УДК 517.956

Ю. Б. Орочко, д-р. физ.-мат. наук (Моск. ин-т электрон. машиностроения)

О существенной самосопряженности операторов, связанных с задачей Коши для волнового уравнения

Устанавливается достаточное условие типа Хартмана — Исмагилова существенной самосопряженности однопараметрического семейства неограниченных операторов, возникающего при решении задачи Коши для волнового уравнения. Дается аналог этого результата для неграниченных интегральных операторов.

Встановлюється достатня умова типу Хартмана — Ісмагілова істотної самопряженості однопараметричної сім'ї необмежених операторів, що виникає при розв'язуванні задачі Коші для хвильового рівняння. Дається аналог цього результату для необмежених інтегральних операторів.

1. Рассмотрим дифференциальное выражение Штурма — Лиувилля

$$S = -d^2/dx^2 + q(x) \tag{1}$$

с действительным потенциалом $q(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Обозначим через H соответствующий минимальный оператор в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $u_f(t, x)$ — решение задачи Коши

$$\partial^2 u/\partial t^2 + S[u] = 0, \tag{2}$$

$$u(0, x) = f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \tag{3}$$

которое имеет вид

$$u_f(t, x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \int\limits_{x-t}^{x+t} K(x, y, t) f(y)\, dy, \tag{4}$$

где $K(x, y, t)$— бесконечно дифференцируемое (по всем переменным) ядро, получаемое методом последовательных приближений, изложенным, например, в гл. 6 книги [1]. Введем однопараметрическое семейство линейных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с не зависящей от t областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R})$, действующих по формуле

$$U(t) f(x) = u_f(t, x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 < t < \infty. \tag{5}$$

В статье [2] отмечено, что операторы $U(t)$ симметричны (т. е. $K(y, x, t) = K(x, y, t)$) и их ограниченность хотя бы при одном значении t равносильна полуограниченности минимального оператора H. В случае неполуограниченности H естественно возникает вопрос: вытекает ли из существенной самосопряженности H аналогичное свойство операторов $U(t)$? Отрицательный ответ на него, полученный в теореме 1 работы [2], приводит к задаче отыскания условий существенной самосопряженности указанных операторов (при фиксированном t или для t из некоторого промежутка). В теореме 2 той же работы установлено, что для существенной самосопряженности $U(t)$ при всех $t > 0$ достаточно выполнения операторного неравенства $H \geqslant -m(x) E$ (E—единичный оператор) с положительной возрастающей непрерывной функцией $m(r)$, для которой $\int^\infty \exp(-\varepsilon m^{1/2}(r))\, dr = \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$. Нетрудно проверить, что указанные условия выполняются, если $q(x) \geqslant -c^2 \ln|x|$ при $|x| > r_0$ (c и r_0 — положительные константы). Основным результатом настоящей статьи является теорема 1 — признак существенной самосопряженности операторов $U(t)$ другого характера. Его особенность состоит в том, что имеющиеся в нем ограничения налагаются на $q(x)$ вдоль системы непересекающихся отрезков, уходящих в $\pm\infty$. За их пределами поведение $q(x)$ произвольно, так что здесь возможно сколь угодно быстрое стремление $q(x)$ к $-\infty$. Для дифференциальных операторов подобные утверждения известны как признаки самосопряженности типа Хартмана — Исмагилова.

Метод доказательства теоремы 1 можно применить также для доказательства существенной самосопряженности неограниченных симметрических интегральных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с ядром, носитель которого сосредоточен в окрестности диагонали, т. е. операторов вида

$$Qf(x) = \int_{x-t}^{x+t} G(x, y) f(y)\, dy, \quad D(Q) = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

$t > 0$ — фиксированная постоянная, $G(x, y)$ — эрмитово ядро. Вторым результатом данной работы является полученное в ней условие существенной самосопряженности типа Хартмана — Исмагилова таких операторов.

