УДК 519.21

М. С. Братійчук (Сілез. ун-т технологій, Польща),
О. А. Чечельницький, І. Я. Усар (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СИСТЕМА $M/M/1$ З ПОВТОРНИМИ ВИМОГАМИ ТА ЗМІННОЮ ІНТЕНСИВНІСТЮ ОБСЛУГОВУВАННЯ

The paper deals with queueing system of the type $M/M/1$ with repeated claims in the case where the service intensity depends on the loading of the system, i.e., on the number of claims in the line to be served. We establish the existence conditions and the formulas for ergodic distribution of the number of claims in the system with bounded and unbounded lines of repeated claims.

Розглядається система обслуговування типу $M/M/1$ з повторними вимогами, в якій інтенсивності обслуговування залежать від завантаження системи, тобто від кількості вимог, які знаходяться в черзі на обслуговування. Знайдено умови існування та формули для ергодичного розподілу кількості вимог у системі у випадку скінченної та нескінченної черги повторних вимог.

1. Вступ. Стандартну систему типу $M/M/1/\infty$ з повторними вимогами можна описати таким чином. Система складається з одного обслуговуючого приладу. Вхідний потік пуассонівський з інтенсивністю λ. Вимога, яка надійшла в систему і знайшла прилад вільним, негайно надходить на обслуговування, а після обслуговування залишає систему. Якщо ж прилад зайнятий, то ця вимога стає повторною і надходить на так звану орбіту. Кожна вимога, яка знаходиться на орбіті, через інтервали часу з показниковим розподілом з параметром ν і незалежно від інших вимог, які в цей час є на орбіті, намагається потрапити на обслуговування, і якщо в момент звернення обслуговуючий пристрій вільний, то ця вимога надходить на обслуговування. В іншому випадку вона повертається на орбіту і процес повторюється. Таким чином, кожна вимога, яка знаходиться на орбіті, генерує пуассонівський потік повторних вимог інтенсивності ν. Час обслуговування кожної вимоги має показниковий розподіл. Параметр цього розподілу визначається таким чином: якщо в момент, коли вимога (з орбіти чи та, що щойно надійшла) потрапляє на обслуговування і в цей момент в системі знаходиться j вимог (зрозуміло, що $j = i + 1$, де i позначає кількість вимог на орбіті), то параметр розподілу часу її обслуговування буде μ_j. Зміна інтенсивності обслуговування відбувається лише в моменти, коли вимога попадає на обслуговуючий пристрій.

Таким чином, на відміну від традиційних систем (див. [1, 2]) маємо ситуацію, коли час обслуговування залежить від кількості вимог у системі. Математичні моделі систем із повторними викликами мають широке застосування у практиці (див. [3, 4]).

Необхідність вивчати моделі, параметри яких залежать від кількості замовлень у системі, пов'язана з економічними аспектами роботи таких систем. У конкретних системах ми часто не можемо впливати на інтенсивність надходження замовлень, але можемо змінювати інтенсивність роботи сервера в залежності від кількості замовлень у системі. Тому в залежності від кількості тих замовлень менеджер може динамічно керувати політикою обслуговування, покращуючи її економіко-цінові характеристики. Так, в роботі [5] описано модель, в якій інтенсивність обслуговування змінюється, якщо черга досягає певного рівня T. Це є так звана *порогова стратегія*. Подібні схеми розглядалися, наприклад, у роботах [6 – 8]. Метод знаходження ергодичних імовірностей для систем із пороговою стратегією полягав у тому (див., наприклад, [8]), що рівняння для ергодичних імовірностей спочатку розв'язувалися на множинах станів $\{0, 1, \ldots, T-1\}$ і $\{T, T+1, \ldots\}$, після чого відбувалося „склеювання” розв'язків на межі $i = T$. У випадку більшої кількості порогів, на яких відбувається зміна інтенсивності обслуговування (а така необхідність часто з'являється в конкретних моделях), такий метод стає громіздким та неефективним.

Мета цієї статті — вияснити умови існування ергодичного розподілу описаної вище системи, запропонувати метод дослідження і знайти точні формули для цього розподілу.

