{\varphi_i(x)\}$ визначається із самоспряженої періодичної задачі (14) в якій $\{\psi_i(x)\}$ — тригонометрична система, М. П. Кравчук одержав точні по порядку оцінки

$$|y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)| \leqslant \frac{A_l \ln n + B_l}{n^{m-1}}, \quad l = \overline{0, m-1}, \tag{17}$$

де A_l, B_l — сталі, які не залежать від n. Аналогічні оцінки він встановив для періодичних крайових задач із періодом π. Зауважимо, що оцінка (17) є безпосереднім узагальненням результатів А. Лебега про наближення функції сумами Фур'є.

Для несамоспряжених періодичних задач результати М. П. Кравчука не мають завершеного вигляду. Він одержав лиш оцінки

$$|y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)| \leqslant \frac{A_l \ln n + B_l}{n}, \quad l = \overline{0, m-1} \tag{18}$$

Зауважимо, що оцінка (18) пізніше уточнювалась іншими авторами і набула завершеного вигляду.

М. П. Кравчук добре усвідомлював, що швидкість збіжності методу моментів істотно залежить від гладкості розв'язків вихідної задачі. Зокрема, в статті [19] він відмічав, що точність наближення $y_n(x)$ збільшується при фіксованому n, якщо існують похідні від розв'язку $y(x)$ вищого порядку, ніж m. Ця ідея яскраво викладена в монографії [18]. Наприклад, розглядаючи задачу (7), (8) і припускаючи, що вона має єдиний розв'язок, а функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$, $f(x)$ неперервно диференційовані r раз, причому r-та похідна задовольняє умову Ліпшиця з показником α, для наближень (9), у яких функції $\{\varphi_i(x)\}$ визначаються із задачі (14), де $\{\psi_i(x)\}$ — алгебраїчні многочлени, М. П. Кравчук одержав оцінки, з яких, зокрема, для несамоспряжених задач випливає

$$\int_a^b |y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{C_l}{n^{2(m+r+\alpha-l-2/3)}}, \tag{19}$$

а для самоспряжених задач —

$$|y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)| \leqslant \frac{D_l}{n^{m+r+\alpha-l-1}}, \quad l = \overline{0, m-1}, \tag{20}$$

причому сталі C_l і D_l не залежать від n.

Аналіз оцінок (19) і (20) показує, що у них порядок не оптимальний, і він уточнювавсь як самим М. П. Кравчуком, так і іншими авторами. Наприклад, І. К. Даугавет в статті [26], опублікованій в 1965 році, для методу моментів при тих же припущеннях встановив оцінку

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant O\left(\frac{\ln n}{n^{m+r+\alpha}}\right). \tag{21}$$

В монографії [18] М. П. Кравчук запропонував і обгрунтував більш загальний алгоритм методу моментів. Серед одержаних різноманітних оцінок звертає на себе увагу оцінка

$$|y^{(l)}(x) - y_n^{(l)}(x)| \leqslant \frac{A_l + B_l \ln n}{n^{m-l}\sqrt{1-x^2}}, \quad l = \overline{0, m-1}, \tag{22}$$

яка при $l = 0$ по порядку досить близька до оцінки (21), де сталі A_l і B_l не залежать від n. Оцінка (22) встановлена для задачі (7), (8) ($a = -1$, $b = 1$) за припущення, що в диференціальному виразі (11) коефіцієнти $p_i\ (x)$ — неперервні функції та існує функція Гріна $\Gamma(x, t)$ розглядуваної задачі, яка має неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial^{l+p}\Gamma(x, t)}{\partial x^l \partial t^p}, \quad l = \overline{0, m-1}, \quad p = \overline{0, m-l-1}.$$

Відмічені тут та інші результати по обгрунтуванню методу моментів для крайової задачі (7), (8) М. П. Кравчук переніс на крайові задачі для систем лінійних диференціальних рівнянь [18].

