УДК 517.984.48

Г. В. Радзиевский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, **Киев**)

Эквивалентность части корневых векторов полиномиальных пучков операторов

Исследуется эквивалентность производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиальных пучков операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Эти производные цепочки соответствуют различным краевым задачам на полуоси для операторно-дифференциальных уравнений, символом которых являются данные пучки операторов. Из признаков эквивалентности выводятся утверждения о минимальности производных цепочек, отвечающих краевой задаче на полуоси, в случае, когда заданы начальные условия векторного решения в нуле, а само решение подчинено требованиям типа условий излучения на бесконечности.

Вивчається еквівалентність похідних ланцюжків, побудованих за кореневими векторами поліноміальних жмутків операторів, які діють у гільбертовому просторі. Ці похідні ланцюжки відповідають різним крайовим задачам на півосі для операторно-диференціальних рівнянь, символом яких є дані жмутки операторів. Із ознак еквівалентності виводяться твердження про мінімальність похідних ланцюжків, які відповідають крайовим задачам на півосі у випадку, коли задані початкові умови векторного розв'язку у нулі, а сам розв'язок підпорядковано вимогам типу умов випромінювання на нескінченності.

Данная работа посвящена исследованию эквивалентности и минимальности производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиального пучка операторов, которые отвечают характеристическим числам из замкнутой левой полуплоскости. В отличие от результатов статей [1, 2] (где изучаются аналогичные вопросы, но производные цепочки строятся по всем корневым векторам) приведенные здесь признаки эквивалентности и минимальности части производных цепочек тесно связаны с краевыми задачами на полуоси для операторно-дифференциального уравнения, символом которого является изучаемый пучок операторов [3, с. 82—86]. Далее используются обозначения и определения, а также ряд построений из статей [1, 2], поэтому для сокращения ссылок на эти работы применяется двойная нумерация. Например, формула (I.15) или теорема II.5 означают соответственно формулу (15) из статьи [1] или теорему 5 из статьи [2].

1. Основная теорема. Приведем вначале необходимые понятия и обозначения. Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n, \tag{1}$$

где L_v — вообще говоря, неограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, считая при этом область определения $L(\lambda)$ равной $\mathfrak{L} = \bigcap_{v=0}^{n} \mathfrak{D}(L_v)$. Пусть $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ — цепочка корневых векторов, отвечающая характеристическому числу μ_k оператор-функции (1). Тогда, как отмечалось в статье [1, с. 84], вектор-функция

$$\hat{x}_{h,j,k}(t) = e^{\mu_k t}\left(\frac{t^h}{h!} x_{0,j,k} + \ldots + \frac{t}{1!} x_{h-1,j,k} + x_{h,j,k}\right) \tag{2}$$

является решением уравнения $L(d/dt)\,\hat{x}(t) = 0$ и называется *элементарным решением* этого уравнения, отвечающим характеристическому числу μ_h. Для произвольной $n-1$ раз дифференцируемой в сильном смысле вектор-функции $x(t)$ со значениями в прстранстве $\mathfrak{H}$ введем вектор-функцию

$$\tilde{x}^n(t) = \{x(t),\ x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\} \tag{3}$$

со значениями в пространстве $\mathfrak{H}^n$. Если вектор-функция задана равенством (2), то для построенной по ней согласно правилу (3) вектор-функции применяется обозначение $\tilde{x}^n_{h,j,k}(t)$. Отметим, что $\tilde{x}^n_{h,j,k}(t) \in \mathfrak{L}^n$ при $-\infty < t < \infty$. Далее векторы и вектор-функции с отрицательными индексами считаем равными нулю. В частности, $\tilde{x}^n_{-1,j,k}(t) = 0$.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{x}^n_{h_j,j}(0)$, $j = \overline{1, q}$, — производные по Келдышу векторы порядков h_j и размера n* [1, с. 85], *отвечающие одному и тому же характеристическому числу, целое число $d = \max\{h_1, \ldots, h_q\}$, а векторы $\tilde{x}^n_h = \sum_{j=1}^{q} c_j \tilde{x}^n_{h_j-d+h,j}(0)$ при $h = \overline{0, d}$, где c_j — произвольные комплексные числа. Если $\tilde{x}^n_{h_0}$ — первый отличный от нуля элемент в цепочке векторов $\tilde{x}^n_0, \ldots, \tilde{x}^n_d$, то элементы $\tilde{x}^n_{h_0}, \ldots, \tilde{x}^n_d$ образуют производную по Келдышу цепочку.*

Доказательство этой леммы полностью совпадает с доказательством леммы 6 из работы [4].

Для натурального числа l цепочка корневых векторов $x_0, \ldots, x_h$, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции (1), называется *продолжаемой до цепочки длины* $h + l + 1$, если найдутся такие l векторов $x_{h+1}, \ldots, x_{h+l}$, что элементы $x_0, \ldots, x_{h+l}$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую характеристическому числу μ оператор-функции (1). Элементы $x_{h+1}, \ldots, x_{h+l}$ называются *продолжением цепочки* $x_0, \ldots, x_h$ *до цепочки длины* $h + l + 1$. В случае, когда целое число $l \leqslant 0$, цепочку $x_0, \ldots, x_h$ считаем продолжаемой до цепочки длины $h + l + 1$, но тогда продолжение цепочки $x_0, \ldots, x_h$ до цепочки длины $h + l + 1$ не определяется. Для любого целого неотрицательного числа q введем множество $\Delta^q(L, \Omega)$, состоящее из таких мультииндексов $(h, j, k) \in$

$\in \Delta(L, \Omega)$ (определение $\Delta(L, \Omega)$ см. в [1, с. 84]), что занумерованные этими мультииндексами векторы $x_{h,j,k}$ входят в цепочки корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$, которые отвечают характеристическим числам $\mu_k \in \Omega$ оператор-функции $L(\lambda)$ и продолжаются до цепочек длины $2h - q + 1$. При $q = \infty$ положим $\Delta^\infty(L, \Omega) = \Delta(L, \Omega)$. Отметим, что при $q < q_1$ справедливо включение $\Delta^q(L, \Omega) \subseteq \Delta^{q_1}(L, \Omega)$. Обозначим через $\mathbb{R}$ и $i\mathbb{R}$ соответственно множества действительных и мнимых чисел. Для целого неотрицательного числа q введем множества мультииндексов

$$\Theta^q(L) = \Delta(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^q(L, 0). \tag{4}$$

Пусть множество $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Тогда положим $\Omega_* = \{\lambda : -\bar{\lambda} \in \Omega\}$. Если множество комплексных чисел Ω имеет свойства $\Omega \cap \Omega_* = \{\varnothing\}$ и $\Omega \cup \Omega_* = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, то определим множество мультииндексов

$$\Theta(L, \Omega) = \Delta(L, \Omega) \cup \Delta(L, i\mathbb{R}). \tag{5}$$

Согласно лемме 1 для целого неотрицательного и бесконечного q и для характеристического числа μ_k оператор-функции $L(\lambda)$ совокупность векторов $\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ при $(h, j, k) \in \Delta^q(L, \mu_k)$ с добавленным нулевым вектором из пространства $\mathfrak{H}^n$ является линейным многообразием, принадлежащим $\mathfrak{H}^n$, которое обозначим через $\tilde{\mathfrak{N}}_{k,q}$. Пусть на $\mathfrak{L}^n$ задана симметричная полуторалинейная форма $\Phi(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ (т. е. $\Phi(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \overline{\Phi(\tilde{y}^n, \tilde{x}^n)}$ для $\tilde{x}^n$, $\tilde{y}^n \in \mathfrak{L}^n$) и пусть $\Phi[\tilde{x}^n] \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$) для всех векторов $\tilde{x}^n \in \tilde{\mathfrak{M}}$, где $\tilde{\mathfrak{M}}$ — некоторое линейное многообразие, принадлежащее $\tilde{\mathfrak{N}}_{k,q}$. Тогда множество мультииндексов $\Delta^q_+(L, \mu_k, \Phi) = \{(h, j, k) : \tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \in \tilde{\mathfrak{M}}\}$ (соответственно $\Delta^q_-(L, \mu_k, \Phi)$). Отметим, что если форма $\Phi[\tilde{x}^n]$ не знакоопределена при $x^n \in \tilde{\mathfrak{N}}_{k,q}$, то многообразие $\mathfrak{M}$, а значит, и множества мультииндексов $\Delta^q_\pm(L, \mu_k, \Phi)$ определяются неоднозначно, поэтому было бы более точно, но более громоздко записать эти множества мультииндексов в виде $\Delta^q_\pm(L, \mu_k, \Phi, \mathfrak{M})$. Если μ_k не является характеристическим числом, то положим $\Delta^q_\pm(L, \mu_k, \Phi) = \{\varnothing\}$. Кроме того, определим $\Delta^q_\pm(L, \Omega, \Phi) = \bigcup\limits_{\mu \in \Omega} \Delta^q_\pm(L, \mu, \Phi)$, причем при $q = \infty$ считаем, что $\Delta^\infty_\pm(L, \Omega, \Phi) = \Delta_\pm(L, \Omega, \Phi)$. Отметим, что когда $q < q_1$, то справедливо включение $\Delta^q_\pm(L, \Omega, \Phi) \subseteq \Delta^{q_1}_\pm(L, \Omega, \Phi)$. Введем множества мультииндексов

$$\Theta^q_\pm(L, \Phi) = \Delta(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Delta^0_\pm(L, i\mathbb{R}, \Phi) \cup \Delta^q_\mp(L, 0, \Phi), \tag{6}$$

а для множества комплексных чисел Ω, имеющего свойства $\Omega \cap \Omega_* = \{\varnothing\}$ и $\Omega \cup \Omega_* = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, зададим множества $\Theta_\pm(L, \Omega, \Phi)$ мультииндексов (h, j, k) формулами

$$\Theta_\pm(L, \Omega, \Phi) = \Delta(L, \Omega) \cup \Delta_\pm(L, i\mathbb{R}, \Phi). \tag{7}$$

Далее при использовании обозначений (5) и (7) не оговариваются указанные свойства множества комплексных чисел Ω. Кроме того, отметим, что в левых и правых частях определений (6) и (7) одновременно участвует либо верхний знак «+» либо нижний знак «—».

Считая симметричные формы $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ заданными равенствами (I. 13) (в определении (I. 10) вместо x^s следует писать y^s), для натурального числа q введем формы

$$\Phi^q_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \sum_{p=q}^{[n/2]+1} \xi_p \Phi_{2p-1}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n), \quad q \leqslant [n/2] + 1, \tag{8}$$

$$\mathbf{X}^q_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \sum_{p=q}^{[(n+1)/2]} \xi_p \Phi_{2p}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n), \quad q \leqslant [(n+1)/2], \tag{9}$$

$$\Psi^q_{\tilde\xi}(\tilde x^n, \tilde y^n) = \sum_{p=q}^{n+1} \xi_p \Phi_p(\tilde x^n, \tilde y^n), \quad q \leqslant n+1, \tag{10}$$

в которых набор $\tilde\xi = \{\xi_q, \dots, \xi_r\} \in \mathbb{R}^{r-q+1}$, где число r равно $[n/2]+1$, $[(n+1)/2]$, или $n+1$ соответственно для форм (8), (9) или (10).

Далее предполагается, что формы операторов L_ν подчинены одному из следующих условий при $x \in \mathfrak{L}$:

$$(-1)^s \operatorname{Im}(L_{2s}x, x) \leqslant 0, \quad s = \overline{0, [n/2]}, \quad \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) = 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}, \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}(L_{2s}x, x) = 0, \quad s = \overline{0, [n/2]}, \quad (-1)^s \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) \geqslant 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}, \tag{12}$$

$$\operatorname{Im}(i)^s (L_s x, x) = 0, \quad s = \overline{0, n}, \tag{13}$$

совпадающих соответственно с условиями (I.17), (I.18) и (I.19).

Во введенных обозначениях справедливо основное утверждение работы.