2. Зафиксируем число $l > 0$ и введем числовые последовательности a_j, b_j, $j \geqslant j_0 \geqslant 1$, удовлетворяющие условиям: 1) $a_{j+1} \leqslant a_j - l$; 2) $b_{j+1} \geqslant b_j + l$. В частности, $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = -\infty$, $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = +\infty$. Введем отрезки $\Delta_j^- = [a_j - 2l, a_j + l]$, $\Delta_j^+ = [b_j - l, b_j + 2l]$. Заметим, что при $|j - k| \geqslant 3$ отрезки Δ_j^- (Δ_j^+) и Δ_k^- (Δ_k^+) не имеют общих внутренних точек; отрезки Δ_j^- и Δ_k^+ не пересекаются при любых $j, k \geqslant j_0 + 1$. Пусть дифференциальное выражение S вида (1) с бесконечно дифференцируемым потенциалом $q(x)$ имеет то свойство, что соответствующий минимальный оператор H не ограничен снизу. Предположим также, что для каждого отрезка Δ_j^+, Δ_j^- выполняется оценка

$$(H\varphi, \varphi) = (S[\varphi], \varphi) \geqslant -\alpha_j \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset \Delta_j^\pm, \tag{6}$$

в которой α_j — положительная константа. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если*

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-l\alpha_j) = \infty, \tag{7}$$

то отвечающие дифференциальному выражению S операторы $U(t)$ существенно самосопряжены при всех $t \in (0, l]$.

Прежде чем доказывать теорему 1, приведем несколько свойств операторов $U(t)$.

Свойство 1. *При каждом $t > 0$ действие оператора $U^*(t)$ на $f \in D(U^*(t))$ определяется правой частью формулы* (4). *Функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ входит в $D(U^*(t))$ тогда и только тогда, когда правая часть формулы* (4) *принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.*

Это утверждение вытекает из вида операторов $U(t)$ и определения сопряженного оператора.

Свойство 2. *Зафиксируем $t > 0$. Класс $L_{2,0}(\mathbb{R})$ финитных функций из $L_2(\mathbb{R})$ входит в область определения замыкания $\overline{U}(t)$ оператора $U(t)$; если $h \in L_{2,0}(\mathbb{R})$, то $\overline{U}(t)h$ имеет вид правой части формулы* (4) *с $f = h$.*

Чтобы убедиться в справедливости свойства 2, построим для $h \in L_{2,0}(\mathbb{R})$ аппроксимирующую (в L_2-метрике) последовательность $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, с носителями функций f_n, сосредоточенными в отрезке, не зависящем от n. Из сходимости $U(t)f_n$ — правой части формулы (4), рассматриваемой при $f = f_n$, к аналогичному выражению с $f = h$ в L_2-метрике следует свойство 2.

Ниже в свойствах 3—5 зафиксирован некоторый отрезок $I = [\alpha, \beta]$. Символом I^t, $t > 0$, обозначен отрезок $[\alpha - t, \beta + t]$; $\chi(I)$, $\chi(I^t)$ — характеристические функции указанных отрезков.

Свойство 3. *При каждом $t > 0$ выполняется равенство*

$$\overline{U}(t)\chi(I) = \chi(I^t)\,\overline{U}(t)\chi(I).$$

Для его обоснования возьмем $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subseteq I$. Благодаря свойству конечной скорости распространения решений гиперболического уравнения (2) (эта скорость равна 1), носитель (по переменной x) решения $u_f(t, x)$ задачи Коши (2), (3) содержится в I^t при каждом $t > 0$. Поэтому действия на f операторов $U(t)\chi(I)$ и $\chi(I^t)\,\overline{U}(t)\,\chi(I)$ совпадают. Так как функции вида $\chi(I)\,h$, $h \in L_2(\mathbb{R})$, аппроксимируются в $L_2(\mathbb{R})$ функциями f с указанными свойствами, то естественный предельный переход с использованием формул (4), (5) приводит к справедливости свойства 3.

Свойство 4. *Для любого $t > 0$ справедлива формула*

$$\chi(I)\,U^*(t) = \chi(I)\,\overline{U}(t)\,\chi(I^t).$$

Эта формула получается путем перехода от равенства, полученного в свойстве 3, к равенству соответствующих сопряженных операторов. При этом используется тот факт, что из свойств 1, 2 вытекает соотношение $U^*(t)\,\chi(I^t) = U(t)\,\chi(I^t)$.

Свойство 5. *Предположим, что для заданных ограниченного промежутка I и числа $\delta > 0$ неравенство*

$$(S[\varphi], \varphi) \geqslant -\alpha^2 \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\varphi \subset I^\delta, \tag{8}$$

выполняется с некоторой константой $\alpha > 0$. Тогда при каждом $t \in (0, \delta]$ справедлива оценка

$$\|\overline{U}(t)\,\chi(I)\| \leqslant \operatorname{ch}(\delta\alpha) < \exp(\delta\alpha). \tag{9}$$