3. Метод моментів для інтегральних рівнянь. М. П. Кравчук вніс істотний вклад у розвиток теорії методу моментів. Картина стає більш повнішою, якщо згадати результати, що містяться в працях [14, 18]. В них розглядається інтегральне рівняння

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(t), \tag{23}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(a, b)$ і $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx dt < \infty$.

До рівняння (23) М. П. Кравчук застосовує метод моментів, згідно з яким наближений розв'язок шукається у вигляді

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x), \tag{24}$$

де $\{\varphi_i(x)\}$ — повна в $L_2(a, b)$ система функцій, а невідомі параметри a_0, $a_1, \ldots, a_n$ визначаються з умови

$$\int_a^b \left\{ y_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, y_n(t)\, dt - f(x) \right\} A(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0, \tag{25}$$

$$A(x) > 0, \quad i = \overline{0, n},$$

тобто із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} a_j = f_i, \quad i = \overline{0, n}, \tag{26}$$

в якій

$$\beta_{ij} = \int_a^b \left\{ \varphi_j(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_j(t)\, dt \right\} A(x)\, \varphi_i(x)\, dx,$$

$$f_i = \int_a^b f(x)\, A(x)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Для кожного регулярного значення параметра λ він встановив справедливість співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x y_n(x)\, dx = \int_c^x y(x)\, dx, \quad a \leqslant c \leqslant x \leqslant b,$$

а у випадку, коли розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (23) має неперервну p-ту похідну і наближення (24) — алгебраїчний многочлен, одержав важливу оцінку

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{p-1}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{27}$$

де $\omega(\delta)$ — модуль неперервності функції $y^{(p)}(x)$ і C — незалежна від n стала.

При обгрунтуванні методу, зокрема при доведені існування і єдиності розв'язку системи рівнянь (26) для достатньо великих n і знаходженні оцінки (27) М. П. Кравчук істотно використав повноту координатної системи функцій в $L_2(a, b)$ та важливий результат Ш. Валле Пуссена: для довільної функції $z(x)$, яка має неперервну p-ту похідну на відрізку $[a, b]$ можна побудувати алгебраїчний многочлен $z_n(x)$ степеня не вище n такий, що $|z(x) - z_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^p}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n > p.$

Аналогічні результати М. П. Кравчук одержав для системи лінійних інтегральних рівнянь. Крім цього, він відмітив, що такі ж результати справедливі і для інтегральних рівнянь та їх систем, розв'язки яких залежать від m незалежних змінних.

Аналізуючи метод, що визначається формулами (24) і (25), приходимо до висновку, що при $A(x) = 1$ він збігається з методом Бубнова — Гальоркіна. Такий випадок детально описаний в монографії [18]. Отже, можна вважати, що М. П. Кравчук повністю обгрунтував метод Бубнова — Гальоркіна для лінійних інтегральних рівнянь та їх систем.

4. Застосування методу моментів до диференціальних рівнянь із частинними похідними. М. П. Кравчук обгрунтував метод моментів для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Цьому питанню присвячені праці [27—29, 16, 18], в яких розглядались крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь еліптичного типу m-го порядку з двома незалежними змінними, хоч, як це відмічалось в [18], описані нижче результати справедливі для лінійних задач із довільним числом незалежних змінних.

Суть методу полягає в тому, що наближений розв'язок диференціального рівняння

$$Lu = f, \tag{28}$$

де $f \in L_2(\Omega)$ і

$$Lu := \sum_{k=0}^{m} a_{m-k,k}(x, y)\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k}\partial y^k} + \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1-k,k}(x, y)\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1-k}\partial y^k} + \ldots$$
$$\ldots + c(x, y)u,$$

яке має в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ єдиний розв'язок, що задовольняє на границі області Γ деякі лінійні крайові умови, шукається у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x, y), \tag{29}$$

а невідомі параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$ визначаються з умови

$$\iint_{\Omega} (Lu_n - f)\psi_i dxdy = 0, \; i = \overline{1, n}, \tag{30}$$

тобто із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Відносно системи координатних функцій припускається, що:

1) функції $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ лінійно незалежні і задовольняють ті ж крайові умови, що й шукана функція $u(x, y)$;

2) функції $\psi_i(x, y) = (M\varphi_i)(x, y)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ утворюють повну систему в $L_2(\Omega)$, де M — лінійний диференціальний оператор з тими ж коефіцієнтами при старших похідних, що й у диференціального оператора L, а у молодших членів коефіцієнти довільні.