Теорема 1. *Пусть $\tilde J_1$ и $\tilde J_2$ — такие операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$, для которых $\mathfrak{L}^n \subseteq \mathfrak{D}(\tilde J_1) \cap \mathfrak{D}(\tilde J_2)$ и $c\|\tilde J_1 \tilde f^n\| \leqslant \|(\tilde J_1 + \tilde J_2)\tilde f^n\|$ с независящей от $\tilde f^n \in \mathfrak{L}^n$ постоянной $c > 0$. Предположим, что*

$$\Phi^q_{\tilde\xi}[\tilde x^n] \leqslant c_1 \|\tilde J_1 \tilde x^n\|^2 - c_2 \|\tilde J_2 \tilde x^n\|^2, \quad \tilde\xi \in \mathbb{R}_+^{[n/2]-q+2}, \tag{14}$$

$$\mathrm{X}^q_{\tilde\xi}[\tilde x^n] \leqslant c_1 \|\tilde J_1 \tilde x^n\|^2 - c_2 \|\tilde J_2 \tilde x^n\|^2, \quad \tilde\xi \in \mathbb{R}_+^{[(n+3)/2]-q}, \tag{15}$$

$$\Psi^q_{\tilde\xi}[\tilde x^n] \leqslant c_1 \|\tilde J_1 \tilde x^n\|^2 - c_2 \|\tilde J_2 \tilde x^n\|^2, \quad \tilde\xi \in \mathbb{R}^{n-q+2}, \tag{16}$$

с независящими от $\tilde x^n \in \mathfrak{L}^n$ постоянными $c_1, c_2 > 0$. Тогда соотношение $\tilde J_1 \tilde x^n_{h,j,k}(0) \simeq (\tilde J_1 + \tilde J_2)\tilde x^n_{h,j,k}(0)$ справедливо в следующих случаях: 1) когда выполнены условия (11) и (14), а мультииндексы $(h, j, k) \in \Theta_+^{2q-2}(L, \Phi^q_{\tilde\xi})$; 2) когда выполнены условия (12) и (15), а мультииндексы $(h, j, k) \in \Theta_+^{2q-1}(L, \mathrm{X}^q_{\tilde\xi})$; 3) когда выполнены условия (13) и (16), а мультииндексы $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Psi^q_{\tilde\xi})$.

Вначале приведем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть $x_0, \dots, x_h$ — цепочка корневых векторов, отвечающая мнимому характеристическому числу $i\zeta$ (т. е. $\zeta \in \mathbb{R}$) оператор-функции (1), которая удовлетворяет условию (11). Тогда если $i\zeta \neq 0$ и цепочка $x_0, \dots, x_h$ продолжаема до цепочки длины $2h+1$ то*

$$\operatorname{Im}(L_{2s}x_p, x_p) = 0 \tag{17}$$

и для всех векторов $y \in \mathfrak{L}$

$$(L_{2s}x_p, y) = (x_p, L_{2s}y) \tag{18}$$

при $p = \overline{0, h}$ и $s = \overline{0, [n/2]}$. Если же $i\zeta = 0$, а цепочка $x_0, \dots, x_h$ продолжаема до цепочки длины $h+l+1$, то равенства (17) и (18) справедливы при $p + s \leqslant [(h+l)/2]$.

Доказательство. Согласно условию (11) и лемме II.3 достаточно установить лишь равенства (17). Считаем вначале, что $h \geqslant 1$. Пусть элементы $x_{h+1}, \dots, x_{2h}$ образуют продолжение цепочки $x_0, \dots, x_h$, отвечающей характеристическому числу $i\zeta \neq 0$, до цепочки длины $2h+1$. Тогда по определению цепочки корневых векторов $\left\| L(\lambda) \sum_{p=0}^{2h} (\lambda - i\zeta)^p x_p \right\| = O(|\lambda -$

$- i\zeta|^{2h+1})$ в окрестности точки $i\zeta$. Поэтому

$$\operatorname{Im}\Big(L(i\tau)\sum_{p=0}^{2h}(i\tau-i\zeta)^p x_p,\quad \sum_{p=0}^{2h}(i\tau-i\zeta)^p x_p\Big)=O(|\tau-\zeta|^{2h+1})$$

при вещественных τ, лежащих в некоторой окрестности точки ζ. Отсюда и из условия (11) имеем

$$\operatorname{Im}\Big(\Big\{\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\tau^{2s}L_{2s}\Big\}\sum_{p=0}^{2h}(i\tau-i\zeta)^p x_p,\ \sum_{p=0}^{2h}(i\tau-i\zeta)^p x_p\Big)=O(|\tau-\zeta|^{2h+1}) \tag{19}$$

в вещественной окрестности точки ζ. Заметим, что соотношение (19) справедливо и при $h=0$. Устремляя в нем параметр τ к числу ζ и учитывая условие (11) и предположение: $\zeta\neq 0$, выводим тождества $\operatorname{Im}(L_{2s}x_0,\ x_0)=0$ при $s=\overline{0,\ [n/2]}$, т. е. получаем равенства (17), а значит, и (18) при $p=0$ и $s=\overline{0,\ [n/2]}$. Для $h\geqslant 1$, принимая во внимание полученные равенства (17) и (18) для значений $p=0$ и $s=\overline{0,\ [n/2]}$ и деля правую и левую части соотношения (19) на $(\tau-\zeta)^2$, находим

$$\operatorname{Im}\Big(\Big\{\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\tau^{2s}L_{2s}\Big\}\sum_{p=1}^{2h}(i\tau-i\zeta)^{p-1}x_p,\ \sum_{p=1}^{2h}(i\tau-i\zeta)^{p-1}x_p\Big)=O(|\tau-\zeta|^{2h-1})$$

в вещественной окрестности точки ζ. Из этого соотношения, как и прежде, выводятся равенства (17), а значит, и (18), но уже для $p=1$ и $s=\overline{0,\ [n/2]}$. Продолжая этот процесс r раз, где $r=\overline{0,\ h}$, получаем на каждом шаге равенства (17), а значит, и (18) для значений $p=r$ и $s=\overline{0,\ [n/2]}$, что и доказывает первое утверждение.

В случае характеристического числа $i\zeta=0$ и цепочки $x_0,\ \ldots,\ x_h$, продолжаемой векторами $x_{h+1},\ \ldots,\ x_{h+l}$ до цепочки длины $h+l+1$, соотношение (19) запишется в виде

$$\operatorname{Im}\Big(\Big\{\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\tau^{2s}L_{2s}\Big\}\sum_{p=0}^{h+l}(i\tau)^p x_p,\quad \sum_{p=0}^{h+l}(i\tau)^p x_p\Big)=O(|\tau|^{h+l+1}) \tag{20}$$

в вещественной окрестности нуля. Устремляя в (20) параметр τ к нулю, имеем $\operatorname{Im}(L_0x_0,\ x_0)=0$, т. е. получаем равенства (17) и (18) при значениях $p=s=0$. Отсюда, деля правую и левую части соотношения (20) на τ^2, находим

$$\operatorname{Im}\Big(L_0\sum_{p=1}^{h+l}(i\tau)^{p-1}x_p,\quad \sum_{p=1}^{h+l}(i\tau)^{p-1}x_p\Big)+$$

$$+\operatorname{Im}\Big(\Big\{\sum_{s=1}^{[n/2]}(-1)^s\tau^{2(s-1)}L_{2s}\Big\}\sum_{p=0}^{h+l}(i\tau)^p x_p,\quad \sum_{p=0}^{h+l}(i\tau)^p x_p\Big)=O(|\tau|^{h+l-1})$$

в вещественной окрестности нуля. Устремляя в этом соотношении параметр τ к нулю, заключаем, что $\operatorname{Im}(L_0x_1,\ x_1)-\operatorname{Im}(L_2x_0,\ x_0)=0$. Поэтому согласно условию (11) $\operatorname{Im}(L_0x_1,\ x_1)=\operatorname{Im}(L_2x_0,\ x_0)=0$, т. е. получаем равенства (17) и (18) при $p+s=1$. Продолжая этот процесс r раз, где $h+l+1-2r>0$, выводим на каждом шаге соотношения (17) и (18), но уже при $p+s=r$, а так как $r<(h+l+1)/2$, то $r\leqslant[(h+l)/2]$, что и завершает доказательство леммы.

Л е м м а 3. *Пусть $x_0,\ \ldots,\ x_h$ — цепочка корневых векторов, отвечающая мнимому характеристическому числу $i\zeta$ оператор-функции* (1), *которая удовлетворяет условию* (12). *Тогда если $i\zeta\neq 0$ и цепочка $x_0,\ \ldots,\ x_h$ продолжаема до цепочки длины $2h+1$, то для всех векторов $y\in\mathfrak{H}$*

$$(L_{2s+1}x_p,\ y)+(x_p,\ L_{2s+1}y)=0 \tag{21}$$

при $p=\overline{0,h}$ *и* $s=\overline{0,[(n-1)/2]}$. *Если же* $i\zeta=0$, *а цепочка* $x_0, \ldots, x_h$ *продолжаема до цепочки длины* $h+l+1$, *то равенство* (21) *справедливо при* $p+s\leqslant[(h+l-1)/2]$.

Доказательство. Рассмотрим оператор-функцию $L_1(\lambda) = i\lambda L(\lambda)$, которая удовлетворяет условиям леммы 2, если считать в ней $L_0=0$, а операторы $L_{2(s+1)}$ равными iL_{2s+1}, где операторы L_{2s+1} удовлетворяют условиям леммы 3. Отметим, что когда $x_0, \ldots, x_h$ — цепочка корневых векторов, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$, то эта же цепочка является цепочкой корневых векторов и оператор-функции $L_1(\lambda)$. Более того, в случае характеристического числа $\mu=0$ векторы $x_0, \ldots, x_h$, 0 также образуют цепочку корневых векторов $L_1(\lambda)$, т. е. для нулевого характеристического числа из продолжаемости цепочки $x_0, \ldots, x_h$ корневых векторов $L(\lambda)$ до цепочки длины $h+l+1$ следует продолжаемость этой же цепочки корневых векторов до цепочки длины $h+l+2$, но уже для оператор-функции $L_1(\lambda)$. Отсюда, учитывая отмеченную связь операторных коэффициентов у оператор-функций $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$, а также лемму 2, получаем первое утверждение леммы 3, а второе для значений индексов $p+s+1\leqslant[(h+l+1)/2]$. Значит, в случае нулевого характеристического числа тождество (21) верно при $p+s\leqslant[(h+l-1)/2]$, т. е. лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $x_0, \ldots, x_d$ — *цепочка корневых векторов оператор-функции* $L(\lambda)$, *отвечающая характеристическому числу* μ, $\hat{x}_0(t), \ldots, \hat{x}_d(t)$ — *элементарные решения уравнения* $L(d/dt)\hat{x}(t)=0$, *построенные по этой цепочке, а* r — *целое неотрицательное число. Тогда если* $\mu\neq0$ *либо* $r=0$, *то при каждом фиксированном* $t\in(-\infty,\infty)$ *векторы* $\hat{x}_0^{(r)}(t), \ldots, \hat{x}_d^{(r)}(t)$ *образуют цепочку корневых векторов* $L(\lambda)$, *отвечающую характеристическому числу* μ. *В случае* $\mu=0$ *выполнено тождество* $\hat{x}_h^{(r)}(t)=\hat{x}_{h-r}(t)$, $h=\overline{0,d}$, *поэтому если* $r\leqslant d$, *то для векторов* $\hat{x}_r^{(r)}(t), \ldots, \hat{x}_d^{(r)}(t)$ *справедливо предыдущее утверждение леммы.*

Доказательство проведем считая вначале $r=0$. Так как

$$\sum_{h=0}^{d}(\lambda-\mu)^h\hat{x}_h(t)=e^{\mu t}\sum_{h=0}^{d}(\lambda-\mu)^h\sum_{q=0}^{h}\frac{t^q}{q!}x_{h-q}=$$

$$=e^{\mu t}\sum_{q=0}^{d}\frac{t^q}{q!}(\lambda-\mu)^q\sum_{h=0}^{d-q}(\lambda-\mu)^h x_h,$$

то из определения цепочки корневых векторов вытекает соотношение $\left\| L(\lambda)\sum_{h=0}^{d}(\lambda-\mu)^h\hat{x}_h(t)\right\|=O(|\lambda-\mu|^{d+1})$ в окрестности точки μ, т. е. установлено первое утверждение леммы 4 для значения $r=0$. Отсюда и из очевидного равенства $\hat{x}_h^{(r)}(t)=\hat{x}_{h-r}(t)$, справедливого в случае характеристического числа $\mu=0$, следует второе утверждение. Пусть теперь $r\geqslant1$, так как

$$\sum_{h=0}^{d}(\lambda-\mu)^h\hat{x}_h^{(r)}(t)=\sum_{q=0}^{r}C_r^q\mu^{r-q}(\lambda-\mu)^q\sum_{h=0}^{d-q}(\lambda-\mu)^h\hat{x}_h(t),$$

то используя первое утверждение леммы, полученное при $r=0$, и определение цепочки корневых векторов, заключаем, что $\left\| L(\lambda)\sum_{h=0}^{d}(\lambda-\mu)^h\hat{x}_h^{(r)}(t)\right\|=O(|\lambda-\mu|^{d+1})$ в окрестности точки μ. Кроме того, если $\mu\neq0$, то вектор $\hat{x}_0^{(r)}(t)\neq0$, откуда следует лемма 4 в случае $\mu\neq0$ и $r\geqslant1$.