Чтобы ее получить, следует ввести фридрихсово расширение A_δ минимального оператора в $L_2(I^\delta)$, порожденного дифференциальным выражением S. Тогда для любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset I$, решение $u_f(t, x)$ задачи Коши (2), (3) при $t \in [0, \delta]$ можно представить в виде

$$u_f(t, x) = U(t) f(x) = \begin{cases} [\cos(tA_\delta^{1/2}) f](x), & x \in I^\delta, \\ 0, & x \notin I^\delta \end{cases} \tag{10}$$

(см., например, формулу (27) статьи [3]). Если $h(x) \in L_2(\mathbb{R})$, то функцию $\chi(I)\,h$ можно аппроксимировать в L_2-метрике функциями f с указанными свойствами. Благодаря ограниченности операторов $\cos(tA_\delta^{1/2})$ и замыкаемости $U(t)$ такая аппроксимация приводит к представлению $\overline{U}(t)\,\chi(I)\,h$, $t \in [0, \delta]$, в виде правой части формулы (10) с $\chi(I)\,h$ вместо f. Из последнего представления следует оценка (9), если учесть вытекающее из условия (8) неравенство $\inf A_\delta \geqslant -\alpha^2$ и оценку $\max\limits_{\lambda \geqslant -\alpha^2} |\cos(t\lambda^{\frac{1}{2}})| \leqslant \operatorname{ch}(t\alpha) < \exp(\delta\alpha)$ при $0 < t \leqslant \delta$.

3. Перейдем к доказательству теоремы 1. Его основной частью является обоснование существенной самосопряженности оператора $U(l)$, которое проводится с помощью методики, изложенной в работах [4, 5]. Рассмотрим уравнение

$$U^*(l)\,h = ih. \tag{11}$$

Существенная самосопряженность оператора $U(l)$ будет доказана, если мы покажем, что единственным его решением является функция $h(x) = 0$, а также установим аналогичное свойство уравнения $U^*(l)\,h = -ih$. Так как обоснование обоих фактов аналогично, ограничимся проверкой единственности решения уравнения (11). Зафиксируем отрезок $I = [a, b]$. Рассмотрим число

$$\alpha = (U^*(l)\,h, h) - (\overline{U}(l)\,\chi(I)\,h, \chi(I)\,h). \tag{12}$$

Здесь h — решение уравнения (11).

Так как $\overline{U}(l)$ — замыкание симметрического оператора $U(l)$ и, кроме того, справедливо равенство (11), то

$$\operatorname{Im}\alpha = \|h\|^2. \tag{13}$$

Преобразуем величину α, используя свойства 1—5 операторов $U(t)$. Заменим второй сомножитель скалярного произведения $(U^*(l)\,h, h)$ равным ему выражением $\chi(I)h+(1-\chi(I))h$. Если учесть, что $\bar{U}(l)\subseteq U^*(l)$, то после несложных преобразований получим

$$\alpha=\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}, \tag{14}$$

$$\alpha^{(1)}=(U^*(l)(1-\chi(I))h,\chi(I(h)), \tag{15}$$

$$\alpha^{(2)}=(U^*(l)h,(1-\chi(I))h)=i\|(1-\chi(I))h\|^2. \tag{16}$$

Введем отрезки $K^-=[a,a+l]$, $K^+=[b-l,b]$, $I^-=[a-l,a]$, $I^+=[b,b+l]$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\alpha^{(1)}=(\bar{U}(l)\chi(I^-)h,\chi(K^-)h)+(\bar{U}(l)\chi(I^+)h,\chi(K^+)h). \tag{17}$$

Доказательство. Так как $\chi(I)h=\chi^2(I)h$, то, перебросив оператор $\chi(I)$ со второго сомножителя скалярного произведения $\alpha^{(1)}$ на первый, получим $\alpha^{(1)}=(\chi(I)U^*(l)(1-\chi(I))h,\chi(I)h)$. Пусть $J=[a-l,b+l]$. Согласно свойству 4 операторов $U(t)$ справедливо равенство $\chi(I)U^*(l)=\chi(I)\bar{U}(l)\chi(J)$; кроме, того, $\chi(J)(1-\chi(I))=\chi(I^-)+\chi(I^+)$. Поэтому $\alpha^{(1)}=(\chi(I)\bar{U}(l)\chi(I^-)h,\chi(I)h)+(\chi(I)\bar{U}(l)\chi(I^+)h,\chi(I)h)$. Если ввести отрезки $J^-=[a-2l,a+l]$, $J^+=[b-l,b+2l]$, то $\bar{U}(l)\chi(I^\pm)h=\chi(J^\pm)\bar{U}(l)\chi(I^\pm)h$ по свойству 3 операторов $U(t)$. Преобразование полученного выражения для $\alpha^{(1)}$ с учетом последнего замечания, равенств $\chi(I)\chi(J^\pm)=\chi(K^\pm)$, $\chi(K^\pm)\chi(I)=\chi(K^\pm)$ и самосопряженности операторов $\chi(K^\pm)$ приводит к формуле (17).