При таких припущеннях М. П. Кравчук довів однозначну розв'язність системи рівнянь (30) при достатньо великих n і встановив справедливість співвідношень

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\partial^l}{\partial x^{l-k}\partial y^k}[u_n(x, y) - u(x, y)]\right| = 0, \quad l = \overline{0, m-2}, \quad k = \overline{0, l},$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k}\partial y^k}[u_n(x,y)-u(x,y)]\right|^2 dxdy=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega}|Lu_n-f|^2\,dxdy=0,$$

які гарантують рівномірну збіжність наближених розв'язків, побудованих за методом (29), (30), разом з їх частинними похідними до m — 2-го порядку і збіжність в середньому похідних m — 1-го порядку відповідно до розв'язку і його частинних похідних, а також збіжність в середньому нев'язки до нуля. Як і у випадку звичайних диференціальних рівнянь, при доведенні відмічених тверджень істотно використовувались функція Гріна та теорія ортогональних рядів.

М. П. Кравчук обгрунтував метод найменших квадратів і метод Бубнова — Гальоркіна для рівняння (28), які він трактував як частинні випадки методу моментів, покладаючи $M = L$ або вибираючи координатну систему функцій, що визначається із задачі $M\varphi = \mu\varphi$, відповідно.

Вибір системи функцій $\{\varphi_i(x, y)\}$, яка б задовольняла задані крайові умови, зв'язаний з певними труднощами, а тому у працях [28, 29, 18] М. П. Кравчук запропонував і обгрунтував збіжність модифікованого методу моментів, що позбавлений цієї вади. Ідею методу він виклав для задачі

$$\Delta u+\lambda\left\{a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u\right\}=f(x,y),\quad u|_{\Gamma}=\psi_l(x,y)\quad(31)$$

в припущенні, що при деякому фіксованому λ задача (31) має єдиний розв'язок $u(x, y)$. Наближений розв'язок, як завжди, шукається у вигляді (29), а невідомі параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$ визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\iint_{\Omega}(Lu_n-f)\,M\varphi_k dxdy+\tau^2\int_{\Gamma}(u_n-\psi)\,\varphi_k d\Gamma=0,\quad(32)$$

$k = \overline{1, n}$, де τ — деякий параметр, взагалі кажучи, залежний від n і такий, що $\tau\to\infty$ при $n\to\infty$,

$$Lu:=\Delta u+\lambda\left\{a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u\right\},$$

$$Mu:=\Delta u+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+r(x,y)u.$$

Координатна система функцій $\{\varphi_i(x, y)\}$ вважається повною в $L_2(\Omega)$, але не задовольняє дані крайові умови.

При таких припущеннях М. П. Кравчук довів, що при певних співвідношеннях між τ і λ система рівнянь (32) має єдиний розв'язок і справедливі співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=u(x,y),\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)dy=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)dx=0,\quad(\alpha,\beta)\in\Omega,\quad(x,y)\in\Omega.$$

Аналогічний результат він встановив для модифікованого методу найменших квадратів.

Метод моментів в застосуванні до диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного і параболічного типів досліджувався М. П. Кравчуком [18] і В. І. Можаром [30—32].