В первом утверждении леммы 4 предположение о $\mu\neq0$ либо $r=0$

связано с тем, что в противном случае векторы $\hat{x}_0^{(r)}(t) = \ldots = \hat{x}_{r-1}^{(r)}(t) = 0$, а значит, элемент $x_r^{(r)}(t)$ — первый отличный от нуля вектор в цепочке $\hat{x}_0^{(r)}(t), \ldots, \hat{x}_d^{(r)}(t)$ (предполагаем, что $r \leqslant d$). Из леммы 4 следует, в частности, что когда $x_0, \ldots, x_h$ — цепочка корневых векторов, отвечающая характеристическому числу μ оператор-функции (1), продолжаема до цепочки длины $h + l + 1$, то в случае $\mu \neq 0$ цепочка корневых векторов $\hat{x}_0^{(r)}(t), \ldots, \hat{x}_h^{(r)}(t)$ также продолжаема до цепочки длины $h + l + 1$, а в случае $\mu = 0$ и $r \leqslant h$ цепочка корневых векторов $\hat{x}_r^{(r)}(t), \ldots, \hat{x}_h^{(r)}(t)$ продолжаема до длины $h + l + r + 1$. Отсюда и из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ — элементарное решение уравнения $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, построенное по правилу* (2) *по цепочке корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ оператор-функции* (1), *отвечающей мультииндексу $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Тогда для любого вектора $y \in \mathfrak{L}$ и всех $t \in (-\infty, \infty)$ справедливо равенство*

$$(L_{2s}\hat{x}_{h,j,k}(t), y) = (\hat{x}_{h,j,k}(t), L_{2s}y), \quad s = \overline{0, [n/2]}, \tag{22}$$

если выполнено условие (11), *и равенство*

$$(L_{2s+1}\hat{x}_{h,j,k}(t), y) + (\hat{x}_{h,j,k}(t), L_{2s+1}y) = 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]},$$

если выполнено условие (12). *В случае, когда ноль является характеристическим числом оператор-функции* (1), *m — натуральное число, а мультииндекс $(h, j, k) \in \Delta^{m-1}(L, 0)$, равенство*

$$(L_{2s}\hat{x}_{h,j,k}^{(r+s)}(t), y) = (\hat{x}_{h,j,k}^{(r+s)}(t), L_{2s}y), \quad s = \overline{0, [n/2]}, \tag{23}$$

справедливо, если $r \geqslant [m/2]$ и выполнено условие (11), *а равенство*

$$(L_{2s+1}\hat{x}_{h,j,k}^{(r+s)}(t), y) + (\hat{x}_{h,j,k}^{(r+s)}(t), L_{2s+1}y) = 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}, \tag{24}$$

справедливо, если число $r \geqslant [(m+1)/2]$ и выполнено условие (12).

Выведем теперь из лемм 4, 5 и I. 2 следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть $\hat{x}(t)$ — произвольное решение (в смысле работы [1, с. 87]) уравнения $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, а $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ — элементарное решение этого же уравнения, построенное по правилу* (2) *по цепочке корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ оператор-функции* (1), *отвечающей мультииндексу $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{m-1}(L, 0)$. Тогда для вектор-функций $\tilde{x}^n(t)$ и $\tilde{x}_{h,j,k}^n(t)$, заданных равенством* (3), *справедливо тождество*

$$\Phi_m(\tilde{x}_{h,j,k}^n(T), \tilde{x}^n(T)) = \Phi_m(\tilde{x}_{h,j,k}^n(0), \tilde{x}^n(0)), \quad -\infty < T < \infty, \tag{25}$$

если натуральное число $m = \overline{1, n+1}$ и 1) m — нечетно и выполнено условие (11); *2) m — четно и выполнено условие* (12).

Доказательство проведем в случае нечетного числа $m = 2q - 1$ и выполнения условия (11). Если $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}\setminus\{0\})$, то из лемм 4 и 5 выводим равенства $(L_{2s}\hat{x}_{h,j,k}^{(r)}(t), \hat{x}^{(r)}(t)) = (\hat{x}_{h,j,k}^{(r)}(t), L_{2s}\hat{x}^{(r)}(t))$ для $-\infty < t < \infty$ и индексов $r = 0, 1, \ldots$ и $s = \overline{0, [n/2]}$, подставляя которые в формулу (I.25), получаем тождество (25). Пусть теперь мультииндекс $(h, j, k) \in \Delta^{2q-2}(L, 0)$. Воспользовавшись равенством (23), имеем $(L_{2s}\hat{x}_{h,j,k}^{(q+s-1)}(t), \hat{x}^{(q+s-1)}(t)) = (\hat{x}_{h,j,k}^{(q+s-1)}(t), L_{2s}\hat{x}^{(q+s-1)}(t))$ при $s = \overline{0, [n/2]}$, откуда и из формулы (I.25) получаем тождества (25) в случае, когда мультииндекс $(h, j, k) \in \Delta^{2q-2}(L, 0)$. Аналогично устанавливается второе утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть k и v — такие индексы, нумерующие характеристические числа μ_k и μ_v, что $\mu_k \neq -\bar{\mu}_v$. Тогда для $m = \overline{1, n+1}$ тождество $\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(T), \tilde{x}^n_{r,u,v}(T)) = 0$ при $-\infty < T < \infty$ справедливо в следующих случаях:* 1) *m — нечетно и выполнено условие* (11), *а мультииндекс $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{m-1}(L, 0)$;* 2) *$m$ — четно и выполнено условие* (12), *а мультииндекс $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{m-1}(L, 0)$;* 3) *выполнено условие* (13).

Доказательство. В первом и во втором случаях согласно лемме 6, а в третьем случае согласно тождеству (I.27) из леммы I.2 справедливо равенство

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(T), \tilde{x}^n_{r,u,v}(T)) = \Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,v}(0)), \quad -\infty < T < \infty. \tag{26}$$

На основании формул (2) и (3) заключаем, что

$$\tilde{x}^n_{h,j,k}(T) = e^{\mu_k T} \sum_{s=0}^{h} \frac{T^s}{s!} \tilde{x}^n_{h-s,j,k}(0),$$

откуда и из (26) имеем

$$e^{(\mu_k+\bar{\mu}_v)T} \sum_{s=0}^{h} \sum_{w=0}^{r} \frac{T^{s+w}}{s!w!} \Phi_m(\tilde{x}^n_{h-s,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r-w,u,v}(0)) =$$

$$= \Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,v}(0)), \quad -\infty < T < \infty. \tag{27}$$

Так как $\mu_k + \bar{\mu}_v \neq 0$, то из линейной независимости при $\nu \neq 0$ функций $1, e^{\nu T}, Te^{\nu T}, \ldots$ (зависящих от T) из равенства (27) получаем $\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,v}(0)) = 0$. Отсюда и из тождества (26) вытекает утверждение леммы.

Лемма 8. *Для любого натурального числа $m = \overline{1, n+1}$ и конечного набора комплексных чисел $c_{h,j,k}$ неравенство*

$$\Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Theta^{m-1}(L)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big] \geqslant \Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Delta^{m-1}(L,0)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big] +$$

$$+ \sum\nolimits'_{k:\mu_k\in i\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Delta^0(L,\mu_k)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big] \tag{28}$$

справедливо в следующих случаях: 1) *m — нечетно и выполнено условие* (11); 2) *m — четно и выполнено условие* (12). *Если же выполнено условие* (13), *то*

$$\Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Theta(L,\Omega)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big] = \sum\nolimits'_{k:\mu_k\in i\mathbb{R}} \Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Delta(L,\mu_k)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big]. \tag{29}$$

Докажем первое утверждение леммы 8. Для этого, подставляя в равенство (I.25) вектор-функции $\hat{x}(t) = \hat{y}(t) = \sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Theta^{m-1}(L)} c_{h,j,k} \times \hat{x}_{h,j,k}(t)$ и учитывая условие (11), совпадающее с условием (I.17), получаем

$$\Phi_m[\tilde{x}^n(T)] \leqslant \Phi_m[\tilde{x}^n(0)], \quad 0 \leqslant T < \infty. \tag{30}$$

На основании лемм 6 и 7 и определения (4) множества $\Theta^q(L)$ имеем

$$\Phi_m[\tilde{x}^n(T)] = \Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Delta(L,\mathrm{Re}\lambda<0)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(T)\Big] +$$

$$+ \Phi_m\Big[\sum\nolimits'_{(h,j,k)\in\Delta^{m-1}(L,0)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big] +$$

$$+ \sum\nolimits'_{k:\mu_k\in i\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Phi_m\Big[\sum_{(h,j,k)\in\Delta^0(L,\mu_k)} c_{h,j,k}\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)\Big]. \tag{31}$$

В силу определений (2) и (3) элементарных решений $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ и вектор-функций $\tilde{x}^n(t)$ первое слагаемое в правой части равенства (31) стремится к нулю при $T \to +\infty$, поэтому из соотношений (30) и (31) вытекает неравенство (28). Аналогично доказывается второе утверждение. Равенство (29) вытекает из третьего утверждения леммы 7, если считать в нем $T = 0$ и заметить, что в силу определения (5) множества мультииндексов $\Theta(L, \Omega)$ множество комплексных чисел $\Omega \cup i\mathbb{R}$ не содержит характеристических чисел μ_k и μ_v, для которых $\mu_k = -\bar{\mu}_v$, в случаях, когда μ_k и $\mu_v \in \Omega$ и когда $\mu_k \in \Omega$, а $\mu_v \in i\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 1. Если выполнено условие (11), то в силу определений множеств мультииндексов $\Delta_+^q(L, \mu_k, \Phi)$ и $\Theta_+^q(L, \Phi)$ и включения $\Delta_+^q(L, \mu_k, \Phi) \subseteq \Delta_+^{q_1}(L, \mu_k, \Phi)$ при $q < q_1$ из леммы 8 и формулы (8) получаем

$$\Phi_{\tilde{\xi}}^q \Big[\sum_{(h,j,k)\in\Theta^{2q-2}(L,\Phi_{\tilde{\xi}}^q)}' c_{h,j,k} \tilde{x}_{h,j,k}^n(0) \Big] \geqslant 0, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[n/2]-q+2}.$$

Отсюда с учетом условия (14), полностью повторяя доказательство теоремы I.1, получаем первое утверждение теоремы 1. Аналогично устанавливаются второе и третье утверждения этой теоремы.