2. Математична модель. Зазвичай, дослідження системи обслуговування розпочинається з опису її функціонування за допомогою марковського процесу. Так, коли б в описаній вище системі інтенсивність обслуговування була сталою, тобто $\mu_i = \mu = \mathrm{const}$, то цей опис виглядав би таким чином (див. [2]). Нехай $\xi(t)$ позначає кількість вимог, яка є на орбіті в момент часу t, а $\eta(t)$ визначає стан приладу в цей момент часу: якщо прилад вільний, то $\eta(t) = 0$, а якщо прилад зайнятий обслуговуванням вимоги, то $\eta(t) = 1$. Двокомпонентний процес $(\eta(t), \xi(t))$ є однорідним марковським процесом із простором станів $S = \{(i, j), i = 0, 1, j = 0, 1, 2, \ldots\}$.

У випадку, коли інтенсивність обслуговування залежить від кількості вимог у системі, на відміну від [2], процес $(\eta(t), \xi(t))$ вже не буде марковським, але ми можемо зробити його таким, надавши інший зміст випадковому процесу $\eta(t)$.

Нехай, як і раніше, $\xi(t)$ позначає кількість вимог, яка є на орбіті в момент часу t. Якщо в момент часу t обслуговуючий прилад зайнятий обслуговуванням і інтенсивність цього обслуговування є μ_i, $i \geq 1$, то говоримо, що обслуговуючий прилад знаходиться в режимі i. Якщо ж в момент часу t обслуговуючий прилад вільний, то говоримо, що він перебуває в режимі $i = 0$. Нехай тепер $\eta(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ позначає режим обслуговуючого пристрою в момент часу t.

Зрозуміло, що якщо $\xi(t) = i \geq 0$, а $\eta(t) = 0$, то в системі в момент часу t є i вимог, всі вони знаходяться на орбіті, а обслуговуючий пристрій вільний. А якщо $\xi(t) = i \geq 0$, $\eta(t) \geq 1$, то в системі в момент часу t є $i + 1$ вимога: одна на обслуговуванні та i вимог на орбіті. Легко зрозуміти, що тепер $(\eta(t), \xi(t))$ є однорідним марковським процесом із фазовим простором $E = \{(i, j), i \geq 0, j \geq \max(0, i-1)\}$ (див. пояснення нижче). На рис. 1 побудовано граф інтенсивностей переходів цього процесу.

Наведемо деякі пояснення до цього рисунка.

1. Нехай у певний момент часу $t = \tau$ сервер прийняв замовлення на обслуговування і $\xi(\tau - 0) = j \geq 1$. Якщо це замовлення не з орбіти, то $\eta(\tau) = j + 1$, $\xi(\tau) = j$. Якщо ж воно попало на сервер з орбіти, то $\eta(\tau) = j$, $\xi(\tau) = j - 1$. Отже, завжди $\xi(t) \geq \eta(t) - 1$. Звідси випливає, що фазовим простором процесу $(\eta(t), \xi(t))$ є $E = \{(i, j), i \geq 0, j \geq \max(0, i-1)\}$.

2. Із стану $(0, j)$ процес $(\eta(t), \xi(t))$ може перейти в стан $(j+1, j)$ (якщо на сервер попала вимога не з орбіти), і інтенсивність цього переходу є λ, або в стан $(j, j-1)$ (якщо на сервер попала вимога з орбіти), і інтенсивність цього переходу є $j\nu$. Подібним чином можна пояснити інші переходи на рис. 1.

Ми будемо говорити, що процес $(\eta(t), \xi(t))$ є ергодичним, якщо існують границі

$$\pi_{ij} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = i, \xi(t) = j / \eta(0) = k, \xi(t) = l)\} > 0$$

для довільних $i, j, k, l \geq 0$, і $\sum_{ij} \pi_{ij} = 1$.

3. Умова ергодичності.