С числовыми последовательностями a_j, b_j, введенными выше, свяжем отрезки $I_j=[a_j,b_j]$, $j\geqslant j_0$. Пусть

$$\alpha_j=(U^*(l)h,h)-(\bar{U}(l)\chi(I_j)h,\chi(I_j)h) \tag{18}$$

— числа (12), отвечающие отрезкам I_j. Из формулы (13) следует

$$\operatorname{Im}\alpha_j=\|h\|^2,\quad j\geqslant j_0. \tag{19}$$

Представление (14) для выражений α_j принимает вид

$$\alpha_j=\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(2)}, \tag{20}$$

причем $\alpha_j^{(1)}$, $\alpha_j^{(2)}$ — это скалярные произведения (15), (16) при $I=I_j$. На основании леммы 1 получим

$$\alpha_j^{(1)}=(\bar{U}(l)\chi(I_j^-)h,\chi(K_j^-)h)+(\bar{U}(l)\chi(I_j^+)h,\chi(K_j^+)h), \tag{21}$$

причем $K_j^-=[a_j,a_j+l]$, $K_j^+=[b_j-l,b_j]$, $I_j^-=[a_j-l,a_j]$, $I_j^+=[b_j,b_j+l]$. Так как $h\in L_2(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{j\to\infty}a_j=-\infty$, $\lim\limits_{j\to\infty}b_j=+\infty$, то из формулы (16) с $I=I_j$ следует

$$\lim_{j\to\infty}\alpha_j^{(2)}=0. \tag{22}$$

Поведение $\alpha_j^{(1)}$ при $j\to\infty$ описывает следующая лемма.

Лемма 2. *При выполнении условий доказываемой теоремы справедливо равенство*

$$\liminf_{j\to\infty}|\alpha_j^{(1)}|=0. \tag{23}$$

Доказательство проведем методом, восходящим к Р. С. Исмагилову (см. [6]). Предположим, что это равенство несправедливо. Тогда существует такое число c, что

$$0<c\leqslant|\alpha_j^{(1)}|,\quad j\geqslant j_1\geqslant j_0. \tag{24}$$

Оценим $|\alpha_j^{(1)}|$ сверху, применив к скалярным произведениям формулы (21) неравенство Коши — Буняковского. Оценку возникающих при этом выражений $\|\overline{U}(l)\chi(I_j^{\pm})h\|$ проведем с помощью свойства 5 операторов $U(t)$, примененного в случаях $I = I_j^-$, $I = I_j^+$. Замечая, что в указанных случаях отрезки I^δ совпадают с отрезками соответственно Δ_j^- и Δ_j^+, для которых условие (8) имеет вид (6), получаем неравенства $\|\overline{U}(l)\chi(I_j^{\pm})h\| \leqslant \exp(l\alpha_j)\|\chi(I_j^+)h\|$, вследствие которых

$$|\alpha_j^{(1)}| \leqslant \exp(l\alpha_j)(\|\chi(I_j^-)h\|\|\chi(K_j^-)h\| + \|\chi(I_j^+)h\|\|\chi(K_j^+)h\|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\exp(l\alpha_j)(\|\chi(I_j^-)h\|^2 + \|\chi(I_j^+)h\|^2 + \|\chi(K_j^-)h\|^2 + \|\chi(K_j^+)h\|^2). \qquad (25)$$

Из этого неравенства и предположения (24) вытекает оценка чисел $2c\exp(-l\alpha_j)$ суммой квадратов норм, содержащейся в последней формуле, при каждом $j \geqslant j_1$. Суммируя по $j \geqslant j_1$ такие оценки и учитывая, что содержащиеся в них отрезки, отвечающие разным значениям j, не пересекаются друг с другом, получаем сходимость ряда $\sum_{j=j_1}^{\infty}\exp(-l\alpha_j)$, что противоречит условию (7) теоремы. Из полученного противоречия следует справедливость леммы 2.