Приведем одно следствие из теоремы 1, предполагая, что формы операторов L_v, входящих в полиномиальный пучок операторов (1), подчинены одному из следующих условий при $x \in \mathfrak{L}$:

$$(-1)^s \operatorname{Im}(L_{2s}x, x) \geqslant 0, \quad s = \overline{0, [n/2]}, \quad \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) = 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}, \tag{32}$$

$$\operatorname{Im}(L_{2s}x, x) = 0, \quad s = \overline{0, [n/2]}, \quad (-1)^s \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) \leqslant 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}. \tag{33}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_2$ — такие операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$, для которых $\mathfrak{L}^n \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{J}_1) \cap \mathfrak{D}(\tilde{J}_2)$ и $c\|\tilde{J}_1\tilde{f}^n\| \leqslant \|(\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2)\tilde{f}^n\|$ с независящей от $\tilde{f}^n \in \mathfrak{L}^n$ постоянной $c > 0$. Предположим, что*

$$\Phi_{\tilde{\xi}}^q[\tilde{x}^n] \geqslant c_2\|\tilde{J}_2\tilde{x}^n\|^2 - c_1\|\tilde{J}_1\tilde{x}^n\|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[n/2]-q+2}, \tag{34}$$

$$\mathrm{X}_{\tilde{\xi}}^q[\tilde{x}^n] \geqslant c_2\|\tilde{J}_2\tilde{x}^n\|^2 - c_1\|\tilde{J}_1\tilde{x}^n\|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[(n+3)/2]-q}, \tag{35}$$

$$\Psi_{\tilde{\xi}}^q[\tilde{x}^n] \geqslant c_2\|\tilde{J}_2\tilde{x}^n\|^2 - c_1\|\tilde{J}_1\tilde{x}^n\|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-q+2}, \tag{36}$$

с независящими от $\tilde{x}^n \in \mathfrak{L}^n$ постоянными $c_1, c_2 > 0$. Тогда соотношение $\tilde{J}_1\tilde{x}_{h,j,k}^n(0) \simeq (\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2)\tilde{x}_{h,j,k}^n(0)$ справедливо в следующих случаях: 1) *когда выполнены условия* (32) *и* (34), *а мультииндексы* $(h, j, k) \in \Theta_-^{2q-2}(L, \Phi_{\tilde{\xi}}^q)$; 2) *когда выполнены условия* (33) *и* (35), а *мультииндексы* $(h, j, k) \in \Theta_-^{2q-1}(L, \mathrm{X}_{\tilde{\xi}}^q)$; 3) *когда выполнены условия* (13) *и* (36), *а мультииндексы* $(h, j, k) \in \Theta_-(L, \Omega, \Psi_{\tilde{\xi}}^q)$.

Доказательство. Рассмотрим вместо оператор-функции $L(\lambda)$ оператор-функцию $-L(\lambda)$. Тогда квадратичные формы $\Phi_{\tilde{\xi},L}^q[\tilde{x}^n]$, $\mathrm{X}_{\tilde{\xi},L}^q[\tilde{x}^n]$ и $\Psi_{\tilde{\xi},L}^q[\tilde{x}^n]$, построенные по коэффициентам оператор-функции $L(\lambda)$, связаны с квадратичными формами $\Phi_{\tilde{\xi},-L}^q[\tilde{x}^n]$, $\mathrm{X}_{\tilde{\xi},-L}^q[\tilde{x}^n]$ и $\Psi_{\tilde{\xi},-L}^q[\tilde{x}^n]$, построенными по коэффициентам оператор-функции $-L(\lambda)$, равенствами

$\Phi^q_{\tilde{\xi},L}[\tilde{x}^n] = -\Phi^q_{\tilde{\xi},-L}[\tilde{x}^n]$, $X^q_{\tilde{\xi},L}[\tilde{x}^n] = -X^q_{\tilde{\xi},-L}[\tilde{x}^n]$ и $\Psi^q_{\tilde{\xi},L}[\tilde{x}^n] = -\Psi^q_{\tilde{\xi},-L} \times \times [\tilde{x}^n]$ для всех элементов $\tilde{x}^n \in \mathfrak{L}^n$. Отсюда видно, что условия (32), (33) и (34) — (36) для оператор-функции $L(\lambda)$ преобразуются соответственно в условия (11), (12) и (14) — (16) для оператор-функции $-L(\lambda)$; условие же (13) остается прежним как для оператор-функции $L(\lambda)$, так и для оператор-функции $-L(\lambda)$. Кроме того, множества мультииндексов $\Theta^p_-(L, \Phi^q_{\tilde{\xi},L}) = \Theta^p_+(-L, \Phi^q_{\tilde{\xi},-L})$, $\Theta^p_-(L, X^q_{\tilde{\xi},L}) = \Theta^p_+(-L, X^q_{\tilde{\xi},-L})$ и $\Theta_-(L, \Omega, \Psi^q_{\tilde{\xi},L}) = \Theta_+(-L, \Omega, \Psi^q_{\tilde{\xi},-L})$ для любых целых неотрицательных значений p и допустимых значений натурального числа q. Отметим, что характеристические числа у оператор-функций $L(\lambda)$ и $-L(\lambda)$ совпадают, как совпадают и отвечающие этим характеристическим числам цепочки корневых векторов. Из этих пояснений и из теоремы 1 непосредственно вытекают утверждения теоремы 2.

2. Некоторые свойства форм $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$. В этом пункте приводятся вспомогательные утверждения, показывающие, в частности (см. лемму 13), что при выполнении, например, условия (11) $\Theta^{2q-2}_{\pm}(L, \Phi^q_{\tilde{\xi}}) = \Theta^{2q-2}_{\pm}(L, \Phi_{2q-1})$, если в определении (8) формы $\Phi^q_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ набор $\tilde{\xi} \in \in \mathbb{R}^{[n/2]-q+2}_+$ и $\xi_q > 0$. Утверждения такого типа потребуются для получения следствий из теорем 1 и 2.

Лемма 9. *Пусть $\hat{x}(t)$—произвольное решение уравнения $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, а элемент $\tilde{y}^n = \{y^1, \ldots, y^n\} \in \mathfrak{L}^n$. Тогда для натурального числа $m \leqslant n$*

$$\Phi_m\left(\frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -i\Phi_{m+1}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n) + \sum_{s=1}^{m-1}(-1)^s[(i)^m(L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), y^s) - (-i)^m(\hat{x}^{(s)}(t), L_{2s-m}y^s)] - \sum_{s=m}^{\infty}(-1)^s[(i)^m(L_{2s-m+1}\hat{x}^{(s)}(t), y^{s+1}) + (-i)^m(\hat{x}^{(s)}(t), L_{2s-m+1}y^{s+1})]. \tag{37}$$

В частности, если операторы L_v удовлетворяют условию (11) *или* (32) *и натуральное число $q \leqslant [n/2]$, то*

$$\Phi_{2q-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -\Phi_{2q+1}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n) - i\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s[(L_{2s}\hat{x}^{(q+s)}(t), y^{q+s}) - (\hat{x}^{(q+s)}(t), L_{2s}y^{q+s})], \tag{38}$$

если же выполнено условие (12) *или* (33) *и $q \leqslant [(n-1)/2]$, то*

$$\Phi_{2q}\left(\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -\Phi_{2q+2}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n) - \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^s[(L_{2s+1}\hat{x}^{(q+s+1)}(t), y^{q+s+1}) + (\hat{x}^{(q+s+1)}(t), L_{2s+1}y^{q+s+1})], \tag{39}$$

а когда выполнено условие (13) *и $m \leqslant n$, то*

$$\Phi_m\left(\frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -i\Phi_{m+1}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n). \tag{40}$$

В равенстве (37), *как и в работе* [1], *предполагается, что операторы $L_v = 0$ при индексе $v < 0$ или $v > n$, а также, что векторы $y^s = 0$, если $s > n$.*

Доказательство. Вычисления показывают, что из формулы (I.10) следуют равенства

$$\Phi_{1,m}\left(\frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -i\Phi_{1,m+1}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n) - (-i)^m \sum_{v=0}^{m-1} (L_v \hat{x}^{(v)}(t), y^m) -$$

$$- (i)^m \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s (L_{2s-m+1}\hat{x}^{(s)}(t), y^{s+1}),$$

$$\overline{\Phi_{1,m}\left(\tilde{y}^n, \frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t)\right)} = -i\,\overline{\Phi_{1,m+1}(\tilde{y}^n, \tilde{x}^n(t))} -$$

$$- (-i)^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^s (\hat{x}^{(s)}(t), L_{2s-m}y^s),$$

а из формулы (I.11) —

$$\Phi_{2,m}\left(\frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = -i\Phi_{2,m+1}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n) - (-i)^m \sum_{v=m}^{\infty} (L_v \hat{x}^{(v)}(t), y^m) +$$

$$+ (i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s (L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), y^s),$$

$$\overline{\Phi_{2,m}\left(y^n, \frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t)\right)} = -i\,\overline{\Phi_{2,m+1}(y^n, \tilde{x}^n(t))} -$$

$$- (-i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s (\hat{x}^{(s)}(t), L_{2s-m+1}y^{s+1}),$$

из формулы (I.12) —

$$\Phi_{3,m}\left(\frac{d}{dt}\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n\right) = (i)^m \sum_{s=1}^{m-1} (-i)^s (L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), y^s) -$$

$$- (i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s (L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), y^s),$$

$$0 = -i\Phi_{3,m+1}(\tilde{x}^n(t), y^n) + (i)^m \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s (L_{2s-m+1}\hat{x}^{(s)}(t), y^{s+1}) -$$

$$- (i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s (L_{2s-m+1}\hat{x}^{(s)}(t), y^{s+1}).$$

Складывая левые и правые части этих равенств и учитывая, что $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, получаем тождество (37). Если $\hat{x}(t)$ — решение (в смысле п. 1 работы [1]) уравнения $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, то решением этого уравнения будет и вектор-функция $\hat{x}'(t)$, откуда, подставляя в формулу (37) вместо $\hat{x}(t)$ функцию $\hat{x}'(t)$ и применяя два раза формулу (37) с учетом условий (11), (12), (32), (33) и леммы II.3, получаем тождества (38) и (39). Равенство (40) непосредственно следует из формулы (37), условия (13) и леммы II.3.

Лемма 10. *Пусть $\tilde{x}^n_{h,j,k}(t)$ — вектор-функция, построенная согласно формулам* (2) *и* (3) *по цепочке корневых векторов $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ оператор-функции* (1), *отвечающей нулевому характеристическому числу. Тогда для любого элемента $\tilde{y}^n \in \mathfrak{L}^n$ и натурального числа $m =$*

$= \overline{1, n+1}$ *равенство*

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(t), \tilde{y}^n) = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad h < m-1, \tag{41}$$

справедливо в следующих случаях: 1) m — *нечетно и выполнено условие* (11) *или* (32), *а мультииндекс* $(h, \bar{j}, k) \in \Delta^{m-1}(L, 0)$; 2) m — *четно и выполнено условие* (12) *или* (33), *а мультииндекс* $(h, \bar{j}, k) \in \Delta^{m-1}(L, 0)$; 3) *выполнено условие* (13).

Доказательство. При $m = 1$ равенство (41) следует из предположения $\tilde{x}^n_{h,j,k}(t) = 0$, если $h < 0$, а при $m = 2$ оно непосредственно вытекает из определения (I.13) формы $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ и тождества $\tilde{x}^n_{0,j,k}(t) = x_{0,j,k} \oplus 0_{n-1}$, в котором $x_{0,j,k}$ — собственный вектор, отвечающий нулевому характеристическому числу, а 0_{n-1} — нулевой элемент пространства $\mathfrak{H}^{n-1}$, т. е. при $m = 1, 2$ равенство (41) установлено без предположения о выполнении условий (11) — (13), (32), (33). Предположим, что равенство (41) установлено в случае выполнения условия (11) или (32) и нечетного индекса $m = 2q - 1$ при $q < [n/2]$. Выведем отсюда это же равенство, но уже для индекса $m = 2q + 1$. Так как мультииндекс $(h, \bar{j}, k) \in \Delta^{2q}(L, 0)$, то согласно тождеству (23) (которое справедливо и при выполнении условия (32)) и (38), имеем $\Phi_{2q-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n_{h,j,k}(t), \tilde{y}^n\right) = -\Phi_{2q+1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(t), \tilde{y}^n)$.