Теорема 1. *Якщо* $\overline{\lim}_{j \to \infty} \dfrac{\lambda}{\mu_j} = q < 1$, *то процес* $(\eta(t), \xi(t))$ *є ергодичним.*

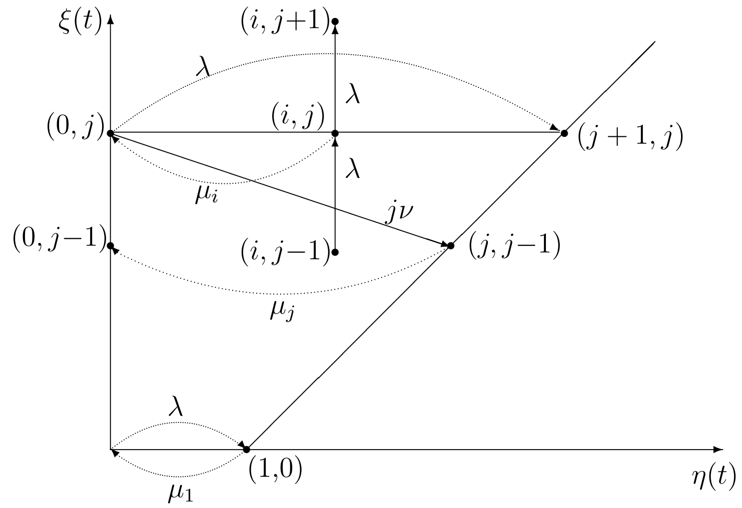

Рис. 1

Для доведення цієї теореми використовується такий результат [2, с. 97].

Теорема 2. *Нехай $\xi(t)$ є марковським процесом із простором станів $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ та інтенсивностями переходів q_{ij}, $i, j \in S$, такими, що $\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} = 0$ для довільних $i \in S$. Нехай існує числова функція $\varphi(i), i \in S$, така, що*:

i) $\inf_{i\in S} \varphi(i) > -\infty$ *і* $\sum_{j\neq i} q_{ij} \left(\varphi(j) - \varphi(i)\right) < \infty$, $i \in S$;

ii) *для деякого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність $\sum_{j\neq i} q_{ij} \left(\varphi(j) - \varphi(i)\right) < -\varepsilon$ для всіх $i \in S$, за винятком можливо їх скінченної кількості.*

Тоді процес $\xi(t)$ є ергодичним.

***Зауваження* 1.** Функцію $\varphi(\cdot)$, про яку йдеться в теоремі 2, називають *тест-функцією*.

***Доведення теореми* 1.** В якості тест-функції $\varphi(\cdot, \cdot)$ візьмемо функцію $\varphi(i, j) = j - \dfrac{a}{i+1}$, де $a \in (q, 1)$. Нехай $q_{(i,j)}^{(k,l)}$ позначає інтенсивність переходу процесу $(\eta(t), \xi(t))$ зі стану (i, j) у стан (k, l). Тепер для стану (i, j), $1 \le i \le j+1$, використовуючи наведений вище граф переходів, маємо

$$\sum_{(k,l)\neq(i,j)} q_{(i,j)}^{(k,l)} \left(\varphi(k,l) - \varphi(i,j)\right) = q_{(i,j)}^{(0,j)} \left(\varphi(0,j) - \varphi(i,j)\right) +$$

$$+q_{(i,j)}^{(i,j+1)} \left(\varphi(i,j+1) - \varphi(i,j)\right) = \mu_i \left(j - a - j + \frac{a}{i+1}\right) + \lambda(j+1-j) =$$

$$= \mu_i \left(\frac{\lambda}{\mu_i} - \frac{ia}{i+1}\right). \tag{1}$$

Аналогічно для стану $(0, j)$, $j \ge 1$, отримуємо

$$\sum_{(k,l)\neq(0,j)} q_{(0,j)}^{(k,l)} \left(\varphi(k,l) - \varphi(0,j)\right) = q_{(0,j)}^{(j,j-1)} \left(\varphi(j,j-1) - \varphi(0,j)\right) +$$

$$+q_{(0,j)}^{(j+1,j)}\left(\varphi(j+1,j)-\varphi(0,j)\right)=j\nu\left(a-1-\frac{a}{j+1}\right)+\lambda\left(a-\frac{a}{j+2}\right)<$$
$$<j\nu(a-1)+\lambda. \tag{2}$$

Із співвідношень (1), (2) випливає, що для всіх достатньо великих i, j та деякого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\sum_{(k,l)\neq(i,j)}\left(\varphi(k,l)-\varphi(i,j)\right)<-\varepsilon,$$

що і завершує доведення теореми.