5. Метод моментів для спектральної задачі. У працях [27, 18] М. П. Кравчук розглядав спектральну задачу

$$L\varphi=\lambda M\varphi,\quad U_l\varphi=0,\quad l=\overline{0,m-1},\quad(33)$$

в якій L і M — диференціальні вирази порядку m та $m-1$ відповідно і оператор U_l визначається формулою (15). Для спектральної задачі (33) він застосував метод моментів і встановив такі результати:

1) власні значення λ_j задачі (33) можна одержати як границі коренів $\lambda_j^{(n)}$ рівняння

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & \dots & a_{1n}-\lambda b_{1n} \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & \dots & a_{2n}-\lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & a_{n2}-\lambda b_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (34)$$

в якому

$$a_{ij} = \int_a^b L\varphi_j L\varphi_i dx, \quad b_{ij} = \int_a^b M\varphi_j L\varphi_i dx, \quad i, j = \overline{1, n},$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_j^{(n)} = \lambda_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots;$

2) якщо $\lambda_j^{(n)}$ — простий корінь рівняння (34), то справедливе співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^l}{dx^l} y_j^{(n)}(x) = \frac{d^l}{dx^l} y_j(x), \quad l = \overline{0, m-1},$$

де $y_j(x)$ — власна функція, що відповідає власному значенню λ_j, а у наближеннях $y_j^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{jk}\varphi_k(x)$ коефіцієнти c_{jk} при фіксованому j визначаються з умови

$$\int_a^b Ly_j^{(n)} L\varphi_i dx = \lambda_j^{(n)} \int_a^b My_j^{(n)} L\varphi_i dx,$$

тобто із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda_j^{(n)} b_{ik}) c_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad i = \overline{1, n}.$$

Аналогічні результати справедливі для спектральної задачі (33), у якій L і M — диференціальні вирази з частинними похідними.

Із короткого огляду праць видно, що М. П. Кравчук вніс вагомий внесок у створення теорії методу моментів. Цей метод отримав подальший розвиток у працях вітчизняних та зарубіжних вчених. В цьому напрямку слід відмітити дослідження Н. Й. Польського [33, 34], С. Г. Міхліна [35, 36], Л. В. Канторовича [37], в яких метод моментів вивчався засобами функціонального аналізу. На базі методу моментів виникли нові прямі методи, що одержали широке застосування до різноманітних задач математичної фізики, диференціальних та інтегральних рівнянь, механіки і техніки.

1. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physic // J. reine und angew. Math.— 1908.— 135, N 1.— S. 1—62.
2. *Ritz W.* Theorie der Transversal-schwingungen einer quadratischen Platte mit frein Rändern // Ann. Phys.— 1909.— 28, N 4.— S. 737—786.
3. *Бубнов И. Г.* Избранные труды.— Л. : Судпромгиз, 1956.— 439 с.
4. *Галеркин Б. Г.* Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин // Вестн. инженеров.— 1915.— № 19.— С. 897—908.
5. *Крылов Н. М.* Избранные труды : В 3-х т.— Киев : Изд-во АН УССР, 1961.— Т. 1.— 266 с.
6. *Крылов Н. М.* Избранные труды : В 3-х т.— Киев : Изд-во АН УССР, 1961.— Т. 2.— 308 с.
7. *Крылов Н. М.* Избранные труды : В 3-х т.— Киев : Изд-во АН УССР, 1961.— Т. 3.— 352 с.
8. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды : В 3-х т.— Киев : Наук. думка, 1969.— Т. 1.— 648 с.