Но элементарное решение $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ отвечает нулевому характеристическому числу, поэтому, исходя из формул (2) и (3), получаем $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n_{h,j,k}(t) = \tilde{x}^n_{h-2,j,k}(t)$. Тем самым $\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-2,j,k}(t), \tilde{y}^n) = -\Phi_{2q+1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(t), \tilde{y}^n)$. Из этой формулы и предположения о справедливости равенства (41) при $m = 2q - 1$ вытекает это же равенство, но уже при $m = 2q + 1$. Значит, утверждение леммы 10 установлено в случае 1. Аналогично устанавливается равенство (41) и в случаях 2 и 3, однако в случае 2 вместо тождеств (23) и (38) используются тождества (24) и (39), а в случае 3 лишь тождество (40).

Лемма 11. *Пусть* $\tilde{x}^n_{0,j,k}(t)$ *и* $\tilde{x}^n_{r,u,k}(t)$ — *вектор-функции, построенные согласно правилам* (2) *и* (3) *по собственному вектору* $x_{0,j,k}$ *и цепочке корневых векторов* $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ *оператор-функции* (1), *отвечающих одному и тому же мнимому характеристическому числу* μ_k, *причем цепочка* $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ *продолжаема до длины* $r+2$. *Тогда* $\Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(t), \tilde{x}^n_{r,u,k}(t)) = 0$ *при* $-\infty < t < \infty$, *когда* $m = \overline{1, n+1}$ *и* 1) m — *нечетно и выполнено условие* (11) *или* (32); 2) m — *четно и выполнено условие* (12) *или* (33).

Доказательство. Согласно лемме 6, утверждение которой справедливо и при выполнении условий (32) или (33), $\Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(t), \tilde{x}^n_{r+1,u,k}(t)) = \Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(0), x_{r+1,u,k}(0))$. Дифференцируя по t это тождество, имеем $\mu_k\Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(t), \tilde{x}^n_{r+1,u,k}(t)) + \bar{\mu}_k\Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(t), \tilde{x}^n_{r+1,u,k}(t)) + \Phi_m(\tilde{x}^n_{0,j,k}(t), \tilde{x}^n_{r,u,k}(t)) = 0$, а так как μ_k — мнимое число, то сумма первого и второго слагаемых равна нулю, откуда и вытекает утверждение леммы.

Лемма 12. *Пусть* $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ *и* $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ — *две цепочки корневых векторов, отвечающие одному и тому же мнимому характеристическому числу, причем цепочка корневых векторов* $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ *продолжаема до цепочки длины* $r+s+1$, *где* $s \geq 0$. *Тогда для* $m = \overline{1, n+1}$ *равенство*

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = (-1)^s\Phi_m(\tilde{x}^n_{h-s,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r+s,u,k}(0)) \tag{42}$$

справедливо в следующих случаях: 1) m — *нечетно и выполнено условие*

(11) *или* (32), *а мультииндекс* $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{m-1}(L, 0)$; 2) m — *четно и выполнено условие* (12) *или* (33), *а мультииндекс* $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{m-1}(L, 0)$; 3) *выполнено условие* (13). *В частности, если* $h < s$, *то*

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = 0. \tag{43}$$

Кроме того, равенство (43) *справедливо, если выполнено условие* (13) *и хотя бы одна из цепочек корневых векторов* $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ *или* $x_{0,u,k}, \ldots$ $\ldots, x_{r,u,k}$, *отвечающая нулевому характеристическому числу, продолжаема до длины* $h + r - m + 3$.

Доказательство. Из формулы (27) следует, что коэффициент при $T \exp(\mu_h + \overline{\mu}_v) T \ (= T)$ равен нулю, поэтому

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r-1,u,k}(0)) + \Phi_m(\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = 0,$$

а значит,

$$\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \quad \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = -\Phi_m(\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0), \quad \tilde{x}_{r+1,u,k}(0)),$$

когда $h \geqslant 1$. Применяя это тождество s раз с учетом леммы 11 получаем равенство (42). Если $h < s$, то из предположения $\tilde{x}^n_{d,j,k}(0) = 0$ при $d < 0$ и равенства (42) выводим соотношение (43). Установим теперь второе утверждение леммы в предположении, что цепочка корневых векторов $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ продолжаема до длины $h + r - m + 3$. Положим число $s = h - m + 2$. Если $s \leqslant 0$, то $h \leqslant m - 2$ и равенство (43) вытекает из леммы 10. Если же $s > 0$, то согласно тождеству (42) $\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = (-1)^s \Phi_m(\tilde{x}^n_{m-2,j,k}(0), \tilde{x}^n_{h+r-m+2}(0))$, откуда и из леммы 10 следует равенство (43).

Лемма 13. *Пусть производные по Келдышу векторы* $\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ *и* $\tilde{x}^n_{r,u,k}(0)$ *построены по цепочкам корневых векторов, отвечающих одному и тому же мнимому характеристическому числу* μ_h, *а натуральное число* $q \leqslant p$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *в случае* $p \leqslant [n/2] + 1$, *выполнения условия* (11) *или* (32), *а мультииндексов* (h, j, k) *и* $(r, u, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R})$

$$\Phi_{2p-1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = |\mu_h|^{2(p-q)} \Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)); \tag{44}$$

если же мультииндексы (h, j, k) *и* $(r, u, k) \in \Delta^{2q}(L, 0\mathbb{R})$, *то*

$$\Phi_{2p-1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = \Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-p+q,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r-p+q,u,k}(0)); \tag{45}$$

2) *в случае* $p \leqslant [(n+1)/2]$, *выполнения условия* (12) *или* (33), *а мультииндексов* (h, j, k) *и* $(r, u, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R})$

$$\Phi_{2p}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = |\mu_h|^{2(p-q)} \Phi_{2q}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0));$$

если же мультииндексы (h, j, k) *и* $(r, u, k) \in \Delta^{2q+1}(L, 0)$, *то*

$$\Phi_{2p}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = \Phi_{2q}(\tilde{x}^n_{h-p+q,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r-p+q,u,k}(0));$$

3) *в случае* $p \leqslant n + 1$, *выполнения условия* (13) *и продолжаемости хотя бы одной цепочки корневых векторов* $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$ *или* $x_{0,u,k}, \ldots$ $\ldots, x_{r,u,k}$ (*по которым строятся векторы* $\tilde{x}^n_{h,j,k}(0)$ *и* $\tilde{x}^n_{r,u,k}(0)$) *до цепочки длины* $h + r + 1$

$$\Phi_p(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = (i\mu_h)^{p-q} \Phi_q(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0));$$

если же мультииндексы (h, j, k) *и* $(r, u, k) \in \Delta(L, 0)$, *то*

$$\Phi_p(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = (i)^{p-q} \Phi_q(\tilde{x}^n_{h-p+q,j,k}(0), \ \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)).$$

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1992, т. 44, № 7

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу включений $\Delta^m(L, 0) \subseteq \Delta^{m_1}(L, 0)$, если $m \leqslant m_1$, утверждение леммы достаточно установить при $p = q + 1$. Пусть выполнены условия (11) или (32). Тогда согласно лемме 4, формулам (22), (23) и (38) и включению $(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{2q}(L, 0)$ получаем

$$\Phi_{2q+1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = -\Phi_{2q-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n_{h,j,k}(t)\Big|_{t=0}, \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)\right).$$

Используя равенства (2) и (3), имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}^n_{h,j,k}(t)\Big|_{t=0} = \mu_k^2\tilde{x}^n_{h,j,k}(0) + 2\mu_k\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0) + \tilde{x}^n_{h-2,j,k}(0)),$$

откуда с учетом мнимости числа μ_k заключаем

$$\Phi_{2q+1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = |\mu_k|^2\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) -$$

$$-2\mu_k\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) - \Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-2,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)),$$

$$(h, j, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R}) \cup \Delta^{2q}(L, 0). \tag{46}$$

Предположим, что $h \leqslant r$. Так как $(r, u, k) \in \Delta^0(L, i\mathbb{R})$, то цепочка корневых векторов $x_{0,u,k}, \ldots, x_{r,u,k}$ продолжаема до длины $2r+1$. Т. е. в обозначениях леммы 12 $s = r$, а значит, на основании тождества (43) и предположения об $h \leqslant r$ имеем $\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-w,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = 0$ при $w \geqslant 1$, откуда с учетом формулы (46) следует утверждение (44), если $h \leqslant r$. Случай $h \geqslant r$ сводится к предыдущему в силу симметричности форм $\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$, которая вытекает из условия (11) или (32). Для нулевого характеристического числа μ_k равенство (45) вытекает из формулы (46) и тождества

$$\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-2,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = -\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r-1,u,k}(0)),$$

которое следует из (42). Второе утверждение леммы доказывается аналогично, а при выводе третьего вместо равенства (46) используется тождество

$$\Phi_{q+1}(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = i\mu_k\Phi_q(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) +$$

$$+ i\Phi_q(\tilde{x}^n_{h-1,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)),$$

вытекающее из формулы (40).

3. Э к в и в а л е н т н о с т ь и м и н и м а л ь н о с т ь ч а с т и к о р н е в ы х в е к т о р о в п у ч к о в о п е р а т о р о в в ы с о к о г о п о р я д к а. В этом пункте рассматриваются лишь ограниченные операторы, что специально далее не оговаривается. Введем полиномиальные скалярные оператор-функции

$$V_l(\lambda) = \sum_{r=1}^{n-1}\lambda^{r-1}\alpha_{l,r}I, \qquad l = \overline{1, m}, \tag{47}$$

где $\alpha_{l,r}$ — комплексные числа. Оператор-функции (47) соответствуют [3, с. 82—86] краевым условиям $\hat{V}_l[\hat{x}(t)] \equiv \sum_{r=1}^{n-1}\alpha_{l,r}\hat{x}^{(r-1)}(0) = f_l$, где $\hat{x}(t)$— решение однородного операторно-дифференциального уравнения $L(d/dt) \times \times \hat{x}(t) = 0$, символом которого является оператор-функция (1), а векторы $f_l \in \mathfrak{H}$. Исследование эквивалентности корневых векторов, отвечающих характеристическим числам из замкнутой левой полуплоскости, связано с изучением задач на полуоси $t \geqslant 0$ для уравнения $L(d/dt)\hat{x}(t) = 0$, причем мнимые характеристические числа определяют условия типа условий излучения на бесконечности [5, с. 202—203].

Чтобы сформулировать следствия из теорем 1 и 2, введем обозначения. По коэффициентам $\alpha_{l,r}$, входящим в оператор-функции (47), определим систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_{l,r}\zeta_r = 0, \qquad l = \overline{1, m}, \tag{48}$$

относительно комплексных неизвестных ζ_r. По набору $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ построим квадратичные формы

$$W^d_{1,\tilde{\xi}}\,[\tilde{\zeta}] = -i\sum_{q=1}^{d} \xi_q \sum_{s=1}^{2q} (-1)^{q+s}\zeta_{2q-s+1}\overline{\zeta}_s, \tag{49}$$

$$W^d_{2,\tilde{\xi}}\,[\tilde{\zeta}] = \sum_{q=1}^{d} \xi_q \sum_{s=1}^{2q-1} (-1)^{q+s}\zeta_{2q-s}\overline{\zeta}_s, \tag{50}$$

$$W^d_{\tilde{\xi}}\,[\tilde{\zeta}] = \sum_{q=1}^{d} (i)^{q+1}\,\xi_q \sum_{s=1}^{q} (-1)^s\,\zeta_{q-s+1}\overline{\zeta}_s, \tag{51}$$

зависящие от комплексных переменных ζ_r, причем в (49)—(51) $\tilde{\zeta} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{2d}\}$, $\tilde{\zeta} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{2d-1}\}$ и $\tilde{\zeta} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ соответственно. Отметим, что формы $W^d_{1,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ и $W^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ являются частными случаями формы $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$. Действительно, по набору $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\} \in \mathbb{R}^d$ введем два набора $\tilde{\xi}_1 = \{0, \xi_1, 0, \ldots, \xi_d\} \in \mathbb{R}^{2d}$ и $\tilde{\xi}_2 = \{\xi_1, 0, \xi_2, \ldots, \xi_d\} \in \mathbb{R}^{2d-1}$. Тогда

$$W^d_{1,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = W^{2d}_{\tilde{\xi}_1}[\tilde{\zeta}], \quad W^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = W^{2d-1}_{\tilde{\xi}_2}[\tilde{\zeta}].$$

В силу вещественности чисел ξ_q форма $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ (а значит, и формы $W^d_{1,\tilde{\xi}_1}[\tilde{\zeta}]$ и $W^d_{2,\tilde{\xi}_2}[\tilde{\zeta}]$) эрмитова, что установлено в следующем утверждении.