4. Формули для ергодичного розподілу. Опишемо тепер спосіб, який часто буває корисним при написанні рівнянь рівноваги для ергодичного розподілу марковського процесу. Розглянемо ергодичний марковський процес $\xi(t)$ з дискретним фазовим простором S, інтенсивностями переходів $a_{ij},\ i,j\in S$, і нехай π_i позначає його ергодичний розподіл. Нехай $S=S_1\cup S_2,\ S_1,S_2\neq\varnothing$ і $S_1\cap S_2=\varnothing$. Величину $\sum_{S_1\to S_2}a_{ij}\pi_i$, де $\sum_{S_1\to S_2}$ означає, що додавання відбувається лише для тих пар індексів $(i,j),\ i\in S_1,\ j\in S_2$, для яких перехід зі стану i в стан j є можливим, називаємо *потоком імовірностей із множини* S_1 *у множину* S_2. Тоді [9]

$$\sum_{S_1\to S_2}a_{ij}\pi_i=\sum_{S_2\to S_1}a_{ij}\pi_i. \tag{3}$$

Введемо такі позначення:

$$\kappa=-\lambda/\nu, \qquad \beta_i=\lambda/(\lambda+\mu_i). \tag{4}$$

Теорема 3. *Якщо* $\overline{\lim}_{j\to\infty}\lambda/\mu_j<1$, *то для процесу* $(\eta(t),\xi(t))$ *існує ергодичний розподіл, який можна записати у вигляді*

$$\pi_{00}=\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}b(i)A_i\right)^{-1}, \quad \pi_{0j}=\pi_{00}\frac{\lambda}{j\nu}\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_k^{j-k}A_k}{(k-1)!\mu_k}, \quad j\geq 1,$$
$$\pi_{ij}=\pi_{00}\frac{\beta_i^{j-i+1}A_i}{(i-1)!\mu_i}, \quad j\geq i-1, \quad i\geq 1,$$

де

$$A_i=-\nu\sum_{k=1}^{i}\kappa^k H(k,i-k),$$
$$b(i)=\frac{1}{(i-1)!\mu_i}\left[\frac{\lambda+\mu_i}{\mu_i}+\frac{\kappa}{\beta_i^i}\left(\ln(1-\beta_i)+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\beta_i^k}{k}\right)\right],$$

а функція $H(i,k)$ *визначається у процесі доведення теореми.*

Доведення. Отже, нехай для процесу $(\eta(t),\xi(t))$ ергодичний розподіл π_{ij} існує, тобто умова $\overline{\lim}_{j\to\infty}\dfrac{\lambda}{\mu_j}=q<1$ виконується. Використовуючи рис. 1 та правило (3), записуємо систему рівнянь рівноваги для ергодичного розподілу

$$\begin{gathered} j\nu\pi_{0j} = \lambda \sum_{i=1}^{j} \pi_{ij-1}, \quad j \geq 1, \\ \pi_{ij}(\lambda + \mu_i) = \lambda\pi_{ij-1}, \quad j \geq i \geq 1, \\ \pi_{jj-1}(\lambda + \mu_j) = \lambda\pi_{0j-1} + j\nu\pi_{0j}, \quad j \geq 1, \\ \pi_{00}\lambda = \mu_1\pi_{10}. \end{gathered} \tag{5}$$

Наведемо пояснення до цієї системи рівнянь. При фіксованому $j \geq 1$ відрізок, який з'єднує точки $(0, j), (j+1, j)$ (див. рис. 1), ділить простір станів E процесу $(\eta(t), \xi(t))$ на дві частини: $E_1 = \{(k, l) : 0 \leq k \leq j, \max(0, k-1) \leq l \leq j-1\}$ і $E_2 = \{(k, l) : 0 \leq k, \max(j, k-1) \leq l\}$. Потік імовірностей із множини E_2 у множину E_1 дорівнює $j\nu\pi_{0j}$, а з множини E_1 у множину $E_2 - \lambda \sum_{i=1}^{j} \pi_{ij-1}$. Прирівнюючи ці потоки, отримуємо перше рівняння із (5). Решту рівнянь одержуємо, прирівнюючи потоки ймовірностей у стани $(i, j), j \geq i \geq 1$, $(j, j-1)$, $j \geq 1$, і $(0, 0)$ та з них.