Переходя к пределу в равенстве (20) с учетом формул (22), (23), получаем, что $\lim_{k\to\infty}\alpha_{j_k} = 0$ для некоторой подпоследовательности последовательности α_j. Из формулы (19) вытекает равенство $h = 0$, означающее существенную самосопряженность оператора $U(l)$. Чтобы завершить доказательство теоремы 1, зафиксируем $t \in (0, l)$ и заметим, что из оценки (6) следует аналогичная оценка для функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем в каждом из отрезков $[a_j - 2t, a_j + t] \subset \Delta_j^-$, $[b_j - t, b_j + 2t] \subset \Delta_j^+$. Так как $0 < t < l$, то условие (7) обеспечивает расходимость ряда $\sum_{j=j_0}^{\infty}\exp(-t\alpha_j)$. Таким образом, все условия теоремы 1 выполняются, если в ней число l заменить любым $t \in (0, l)$. Поэтому рассуждения, используемые при доказательстве существенной самосопряженности оператора $U(l)$, применимы и при доказательстве существенной самосопряженности $U(t)$ при любых $t \in (0, l)$. Теорема 1 полностью доказана.

4. Простейший пример неограниченной числовой последовательности α_j, для которой условие (7) выполняется при любом $l > 0$, получим, если положим $\alpha_j = c\ln j$, $c = \mathrm{const} > 0$, $j \geqslant j_0$. В этом случае ряд (7) расходится для $l \leqslant c^{-1}$. Чтобы обеспечить выполнение оценок (6) с указанными α_j, достаточно предположить, что $q(x) \geqslant -c^2\ln^2 j$, $x \in \Delta_j^+$, $j \geqslant j_0$. В этом случае из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Для существенной самосопряженности операторов $U(t)$ при любом t из какого-нибудь промежутка $(0, l]$ достаточно, чтобы потенциал $q(x)$ соответствующего дифференциального выражения S удовлетворял оценкам*

$$q(x) \geqslant -c^2\ln^2 j, \quad c = \mathrm{const} > 0, \quad x \in V_j^{\pm}, \qquad (26)$$

на последовательностях V_j^-, V_j^+, $j \geqslant j_0$, непересекающихся отрезков фиксированной длины L, уходящих соответственно в $-\infty$ и $+\infty$. При выполнении указанных условий можно положить $l = \min\{3^{-1}L, c^{-1}\}$.

Для доказательства заметим, что можно подобрать отрезки $\Delta_j^{\pm} \subseteq V_j^{\pm}$ длины $3l$ с $l = \min\{3^{-1}L, c^{-1}\}$. Из сформулированных условий и приведенных выше рассуждений вытекает выполнение всех условий теоремы 1 для указанных l и $\Delta_j^{\pm}$. Применяя ее, получаем требуемое утверждение.

Теорему 1 можно использовать для получения условий существенной самосопряженности операторов $U(t)$ при любом $t > 0$.

Следствие 2. *Рассмотрим уходящие в $-\infty$ и $+\infty$ последовательности непересекающихся отрезков W_j^-, W_j^+ длины l_j такие, что*

$\lim\limits_{j\to\infty} l_j = \infty$. *Предположим, что*

$$q(x) \geqslant -c_j^2 \ln^2 j, \quad x \in W_j^{\pm}, \quad j \geqslant j_0, \tag{27}$$

и $\lim\limits_{j\to\infty} c_j = 0$. *Тогда операторы* $U(t)$ *существенно самосопряжены при всех* $t > 0$.

Доказательство. Взяв произвольное число $T > 0$, положим $c = T^{-1}$, $L = 3T$. Тогда для достаточно больших j, $j \geqslant j_1 \geqslant j_0$, будем иметь $l_j > L$, $c_j < c$. Сужая $W_j^{\pm}$, $j \geqslant j_1$, до отрезков $V_j^{\pm} \subset W_j^{\pm}$ длины L, получаем (как следствие условий (27)) неравенства (26) при $j \geqslant j_1$ с указанной константой c. Согласно следствию 1 отсюда вытекает существенная самосопряженность $U(t)$ для $t \in (0, l]$, где $l = \min\{3^{-1}L, c^{-1}\} = T$ — сколь угодно большое число, т. е. для любых $t > 0$.