Лемма 14. *Форма $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$, заданная равенством* (51), — *эрмитова. Пусть число $\xi_d \neq 0$. Тогда форма $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ не сингулярна и в случае четного числа d имеет ровно $d/2$ положительных и $d/2$ отрицательных квадратов. В случае же нечетного числа d и $\xi_d > 0$ форма $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ имеет $(d+1)/2$ положительных и $(d-1)/2$ отрицательных квадратов, а при $\xi_d < 0$ положительных квадратов $(d-1)/2$, а отрицательных $(d+1)/2$.*

Доказательство. Заметим, что

$$W^d_{\tilde{\xi}}\,[\tilde{\zeta}] = \sum_{q=1}^{d} \xi_q \sum_{s=1}^{q} (i)^{q-s+1}\zeta_{q-s+1}\,\overline{(i)^s\zeta_s},$$

поэтому в переменных

$$\eta_s = (i)^s\zeta_s, \quad s = \overline{1, d}, \tag{52}$$

форма (51) примет вид

$$W^d_{\tilde{\xi}}\,[\tilde{\zeta}] = \sum_{q=1}^{d} \xi_q \sum_{s=1}^{q} \eta_{q-s+1}\overline{\eta}_s. \tag{53}$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{2q-1} \eta_{2q-s}\overline{\eta}_s = \begin{cases} |\eta_1|^2, & q = 1, \\ |\eta_q|^2 + 2\mathrm{Re}\sum\limits_{s=1}^{q-1} \eta_{2q-s}\overline{\eta}_s, & q = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{54}$$

и

$$\sum_{s=1}^{2q} \eta_{2q-s+1}\overline{\eta}_s = 2\mathrm{Re} \sum_{s=1}^{q} \eta_{2q-s+1}\overline{\eta}_s, \qquad q = 1, 2, \dots, \tag{55}$$

а числа ξ_q — вещественны, то форма $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ эрмитова. Установим следующие два равенства: при четном $d = 2k$, $k = 1, 2, \dots$,

$$W^{2k}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = 2\sum_{s=1}^{k} \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\xi_{2s-1}}{2}\eta_s + \sum_{q=2s}^{2k} \xi_q\eta_{q-s+1}\right)\overline{\eta}_s\right], \tag{56}$$

а при нечетном $d = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$,

$$W^{2k+1}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = \xi_{2k+1}|\eta_{k+1}|^2 + $$

$$+ 2\sum_{s=1}^{k} \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\xi_{2s-1}}{2}\eta_s + \sum_{q=2s}^{2k+1} \xi_q\eta_{q-s+1}\right)\overline{\eta}_s\right]. \tag{57}$$

Заметим, что равенство (56) вытекает из равенства (57), если положить в (57) число $\xi_{2k+1} = 0$. Поэтому достаточно установить формулу (57) при $k = 1, 2, \dots$. Учитывая тождества (53) — (55), имеем

$$W^{2k+1}_{\tilde{\xi}}[\overline{\zeta}] = \xi_{2k+1}|\eta_{k+1}|^2 + 2\xi_{2k+1}\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{k} \eta_{2k-s+2}\overline{\eta}_s +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \xi_{2s-1}|\eta_s|^2 + 2\sum_{q=2}^{k} \xi_{2q-1}\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{q-1} \eta_{2q-s}\overline{\eta}_s + 2\sum_{q=1}^{k} \xi_{2q}\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{q} \eta_{2q-s+1}\overline{\eta}_s.$$

Объединяя вначале второе и четвертое слагаемые в правой части последнего тождества, а затем переставляя во всех двойных суммах суммирование по q и s, получаем

$$W^{2k+1}_{\tilde{\xi}}[\overline{\zeta}] = \xi_{2k+1}|\eta_{k+1}|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{k}\sum_{q=s}^{k} \xi_{2q+1}\eta_{2q-s+2}\overline{\eta}_s +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{k} \frac{\xi_{2s-1}}{2}\eta_s\overline{\eta}_s + 2\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{k}\sum_{q=s}^{k} \xi_{2q}\eta_{2q-s+1}\overline{\eta}_s,$$

откуда вытекает формула (57), а значит, и формула (56). Выполняя следующую замену переменных η_s в формуле (57):

$$\theta_s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\xi_{2s-1}}{2} + 1\right)\eta_s + \sum_{q=2s}^{2k+1} \xi_q\eta_{q-s+1}\right], \qquad s = \overline{1, k},$$

$$\theta_{k+s} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\xi_{2s-1}}{2} - 1\right)\eta_s + \sum_{q=2s}^{2k+1} \xi_q\eta_{q-s+1}\right], \qquad s = \overline{1, k}, \tag{58}$$

$$\theta_{2k+1} = \eta_{2k+1},$$

и замечая, что $\theta_s + \theta_{k+s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\xi_{2s-1}}{2}\eta_s + \sum_{q=2s}^{2k+1} \xi_q\eta_{q-s+1}\right)$ и $\theta_s - \theta_{k+s} = = \eta_s/\sqrt{2}$, $s = \overline{1, k}$, с учетом неравенства нулю числа ξ_{2k+1}, делаем заключение о невырожденности преобразования (58) и о справедливости равенства

$$W^{2k+1}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = \xi_{2k+1}|\theta_{2k+1}|^2 + \sum_{s=1}^{k} (|\theta_s|^2 - |\theta_{k+s}|^2).$$

Из этого тождества с учетом замен (52) и (58) вытекают утверждения леммы.

Приведем теперь следствия из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *а нечетное число* $n \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* (11) *и для всех ненулевых решений системы уравнений* (48), *где* $m = (n-1)/2$, *форма* $W^m_{1,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \in \mathbb{R}^m_+$, *причем* $\xi_m > 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *справедливо соотношение*

$$x_{h,j,k}(V_1(\mu\tau), \ldots, V_m(\mu\tau), \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]^{1/2}_-) \simeq$$
$$\simeq [(\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus |L_n|^{1/2}] \tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \tag{59}$$

при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta^0_+(L, \Phi_n)$.

Теорема 4. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *а четное число* $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условию* (12) *и для всех ненулевых решений системы уравнений* (48), *где* $m = n/2$, *форма* $W^m_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \in \mathbb{R}^m_+$, *причем* $\xi_m > 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *справедливо соотношение* (59) *при мультииндексах* $(h, j, k) \in \Theta^0_+(L, \Phi_n)$.

Теорема 5. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условию* (13) *и для всех ненулевых решений системы уравнений* (48), *где* $m = [n/2]$, *форма* $W^{n-1}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1 \ldots, \xi_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n-1}$, *причем* $\xi_{n-1} > 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *справедливо соотношение* (59) *при мультииндексах* $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Psi^2_{\tilde{\xi}'})$, *где форма* $\Psi^2_{\tilde{\xi}'}$ *задана равенством* (10) *при наборе* $\tilde{\xi}' = \{\xi'_2, \ldots, \xi'_n, 0\}$ *с числами* $\xi'_q = \xi_{q-1}$ *при* $q = \overline{2, n}$.

Если требование $\xi_{n-1} > 0$ в теореме 5 заменить требованием $\xi_{n-1} < 0$, то эта теорема допускает следующее уточнение.

Теорема 6. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, $n \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* (13) *и для всех ненулевых решений системы уравнений* (48), *где* $m = [(n-1)/2]$, *форма* $W^{n-1}_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n-1}$, *причем* $\xi_{n-1} < 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *справедливо соотношение*

$$x_{h,j,k}(V_1(\mu\tau), \ldots, V_m(\mu\tau), \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]^{1/2}_+) \simeq$$
$$\simeq [(\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus |L_n|^{1/2}] \tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \tag{60}$$

при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Psi^2_{\tilde{\xi}'})$, *где форма* $\Psi^2_{\tilde{\xi}'}$ *задана равенством* (10) *при наборе* $\tilde{\xi}' = \{\xi'_2, \ldots, \xi'_n, 0\}$ *с числами* $\xi'_q = \xi_{q-1}$ *при* $q = \overline{2, n}$.

Отметим, что теорема 3 относится и к случаю четного n, а теорема 4 — к случаю нечетного n, если положить в этих теоремах оператор $L_n = 0$. Но тогда добавки, связанные со вкладом оператора $[(-i)^n L_n]^{1/2}_-$, не будут учтены. Для формулировок соответствующих утверждений введем оператор-функции

$$V^I_l(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} \lambda^{r-1} \alpha_{l,r} I, \qquad l = \overline{1, m}, \tag{61}$$

а по ним определим систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{l,r} \zeta_r = 0, \qquad l = \overline{1, m}. \tag{62}$$

относительно комплексных неизвестных ζ_r.

Следствие 1. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *а четное число* $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условию* (11) *и для всех ненулевых решений системы* (62), *где* $m = n/2$, *форма* $W^m_{1,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \in \mathbb{R}^m_+$, *причем число* $\xi_m > 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$

$$x_{h,i,k}(V^1_1(\mu\tau), \ldots, V^1_m(\mu\tau)) \simeq \tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \tag{63}$$

при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta^0_+(L, \Phi_n)$.

Это следствие вытекает из теоремы 3, если положить $L_n = 0$ и заметить, что форма $\Phi_{n+1}[\tilde{x}^{n+1}]$, построенная по коэффициентам L_ν полиномиального пучка операторов $n+1$ порядка с оператором $L_{n+1} = 0$, связана с формой $\Phi_n[\tilde{x}^n]$, построенной по коэффициентам полиномиального пучка операторов n порядка, равенством $\Phi_{n+1}[\tilde{x}^n \oplus x^{n+1}] = \Phi_n[\tilde{x}^n]$.

Аналогичные следствию 1 утверждения вытекают из теорем 4—6.

Замечание 1. Приведенные в лемме 14 свойства формы $W^d_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}]$ показывают, что при выполнении условий теорем 3—6 или следствия 1 функции (47) или (61) являются линейно независимыми. Отметим еще, что если $n = 2$, то в теоремах 4 и 5 требование выполнения неравенств $W^1_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ и $W^1_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ опускается, если считать $\alpha_{1,1} \neq 0$. Действительно, тогда множество ненулевых решений уравнения $\alpha_{1,1}\zeta_1 = 0$ — пустое, а значит, неравенства $W^1_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ и $W^1_{\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] < 0$ выполняются. Кроме того, заметим, что теорема 4 при $n = 2$ является частным случаем приведенной ниже теоремы 10.

Доказательство теорем 3—6, основанное на проверке требований теоремы 1, полностью повторяет доказательство теоремы I.2, если считать векторы $\tilde{y}^n = 0$, числа $\beta_{l,r} = 0$, а число $2n-2$ заменить числом $n-1$. В частности, матрицу A_1, заданную равенствами (I.52) и (I.53), при доказательстве теорем 3—6 надо положить равной

$$A_1 = \{\gamma_{s,v}\}^{n-1}_{s,v=1}, \tag{64}$$

где

$$\gamma_{s,v} = \begin{cases} \alpha_{s,v} & \text{при } s = \overline{1, m} \text{ и } v = \overline{1, n-1}, \\ 0 & \text{при } s = \overline{m+1, n-1} \text{ и } v = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{65}$$

При доказательстве теорем 3 и 4 соотношение (59) устанавливается при мультииндексах (h, j, k), принадлежащих соответственно множествам $\Theta^2_+(L, \Phi^2_{\tilde{\xi}'})$ и $\Theta^1_+(L, X^1_{\tilde{\xi}})$, где $\xi' = \{\xi'_2, \ldots, \xi'_{m+1}\}$, $\xi'_q = \xi_{q-1}$, а набор $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ удовлетворяет условиям теорем 3 и 4. Но в силу требования $L_0 \gg 0$ ноль не является характеристическим числом $L(\lambda)$, поэтому $\Theta^2_+(L, \Phi^2_{\tilde{\xi}'}) = \Theta^0_+(L, \Phi^2_{\tilde{\xi}'})$ и $\Theta^1_+(L, X^1_{\tilde{\xi}}) = \Theta^0_+(L, X^1_{\tilde{\xi}})$. А так как $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^m_+$ и $\xi_m > 0$, то на основании леммы 13 $\Theta^0_+(L, \Phi^2_{\tilde{\xi}'}) = \Theta^0_+(L, \Phi_n)$ и $\Theta^0_+(L, X^1_{\tilde{\xi}}) = \Theta^0_+(L, \Phi_n)$. Из сделанных пояснений вытекают теоремы 3 и 4.