9. *Kryloff N.* Sur une méthode integration approcheé contenant comme cas particuliers la methode de W. Ritz, ainsi que celle des moindres carrés // C. r. Acad. sci. Paris.— 1926.— 182.— P. 676—678.
10. *Кравчук М. П.* Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтеграції диференціальних рівнянь // Тр. фіз.-мат. відділу ВУАН.— 1926.— 5, вип. 2.— С. 12—33.
11. *Кравчук М. П.* Замітка про спосіб М. Крилова для наближеної інтеграції диференціальних рівнянь математичної фізики // Там же.— 1927.— 2, вип. 2.— С. 5—8.
12. *Кравчук М. П.* Про похідні від наближених інтегралів деяких диференціальних рівнянь // Вісті Київ. політехн. ін-ту.— 1928.— Кн. 1.— С. 3—10.
13. *Кравчук М. П.* Про спосіб найменших квадратів та про спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціальних рівнянь // Там же.— С. 11—17.
14. *Кравчук М. П.* Про застосування способу моментів до наближеного розв'язання інтегральних та диференціальних рівнянь // Там же.— 1929.— Кн. 2/3.— С. 93—108.
15. *Кравчук М. П.* Про наближене розв'язання лінійних диференціальних рівнянь // Зап. Харк. мат. т-ва та Укр. ін-ту мат. наук. Сер. 4.— 1929.— 3.— С. 57—74.
16. *Кравчук М. П.* Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціальних рівнянь // Журн. мат. циклу ВУАН.— 1932.— № 1.— С. 7—13.
17. *Кравчук М. П.* Про наближене інтегрування лінійних диференціальних рівнянь // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер. 4.— 1932.— 6.— С. 11—18.
18. *Кравчук М. П.* Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь.— К. : Вид-во ВУАН, 1932—1936.— Вип. 1—2.
19. *Кравчук М. П.* Нові результати в способі моментів // Журн. мат. циклу ВУАН. — 1933.— 1, № 1.— С. 3—20.
20. *Кравчук М. П.* Про одне узагальнення способу моментів у задачі наближеної інтеграції звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Журн. Ін-ту математики ВУАН.— 1934.— № 3/4.— С. 77—98.
21. *Кравчук М. П.* Про точність наближення способом моментів розв'язок лінійних диференціальних рівнянь // Там же.— № 2.— С. 23—64.
22. *Кравчук М. П.* Спосіб моментів у застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь з правильними інтегралами // Вісті АН УРСР.— 1936.— № 5/6.— С. 291—298.
23. *Кравчук М. П., Латишева К. Я.* Застосування способу моментів до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах // Журн. Ін-ту математики АН УРСР.— 1936.— № 1.— С. 3—23.
24. *Кравчук М. Ф., Латышева К. Я.* Применение способа моментов к приближенному решению линейных дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах // Докл. АН СССР.— 1936.— 1, № 6. — С. 251—254.
25. *Латишева К. Я.* Наближене розв'язування за допомогою способу моментів лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах //Журн. Ін-ту математики АН УРСР.— 1936.— № 2.— С. 91—124.
26. *Даугавет И. К.* О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн.— 1965.— 6, № 1.— С. 70—85.
27. *Кравчук М. П.* Про наближене розв'язання лінійних задач математичної фізики // Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН.— 1929.— 4, вип. 4.— С. 179—191.
28. *Кравчук М. П.* Про наближення інтегралів рівнянь із частинними похідними еліптичного типу // Там же.— 1931.— 5, вип. 1.— С. 9—18.
29. *Кравчук М. П.* Про існування та наближене визначення розв'язку деяких лінійних рівнянь із частинними похідними // Там же.— С. 49—60.
30. *Можар В. І.* Застосування способу моментів до наближеного розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу // Журн. Ін-ту математики ВУАН.— 1935.— № 1.— С. 97—106.
31. *Можар В. І.* Про наближене визначення розв'язків лінійних рівнянь з частинними похідними параболічного типу способом моментів // Там же.— № 2.— С. 127—134.
32. *Можар В. І.* Про повну систему функцій, що анулюються на контурі даного, відкритого згори, прямокутного обсягу // Там же.— № 3/4.— С. 77—82.
33. *Польский Н. И.* Некоторые обобщения метода Б. Г. Галеркина // Докл. АН СССР.— 1952.— 86, № 3.— С. 469—472.
34. *Польский Н. И.* О сходимости некоторых приближенных методов анализа // Укр. мат. журн.— 1955.— 7, № 1.— С. 56—70.
35. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1950.— 428 с.
36. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1952.— 216 с.
37. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук.— 1948.— 3, № 6.— С. 89—185.

Одержано 28.02.92