При доказательстве следствий 1, 2 мы использовали то, что если $q(x) \geqslant -\alpha^2$, $x \in (a, b) = \Delta$, то квадратичная форма дифференциального выражения S удовлетворяет неравенству $(S[\varphi], \varphi) \geqslant -\alpha^2 \|\varphi\|^2$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Delta$. Можно получить оценки потенциала интегрального характера, влекущие за собой указанное неравенство. Оно выполняется, если, например,

$$\frac{1}{2}\int_\Delta q_-(x)\,dx \geqslant -\alpha, \quad q_-(x) = \min(0, q(x)), \quad x \in \Delta.$$

Сделанное замечание позволяет получить варианты следствий 1, 2, в которых левые стороны условий (26), (27) заменены соответственно выражениями $-\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{V_j^{\pm}} q_-(x)\,dx\Big)^2$ и $-\frac{1}{4}\Big(\int\limits_{W_j^{\pm}} q_-(x)\,dx\Big)^2$.

Сформулируем еще один признак существенной самосопряженности операторов $U(t)$ при всех t, очевидным образом вытекающий из теоремы 1.

Следствие 3. *Рассмотрим последовательности отрезков* $V_j^{\pm}$ *такие же, как в следствии* 1. *Пусть неравенство* $(S[\varphi], \varphi) \geqslant -\alpha\|\varphi\|^2$ *выполняется для* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset V_j^{\pm}$ *с фиксированной константой* $\alpha > 0$ *при любом* $j \geqslant j_0$. *Тогда операторы* $U(t)$ *существенно самосопряжены при всех* $t > 0$.

Этот результат приведен без доказательства в работе [2].

5. Рассмотрим симметрический интегральный оператор Q в $L_2(\mathbb{R})$, действующий по формуле

$$Qf(x) = \int\limits_{x-t}^{x+t} G(x, y) f(y)\,dy, \quad f \in D(Q) = C_0^\infty(\mathbb{R}), \tag{28}$$

$t > 0$ — фиксированное число. Будем считать, что эрмитово ядро $G(x, y)$ непрерывно в полосе $|x - y| \leqslant t$; вне этой полосы оно равно нулю. Если указанное ядро не ограничено на бесконечности, то оператор Q, вообще говоря, неограничен. Поэтому можно поставить вопрос о связи свойства существенной самосопряженности Q с поведением ядра $G(x, y)$ на бесконечности. Свидетельством его нетривиальности является следующий простой пример. С помощью преобразования Фурье нетрудно убедиться в том, что в случае ядра

$$G(x, y) = xy, \quad |x - y| \leqslant t, \tag{29}$$

оператор Q унитарно эквивалентен дифференциальному оператору $\hat{Q} = -\frac{dx}{dx}\, p(x) \frac{d}{dx}$, $p(x) = 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin xt}{x}$, с областью определения $D(\hat{Q})$ — преобразованием Фурье класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Первые признаки существенной самосопряженности подобных операторов со знакопеременным коэффициентом $p(x)$ получены недавно (см. [7]); для их применимости необходимо условие $p^{-1}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, которое в случае оператора $\hat{Q}$ не выполняется. Вопрос о существенной самосопряженности оператора $\hat{Q}$ (а значит, и оператора Q с ядром (29)) является открытым.

Ввиду того, что оператор (28) в определенном смысле аналогичен операторам $U(t)$, введенным формулами (4), (5), для изучения его существенной самосопряженности можно применять методы, которые в работе [2] и настоящей статье применялись при исследовании того же свойства операторов $U(t)$. Применяя технику статьи [2], опирающуюся на признаки существенной самосопряженности операторов, имеющих плотное множество квазианалитических векторов, можно доказать, что оператор Q существенно самосопряжен, если

$$G(x, y) = O(|x|^p \ln^p |x|) \tag{30}$$

в полосе $|x - y| \leqslant t$ при $|x| \to \infty$ для значения $p = 1$. При дополнительном условии полуограниченности Q тот же результат справедлив с $p = 2$. Метод доказательства настоящей работы позволяет получить для оператора Q результат типа Хартмана — Исмагилова. Для его формулировки понадобятся некоторые обозначения. Пусть $M(p, p)$ — точка, лежащая на диагонали $y = x$ плоскости переменных x, y. Проведем через нее прямые $x = p$, $y = p$, параллельные координатным осям. Эти прямые вырезают из полосы $|x - y| \leqslant t$ два треугольника. Один из них — $V(M)$ — ограничен указанными прямыми и прямой $y - x = t$, другой — $W(M)$ — симметричен ему относительно диагонали $y = x$. Положим также $U(M) = V(M) \cup W(M)$ (множество $U(M)$ имеет форму мотылька). Так как ядро $G(x, y)$ оператора Q эрмитово, то

$$\iint\limits_{V(M)} |G(x, y)|^2\, dxdy = \iint\limits_{W(M)} |G(x, y)|^2\, dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{U(M)} |G(x, y)|^2\, dxdy. \tag{31}$$