Утверждения, аналогичные теоремам 3—6, выводятся и из теоремы 2. Приведем здесь лишь аналог теоремы 4.

Теорема 7. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *а четное число* $n \geqslant 4$, *удовлетворяет условию* (33) *и для всех ненулевых решений системы уравнений* (48), *где* $m = (n-2)/2$, *форма* $W^{m+1}_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] > 0$ *для некоторого фиксированного набора* $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}\} \in \mathbb{R}^{m+1}_+$, *причем* $\xi_{m+1} > 0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *справедливо соотношение* (60) *при мультииндексах* $(h, j, k) \in \Theta^0_-(L, \Phi_n)$.

При выводе теоремы 7 из теоремы 2 потребуется следующая переформулировка леммы I.3.

Лемма 15. *Пусть $\tilde{A}_1$ и $\tilde{\Phi}$ — скалярные блок-операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$, причем $\tilde{\Phi}$ — самосопряжен, а для соответствующих им матриц A_1 и Φ справедливо соотношение $(\Phi g, g) > 0$ для всех ненулевых элементов $g \in \mathfrak{Z}(A_1)$ $(\subseteq \mathbb{C}^n)$. Тогда найдется такой скалярный блок оператор $\tilde{A}_2 \in [\mathfrak{H}^n]$, что $\mathfrak{R}(\tilde{A}_1) \oplus \mathfrak{R}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{Z}(\tilde{A}_1) \oplus \mathfrak{Z}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{H}^n$ и для положительных постоянных c_1, c_2 и $\varkappa$ справедливо неравенство*

$$(\tilde{\Phi}\tilde{g}^n, \tilde{g}^n) - \varkappa \| \tilde{g}^n \|^2 \geqslant c_2 \| \tilde{A}_2 \tilde{g}^n \|^2 - c_1 \| \tilde{A}_1 \tilde{g}^n \|^2, \quad \tilde{g}^n \in \mathfrak{H}^n.$$

Лемма 15 вытекает из леммы I.3 при замене оператора $\tilde{\Phi}$ на $-\tilde{\Phi}$ (в формулировке леммы I.3 ошибочно предполагается, что операторы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{\Phi}$ действуют в пространстве $\mathfrak{H}$, хотя необходимо чтобы они действовали в пространстве $\mathfrak{H}^n$).

Вывод теоремы 7 из теоремы 2 почти полностью повторяет вывод теоремы I.2 из теоремы I.1, поэтому сделаем здесь лишь необходимые пояснения. Полагая в оценках (I.40) $m = 2q$, используя условие $L_0 \gg 0$, а также коммутируемость оператора $\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}$ с операторами $\tilde{\Phi}_m^0$, из леммы I.4 выводим неравенство

$$\sum_{q=1}^{n/2} \xi_q \tau^{2q-2} \Phi_{2q} [\tilde{x}^n] \geqslant \Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}^{n-1}) + \Upsilon_\tau^2 (x^n), \tag{66}$$

в котором $\tau > \tau_1$ (где $\tau_1 > 0$ из леммы I.4),

$$\Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}^{n-1}) = \sum_{q=1}^{n/2} \xi_q (\tilde{\Phi}_{2q}^0 (\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}) \tilde{x}_\tau^{n-1},$$

$$(\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}) \tilde{x}_\tau^{n-1}) - c\tau^{-1} \| (\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}) \tilde{x}_\tau^{n-1} \|^2, \tag{67}$$

$$\Upsilon_\tau^2 (x^n) = - \sum_{q=1}^{(n/2)-1} \xi_q \tau^{2q-2} \| \, | L_n |^{1/2} x^n \|^2 - \xi_{n/2} \tau^{n-2} (-i)^n (L_n x^n, x^n), \tag{68}$$

где в выражении (67) скалярные блок-операторы $\tilde{\Phi}_{2q}^0$ заданы формулой (I.39). По коэффициентам скалярных оператор-функций (47) согласно формулам (64) и (65) построим квадратную матрицу A_1. В этих обозначениях условие теоремы $W_{2, \tilde{\xi}}^{m+1} [\tilde{\zeta}] > 0$ примет вид $\sum_{q=1}^{n/2} \xi_q (\Phi_{2q}^0 g, g) > 0$ для всех ненулевых элементов $g \in \mathfrak{Z}(A_1)$ $(\subseteq \mathbb{C}^{n-1})$. Отсюда, из леммы 15 и из определения (67) выражения $\Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}^{n-1})$ следует, что найдется такой скалярный блок-оператор $\tilde{A}_2 \in [\mathfrak{H}^{n-1}]$, для которого справедливо неравенство

$$\Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}_\tau^{n-1}) \geqslant c_2 \| \tilde{A}_2 (\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}) \tilde{x}_\tau^{n-1} \|^2 - c_1 \| \tilde{A}_1 (\mathrm{diag}^{n-1} L_0^{1/2}) \tilde{x}_\tau^{n-1} \|^2 \tag{69}$$

при всех достаточно больших τ. На основании условия (33) и четности числа n в теореме 7 оператор $(-i)^n L_n$ — самосопряжен, поэтому с учетом требования $\xi_{n/2} > 0$ выражение (68) допускает оценку

$$\Upsilon_\tau^2 (x^n) \geqslant \xi_{n/2} \tau^{n-2} \{ 2^{-1} \| [(-i)^n L_n]_-^{1/2} x^n \|^2 - 2 \| [(-i)^n L_n]_+^{1/2} x^n \|^2 \} \tag{70}$$

при достаточно больших положительных τ. Из оценок (66), (69) и (70), принимая во внимание замечания, сделанные при выводе теорем 3—6, и полностью повторяя доказательство теоремы I.2 из теоремы 2 выводим теорему 7.

Следствие 2. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *а четное число* $n \geqslant 4$, *удовлетворяет условию* (33). *Тогда*

$$x_{h,j,k} (\mu^{n/2} I, \ldots, \mu^{n-2} I, \mu^{n-1} [(-i)^n L_n]_+^{1/2}) \simeq [(\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus | L_n |^{1/2}] \tilde{x}_{h,j,k}^n (0) \tag{71}$$

при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta_-^0 (L, \Phi_n)$.

Доказательство. Положим $n = 2d$ и будем считать, что $d \geqslant 3$, так как случай $d = 2$ существенно проще. Введем скалярные оператор-функции $V_l(\lambda) = \lambda^{d+l-1}I$, $l = \overline{1, d-1}$, для которых ненулевыми решениями системы уравнений (48) являются такие наборы чисел $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2d-1}$, что не все числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ равны нулю, а $\zeta_{d+1} = \ldots = \zeta_{2d-1} = 0$. С учетом равенств (50), (52) и (54) условие $W^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] > 0$ из теоремы 7 примет вид

$$\Psi^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] \equiv \sum_{q=1}^{d} \xi_q |i\zeta_q|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{q=2}^{d} \xi_q \sum_{s=1}^{q-1} (i)^{2q-s} \zeta_{2q-s} \overline{(i)^s \zeta_s} > 0. \qquad (72)$$

Так как $\zeta_{d+1} = \ldots = \zeta_{2d-1} = 0$, то

$$\Psi^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] = \sum_{s=1}^{d} \xi_s |\zeta_s|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{q=2}^{d-1} \xi_q \sum_{s=2q-d}^{q-1} (i)^{2q-s} \zeta_{2q-s} \overline{(i)^s \zeta_s} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{s=1}^{d} \xi_s |\zeta_s|^2 - \sum_{q=2}^{d-1} \sum_{s=2q-d}^{q-1} \xi_q^2 |\zeta_{2q-s}|^2 - \sum_{q=2}^{d-1} \sum_{s=1}^{q-1} |\zeta_s|^2 =$$

$$= \sum_{s=1}^{d} \xi_s |\zeta_s|^2 - \sum_{q=2}^{d-1} \sum_{s=q+1}^{d} \xi_q^2 |\zeta_s|^2 - \sum_{s=1}^{d-1} |\zeta_s|^2 \left(\sum_{q=s+1}^{d-1} 1 \right).$$

Переставляя во второй сумме суммирование по q и s, получаем оценку

$$W^d_{2,\tilde{\xi}}[\tilde{\zeta}] \geqslant (\xi_1 - d)|\zeta_1|^2 + (\xi_2 - d)|\zeta_2|^2 + \sum_{s=3}^{d} \left(\xi_s - d - \sum_{q=1}^{s-1} \xi_s^2 \right) |\zeta_s|^2,$$

из которой видно, что при соответствующем наборе положительных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_d$ неравенство (72) справедливо при всех не равных одновременно нулю комплексных числах $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ и $\zeta_{d+1} = \ldots = \zeta_{2d-1} = 0$. Отсюда в силу теоремы 7 вытекает, что для всех достаточно больших положительных τ справедливо соотношение

$$x_{h,j,k}(\mu^{n/2}\tau^{n/2}I, \ldots, \mu^{n-2}\tau^{n-2}I, \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]_+^{1/2}) \simeq$$
$$\simeq [(\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus |L_n|^{1/2}]\, x_{h,j,k}(0)$$

при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta^0_-(L, \Phi_n)$. Но

$$x_{h,j,k}(\mu^{n/2}\tau^{n/2}I, \ldots, \mu^{n-2}\tau^{n-2}I, \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]_+^{1/2}) \simeq$$
$$\simeq x_{h,j,k}(\mu^{n/2}I, \ldots, \mu^{n-2}I, \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]_+^{1/2}).$$

Из этих соотношений эквивалентности и следует утверждение (71).

Чтобы сформулировать утверждение о минимальности, введем необходимые обозначения. Пусть на многообразии $\mathfrak{L}^n$ задана симметричная полуторалинейная форма $\Phi(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$; $x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_h))}$,— каноническая система корневых векторов, отвечающая мнимой дискретной точке спектра μ_h оператор-функции (1) [2, с. 195], а $\mathscr{F}_h$ — некоторое подмножество натуральных чисел от 1 до $\dim \mathfrak{Z}(L(\mu_h))$. Тогда через $\Lambda^0_\pm(L, \mu_h, \Phi)$ обозначим такое множество мультииндексов (h, j, k), что либо $h < [d_{j,k}/2]$ либо $h = [d_{j,k}/2]$ при $j \in \mathscr{F}_h$ и выражение $\Phi\left[\sum_{j \in \mathscr{F}_k} c_j \tilde{x}^n_{[d_{j,k}/2],j,k}(0)\right]$ для любых комплексных чисел c_j неотрицательно, если $([d_{j,k}/2], j, k) \in \Lambda^0_+(L, \mu_k, \Phi)$, соответственно неположительно, если $([d_{j,k}/2], j, k) \in \Lambda^0_-(L, \mu_h, \Phi)$. Отметим, что согласно лемме 12 $\Phi_m(\tilde{x}^n_{h,j,k}(0), \tilde{x}^n_{r,u,k}(0)) = 0$, если $h < [d_{j,k}/2]$ и $r < [d_{u,k}/2]$, поэтому $\Lambda^0_\pm(L, \mu_h, \Phi_m) \subseteq \Delta^0_\pm(L, \mu_k, \Phi_m)$. И наконец, определим множества мультииндексов $\Lambda^0_\pm(L, i\mathbb{R}, \Phi) =$

$= \bigcup\limits_{\mu_k \in i\mathbb{R}} \Lambda^0_{\pm}(L, \mu_k, \Phi)$. Во введенных обозначениях из следствия 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *четное число* $n \geqslant 4$, *удовлетворяет условию* (33). *Тогда система векторов* $x_{h,j,k}(I, \dots, \mu^{(n/2)-2}I, \mu^{(n/2)-1}[(-i)^n L_n]^{1/2}_+)$ *минимальна, если мультииндексы* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Lambda^0_-(L, i\mathbb{R}, \Phi_n)$.

Доказательство. Согласно лемме II. 2 и следствию 2 система векторов $x_{h,j,k}(\mu^{n/2}I, \dots, \mu^{n-2}I, \mu^{n-1}[(-i)^n L_n]^{1/2}_+)$ минимальна, если мультииндексы $(h, j, k) \in \Lambda(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Lambda^0_-(L, i\mathbb{R}, \Phi_n)$, причем множество мультииндексов $\Lambda(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Lambda^0_-(L, i\mathbb{R}, \Phi_n)$ является правильным [2, с. 200]. Отсюда и из леммы II. 8 вытекает утверждение следствия 3.

Следствие 4. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0 \gg 0$, *нечетное число* $n \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* (33). *Тогда система векторов* $x_{h,j,k}(I, \dots, \mu^{(n-3)/2}I)$ *минимальна, если мультииндексы* $(h, j, k) \in \Lambda(L, \operatorname{Re}\lambda < 0) \cup \Lambda^0_-(L, i\mathbb{R}, \Phi_n)$.

Это следствие выводится из следствия 3 точно так же, как следствие 1 — из теоремы 3.

4. Эквивалентность части корневых векторов квадратичного пучка операторов. Рассмотрим пучок операторов (1) при $n = 2$, т. е. оператор-функцию

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2, \tag{73}$$

для которой условия (11) и (12) принимают соответственно вид (II.24) и (II.25), а условие (13) — вид $\operatorname{Im}(L_0 x, x) = \operatorname{Re}(L_1 x, x) = \operatorname{Im}(L_2 x, x)$ для $x \in \mathfrak{L} = \mathfrak{D}(L_0) \cap \mathfrak{D}(L_1) \cap \mathfrak{D}(L_3)$. В формулировках приведенных далее теорем используются вектор-функции (2).

Теорема 8. *Пусть оператор-функция* (73) *удовлетворяет условию* (11), *а* α *и* β — *такие комплексные числа, что* $\bar{\alpha}\beta > 0$. *Тогда справедливы соотношения*

$$[(\alpha i L_1 + \beta I)\hat{x}_{h,j,k}(0) + 2\alpha i L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(0)] \simeq \begin{pmatrix} L_1 & 2L_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \tag{74}$$

для мультииндексов $(h, j, k) \in \Theta^0_+(L, \Phi_1)$ *и*

$$[2\alpha i L_0 \hat{x}_{h,j,k}(0) + (\alpha i L_1 - \beta I)\hat{x}'_{h,j,k}(0)] \simeq \begin{pmatrix} 2L_0 & L_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tilde{x}^2_{h,j,k}(0) \tag{75}$$

для мультииндексов $(h, j, k) \in \Theta^2_+(L, \Phi_3)$.

Теорема 9. *Пусть оператор-функция* (73) *удовлетворяет условию* (11). *Тогда если* $i(L_1 x, x) \leqslant -c\|x\|^2$ *с независящей от* $x \in \mathfrak{L}$ *постоянной* $c > 0$, *то при* $(h, j, k) \in \Theta^0_+(L, \Phi_1)$ *справедливы соотношения*

$$L_2 \hat{x}'_{h,j,k}(0) \simeq \operatorname{diag}\{I, L_2\}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0), \tag{76}$$

$$(L_2 + I - L_2^0)\hat{x}'_{h,j,k}(0) \simeq \operatorname{diag}\{I, L_2 + I - L_2^0\}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0). \tag{77}$$

Если же $i(L_1 x, x) \geqslant c\|x\|^2$ *с независящей от* $x \in \mathfrak{L}$ *постоянной* $c > 0$, *то при* $(h, j, k) \in \Theta^2_+(L, \Phi_3)$ *справедливы соотношения*

$$L_0 \hat{x}_{h,j,k}(0) \simeq \operatorname{diag}\{L_0, I\}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0), \tag{78}$$

$$(L_0 + I - L_0^0)\hat{x}_{h,j,k}(0) \simeq \operatorname{diag}\{L_0 + I - L_0^0\}\tilde{x}^2_{h,j,k}(0). \tag{79}$$

Теорема 10. *Пусть оператор-функция* (73) *удовлетворяет условию* (12), *а* $\tilde{F}$ — *такой самосопряженный оператор, действующий в пространстве* $\mathfrak{H}^2$, *что* $\mathfrak{D}(\tilde{F}) \subseteq \mathfrak{L}^2$ *и* $(\tilde{F}\tilde{x}^2, \tilde{x}^2) \geqslant (\operatorname{diag}\{L_0, L_2\}\tilde{x}^2, \tilde{x}^2)$ *для всех* *векторов* $\tilde{x}^2 \in \mathfrak{L}^2$. *Тогда при* $(h, j, k) \in \Theta_+^{\mathrm{I}}(L, \Phi_2)$ *справедливо соотношение*

$$F_+^{1/2} \tilde{x}_{h,j,k}^2(0) \simeq F^{1/2} \tilde{x}_{h,j,k}^2(0). \tag{80}$$

Доказательства теорем 8—10 вытекают из теоремы 1 точно так же, как и доказательства теорем II.3—II.5 вытекают из теоремы I.1. Например, при получении соотношений (76) и (77) используется вид (II.21) формы $\Phi_1[\tilde{x}^2]$, условие $i(L_1 x, x) \leqslant -c\|x\|^2$, неравенство Коши—Буняковского и лемма II.3, на основании которых $\Phi_1[\tilde{x}^2] \leqslant c_1\|L_2 x^2\|^2 - c_2\|x^1\|^2 \leqslant c_2\|(L_2 + I - L_2^0)x^2\|^2 - c_2\|x^1\|^2$ с независящими от x^1 и $x^2 \in \mathfrak{L}$ постоянными $c_1, c_2 > 0$. Полагая теперь в теореме 1 форму $\Phi_\xi^q[\tilde{x}^2] = \Phi_1[\tilde{x}^2]$ (т. е. $q = 1$, а $\tilde{\xi} = \{1, 0\}$), оператор $\tilde{J}_2 = \mathrm{diag}\{I, 0\}$, а оператор $\tilde{J}_1 = \mathrm{diag}\{0, L_2\}$ либо $\tilde{J}_1 = \mathrm{diag}\{0, L_2 + I - L_2^0\}$, из теоремы 1 выводим соотношения (76) и (77). (Кроме того, заметим, что в равенствах (II.28)—(II.30) ошибочно написан вектор βx^2, а следует писать вектор βx^1.)

Замечание 2. Если оператор-функция (73) удовлетворяет условию (13), то она удовлетворяет одновременно условию (11) и (12). Поэтому к ней возможно применение утверждений теорем 8—10. Однако в этом случае соотношения (74), (76), (77) справедливы при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Phi_1)$, соотношения (75), (78), (79) — при мультииндексах $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Phi_3)$, а соотношение (80) — при $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Phi_2)$. Кроме того, отметим, что когда оператор-функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (13), то и оператор-функция $-L(\lambda)$ так же удовлетворяет условию (13), а корневые векторы у оператор-функций $L(\lambda)$ и $-L(\lambda)$, отвечающие одним и тем же характеристическим числам, одинаковые, причем $\Theta_\pm(L, \Omega, \Phi_m) = \Theta_\mp(-L, \Omega, \Phi_m)$ при верхнем или нижнем наборе индексов «$\pm$». Поэтому из теоремы 1 вытекает следующее уточнение, например, теоремы 9.

Теорема 11. *Пусть у оператор-функции* (73) *операторы* L_0 *и* L_2 *ограничены и самосопряжены,* $i(L_1 x, x) \leqslant -c\|x\|^2$ *с независящей от* $x \in \mathfrak{D}(L_1)$ *постоянной* $c > 0$, *а число* $\alpha \in [0, 1]$. *Тогда соотношения*

$$L_2^\alpha \hat{x}'_{h,j,k}(0) \simeq \mathrm{diag}\{I, L_2^\alpha\}\, \tilde{x}_{h,j,k}^2(0), \tag{81}$$

$$(L_2^\alpha + I - L_2^0)\, \hat{x}'_{h,j,k}(0) \simeq \mathrm{diag}\{I, L_2^\alpha + I - L_2^0\}\, \tilde{x}_{h,j,k}^2(0) \tag{82}$$

справедливы при $(h, j, k) \in \Theta_+(L, \Omega, \Phi_1)$, *а соотношения*

$$L_0^\alpha \hat{x}_{h,j,k}(0) \simeq \mathrm{diag}\{L_0^\alpha, I\}\, \tilde{x}_{h,j,k}^2(0), \tag{83}$$

$$(L_0^\alpha + I - L_0^0)\, \hat{x}_{h,j,k}(0) \simeq \mathrm{diag}\{L_0^\alpha + I - L_0^0, I\}\, \tilde{x}_{h,j,k}^2(0) \tag{84}$$

при $(h, j, k) \in \Theta_-(L, \Omega, \Phi_3)$.

Доказательство соотношений (81), (82) основано на оценках $\Phi_1[\tilde{x}^2] \leqslant c_1\|L_2^\alpha x^2\|^2 - c_2\|x^1\|^2 \leqslant c_1\|(L_2^\alpha + I - L_2^0)x^2\|^2 - c_2\|x^1\|^2$ с независящими от $x^1, x^2 \in \mathfrak{D}(L_1)$ постоянными $c_1, c_2 > 0$. Аналогично оценивая форму $\Phi_3[\tilde{x}^2]$, получаем соотношения (83), (84).

Замечание 3. Для замкнутого оператора L со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(L)$ и $\mathrm{Im}\,\nu(Lx, x) \geqslant 0$ при постоянной $\nu \neq 0$ и всех $x \in \mathfrak{D}(L)$ определен оператор L^α (см., например, [6, с. 366]). Поэтому, если в теореме 9 дополнительно считать оператор $L_2 \in [\mathfrak{H}]$ (или $L_2 + I - L_2^0$ ограниченно обратимым), то соотношения (76), (77) в этой теореме можно заменить соотношениями (81), (82) при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (соответственно при $\alpha \geqslant 1$). Если же считать $L_0 \in [\mathfrak{H}]$ (или $L_0 + I - L_0^0$ ограниченно обратимым оператором), то соотношения (78), (79) в теореме 9 заменяются соотношениями (83), (84) при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (соответственно при $\alpha \geqslant 1$).

Из теорем 8—11 несложно вывести утверждения о минимальности части канонических систем корневых векторов, как это сделано в следствиях 3 и 4.

Приведенные здесь признаки эквивалентности содержат основные результаты работ [7—9]. Из них вытекают также уточнения признаков минимальности из работ [10, 11], хотя в полной мере они их и не охватывают (ср., например, следствия 3 и 4 с теоремами 6 и 7 из [11]).

1. *Радзиевский Г. В.* Эквивалентность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке, для полиномиальных пучков операторов // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 83—95.
2. *Радзиевский Г. В.* Минимальность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке // Там же.— 1990.— **42**, № 2.— С. 195—205.
3. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук.— 1982.— **37**, № 2.— С. 81—145.
4. *Радзиевский Г. В.* О линейной независимости производных по Келдышу цепочек у аналитических в полуплоскости оператор-функций // Мат. сб. — 1987. — **132**, № 4. — С. 556—577.
5. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1989. — Вып. 14. — С. 140—224.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
7. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов (эквивалентность части корневых векторов).— Киев, 1984.— 52 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 84.32).
8. *Радзиевский Г. В., Ашуров С. Б.* Полиномиальный пучок операторов (эквивалентность части корневых векторов).— Киев, 1985.— 64 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 85.44).
9. *Радзиевский Г. В., Ашуров С. Б.* Полиномиальный пучок операторов (минимальность части корневых векторов).— Киев, 1985.— 44 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 85.71).
10. *Шкаликов А. А.* О минимальности производных цепочек, отвечающих части собственных и присоединенных элементов самосопряженных пучков операторов // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика.— 1985.— № 6.— С. 10—19.
11. *Шкаликов А. А.* О принципах отбора и свойствах части собственных и присоединенных элементов пучков операторов // Там же.— 1988.— № 4.— С. 16—25.

Получено 28.02.92