Теорема 2. *Рассмотрим числовые последовательности a_j, b_j, $j \geqslant j_0 \geqslant 1$, удовлетворяющие сформулированным в начале п. 2 условиям, отвечающим значению $l = t$. Введем последовательности точек $A_j(a_j, a_j)$, $B_j(b_j, b_j)$, $j \geqslant j_0$, лежащие на диагонали $y = x$ плоскости переменных x, y. Предположим, что ядро $G(x, y)$ оператора Q удовлетворяет оценкам*

$$\iint\limits_{U(A_j)} |G(x, y)|^2 dx \leqslant c_j^2, \quad \iint\limits_{U(B_j)} |G(x, y)|^2\, dx \leqslant c_j^2, \quad j \geqslant j_0, \tag{32}$$

с некоторыми константами $c_j > 0$ и дополнительно

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} c_j^{-1} = \infty. \tag{33}$$

Тогда оператор Q существенно самосопряжен.

Доказательство теоремы 2 опирается на тот факт, что приведенные выше свойства 1—4 операторов $U(t)$ справедливы также для оператора Q; при этом значение t в свойствах 1—4 должно совпадать с имеющимся в формуле (28). Если

$$Q^* h = ih, \tag{34}$$

то с помощью этих свойств можно преобразовать последовательность

$$\beta_j = (Q^* h, h) - (\bar{Q}\chi(I_j) h, \chi(I_j) h), \quad I_j = [a_j, b_j],$$

точно так же, как при доказательстве теоремы 1 преобразовывалась последовательность (18); по сути, единственное изменение состоит в том, что роль параметра l теперь играет t. В результате получим формулу $\beta_j = \beta_j^{(1)} + \beta_j^{(2)}$ (аналог формулы (20)), в которой $\beta_j^{(1)}$ и $\beta_j^{(2)}$ — выражения, получаемые из $\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}$ заменой $U(l) \to Q$. Благодаря наличию у оператора Q аналогов свойств 1 — 4 операторов $U(t)$ для $\beta_j^{(1)}$ верно представление

$$\beta_j^{(1)} = (\bar{Q}\chi(I_j^-) h, \chi(K_j^-) h) + (\bar{Q}\chi(I_j^+) h, \chi(K_j^+) h), \tag{35}$$

подобное формуле (21); отрезки $I_j^{\pm}, K_j^{\pm}$ получаются из аналогичных отрезков формулы (21) заменой $l \to t$, т. е. $I_j^- = [a_j - t, a_j]$, $I_j^+ = [b_j, b_j + t]$, $K_j^- = [a_j, a_j + t]$, $K_j^+ = [b_j - t, b_j]$. Формула

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j^{(2)} = 0 \tag{36}$$

следует непосредственно из определения $\beta_j^{(2)}$. Как и при доказательстве теоремы 1, из условия (33) — аналога условия (7) — вытекает равенство

$$\liminf_{j\to\infty} |\beta_j^{(1)}| = 0, \tag{37}$$

подобное равенству (23). Его обоснование проводится по схеме доказательства леммы 2, т. е. делается предположение о том, что $0 < c < |\beta_j^{(1)}|$ для для $j \geqslant j_1 \geqslant j_0$, а представление (35) используется для оценки $|\beta_j^{(1)}|$ сверху. Нетрудно видеть, что скалярные произведения, содержащиеся в (35), представляют собой двойные интегралы от функции $G(x, y) h(y) \bar{h}(x)$ по треугольникам $W(A_j)$ и $V(B_j)$. Применяя к ним неравенство Коши — Буняковского и учитывая условия (32) вместе с соотношением (31), получаем

$$|\beta_j^{(1)}| \leqslant c_j \Big[\iint_{W(A_j) \cup V(B_j)} |h(x)|^2 |h(y)|^2 \, dx dy \Big]^{\frac{1}{2}}, \quad j \geqslant j_1.$$

Дополним треугольники $W(A_j)$, $V(B_j)$ до квадратов, симметричных относительно их гипотенуз (гипотенузы являются отрезками прямых соответственно $y - x = -t$ и $y - x = t$). Интеграл полученной оценки не превышает интеграла от $|h(x)|^2 |h(y)|^2$ по объединению таких квадратов. С учетом того, что их проекциями на ось переменной x являются отрезки $K_j^{\pm}$, а на ось переменной y — отрезки $I_j^{\pm}$, приходим к аналогу оценки (25), имеющему вид

$$|\beta_j^{(1)}| \leqslant c_j (\| \chi(I_j^-) h \|^2 \| \chi(K_j^-) h \|^2 + \| \chi(I_j^+) h \|^2 \| \chi(K_j^+) h \|^2)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_j (\| \chi(I_j^-) h \|^2 + \| \chi(I_j^+) h \|^2 + \| \chi(K_j^-) h \|^2 + \| \chi(K_j^+) h \|^2).$$

Рассуждения, выводящие из приведенных оценок снизу и сверху чисел $|\beta_j^{(1)}|$ равенство (37), повторяют соответствующие выкладки доказательства леммы 2. Точно так же, как из формул (22), (23) следует равенство нулю решения уравнения (11), формулы (36), (37) влекут за собой аналогичное свойство уравнения (34). Если вместо (34) рассмотреть уравнение $Q^* h = -ih$, то для него аналогично выводится тот же результат. Таким образом, условия теоремы 2 действительно достаточны для существенной самосопряженности оператора.

Одним из следствий теоремы 2 является упоминавшееся утверждение о существенной самосопряженности оператора Q с ядром, удовлетворяющим оценке $G(x, y) = O(|x| \ln |x|)$ при условиях $|x - y| \leqslant t$, $|x| \to \infty$. Для его обоснования достаточно применить теорему 2 в случае точек $A_j(-jt, -jt)$ и $B_j(jt, jt)$, $j \geqslant 1$. Из заданной оценки $G(x, y)$ легко следует выполнение неравенств (32) с $c_j = aj \ln j$, $a = \mathrm{const} > 0$. Для таких c_j ряд (33), очевидно, расходится.

В заключение приведем несколько замечаний. Теорема 1 допускает обобщение на многомерный аналог операторов (5), порожденный задачей Коши вида (2), (3) с дифференциальным выражением $S = -\Delta + q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в котором оценки, аналогичные оценкам (6), и условие (7) выполняются на системе расширяющихся непересекающихся шаровых слоев толщины $3l$ с центром в начале координат. В теореме 1 можно отказаться от требования гладкости потенциала $q(x)$ и получить ее результат для дифференциального выражения (1) с $q(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. При этом минимальный оператор H и семейство операторов $U(t)$ следует определять способом, изложенным (в более общей ситуации) в статье [8]. Аналогичное замечание можно сделать и по отношению к теореме 2. Так как ее условия (32), (33) имеют интегральный характер, то она верна также для операторов Q вида (28) с эрмитовыми негладкими ядрами $G(x, y) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, равными нулю вне полосы $|x - y| \leqslant t$. Отметим, наконец, что теорема 2, а также упомянутый признак существенной самосопряженности оператора Q, ядро $G(x, y)$ которого удовлетворяет оценке (30) на бесконечности с $p = 1$ в неполуограниченном и с $p = 2$ в полуограниченном случае, не позволяют доказать существенную самосопряженность Q в случае ядра, имеющего вид (29) (такой оператор не ограничен ни снизу, ни сверху). Выше отмечалось, что вопрос о наличии или отсутствии у последнего оператора этого свойства представляет интерес с точки зрения спектральной теории дифференциальных операторов.

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию.— М. : Наука, 1970. 672 с.
2. *Орочко Ю. Б.* О спектральном представлении гиперболического эволюционного процесса, связанного с дифференциальным выражением Штурма — Лиувилля // Мат. заметки.— 1990.— **48**, № 1.— С. 86—94.
3. *Орочко Ю. Б.* Метод операторного косинуса в задаче о существенной самосопряженности неполуограниченного симметрического оператора // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 3.— С. 348—355.
4. *Орочко Ю. Б.* О достаточных условиях самосопряженности оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки.— 1974.— **15**, № 2.— С. 271—280.
5. *Орочко Ю. Б.* Локальная конечная скорость распространения гиперболического уравнения в задаче о самосопряженности степеней эллиптического дифференциального оператора второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 2.— С. 298—314.
6. *Исмагилов Р. С.* Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка // Докл. АН СССР.— **142**, № 6.— С. 1239—1242.
7. *Everitt W. N., Knowles I. W.* Limit-point and limit-circle criteria for Sturm-Liouville equations with intermittently negative principal coefficients // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1986.— **103A**.— P. 215—228.
8. *Орочко Ю. Б.* Метод гиперболического уравнения в теории операторов типа Шредингера с локально интегрируемым потенциалом // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 2.- С. 43--86.

Получено 18.06.91