Із другого та третього рівнянь системи (5), враховуючи позначення (4), маємо

$$\pi_{ij} = \beta_i\pi_{ij-1} = \beta_i^{j-i+1}\pi_{ii-1} = \beta_i^{j-i+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu_i}\pi_{0i-1} + \frac{i\nu}{\lambda+\mu_i}\pi_{0i}\right) =$$

$$= \beta_i^{j-i+2}\left(\pi_{0i-1} + \frac{i\nu}{\lambda}\pi_{0i}\right), \qquad j \geq i \geq 1.$$

Якщо ж взяти до уваги третє рівняння в (5), то можемо записати

$$\pi_{ij} = \beta_i^{j-i+2}\left(\pi_{0i-1} + \frac{i\nu}{\lambda}\pi_{0i}\right), \quad j \geq i-1, \quad i \geq 1. \tag{6}$$

Використовуючи тепер вираз для π_{ij} у першому рівнянні системи (5), маємо

$$j\nu\pi_{0j} = \lambda\sum_{i=1}^{j}\pi_{ij-1} = \sum_{i=1}^{j}\beta_i^{j-i+1}\left(\lambda\pi_{0i-1} + i\nu\pi_{0i}\right), \quad j \geq 1,$$

а якщо позначити

$$\rho_i = \frac{(i-1)!\mu_i}{(\lambda+\mu_i)}\left(\lambda\pi_{0i-1} + i\nu\pi_{0i}\right), \quad i \geq 1, \tag{7}$$

то останню рівність можна записати так:

$$j\nu\pi_{0j} = \sum_{i=1}^{j}\frac{(\lambda+\mu_i)\beta_i^{j-i+1}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i. \tag{8}$$

Записуючи (7) у вигляді

$$\lambda\pi_{0i-1} + i\nu\pi_{0i} = \frac{\lambda+\mu_i}{(i-1)!\mu_i}\rho_i \qquad i \geq 1, \tag{9}$$

отримуємо систему рівнянь для π_{0i} відносно ρ_i. Нехай $i \leq m < \infty$, де m є фіксованим. Якщо позначити

$$A_m = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 2\nu & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & m\nu \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}(m) = \begin{pmatrix} \dfrac{(\lambda+\mu_1)\rho_1}{\mu_1} \\ \dfrac{(\lambda+\mu_2)\rho_2}{\mu_2} \\ \dfrac{(\lambda+\mu_3)\rho_3}{2\mu_3} \\ \dots \\ \dfrac{(\lambda+\mu_m)\rho_m}{(m-1)!\mu_m} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\pi}(m) = \begin{pmatrix} \pi_{01} \\ \pi_{02} \\ \pi_{03} \\ \dots \\ \pi_{0m} \end{pmatrix},$$

то систему рівнянь (9) з $1 \leq i \leq m$ можна записати в матричній формі

$$A_m \vec{\pi}(m) = \vec{\rho}(m) - \lambda \pi_{00} \vec{e}(1). \tag{10}$$

Легко показати, що

$$A_m^{-1} = (\alpha_{kj}), \quad \alpha_{kj} = \frac{\kappa^{k-j}}{\nu \prod_{l=0}^{k-j} (j+l)} I\{j \leq k\},$$

а тому з (10) одержуємо

$$\pi_{0j} = \frac{1}{j!\nu} \sum_{i=1}^{j} \frac{\kappa^{j-i}(\lambda+\mu_i)}{\mu_i} \rho_i + \pi_{00} \frac{\kappa^j}{j!}.$$

Враховуючи (8), маємо

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\lambda+\mu_i}{\mu_i} \left[\beta_i^{j-i+1} \prod_{k=0}^{j-i-1} (i+k) - \kappa^{j-i} \right] \rho_i + \pi_{00} \lambda \kappa^{j-1}. \tag{11}$$

Позначимо

$$a(i,l) = \frac{\lambda+\mu_i}{\mu_i} \left[\beta_i^{l+1} \prod_{k=0}^{l-1} (i+k) - \kappa^l \right], \quad C_j = \pi_{00} \lambda \kappa^{j-1}.$$

Тепер (11) можемо записати у вигляді

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{j-1} a(i, j-i)\rho_i + C_j, \qquad j \geq 1. \tag{12}$$

Для послідовності $a(i,k),\ i,k \geq 1$, означимо „згортку” таким чином:

$$a^{*n}(i,l) = \sum_{k=1}^{l-n+1} a(i,k)a^{*(n-1)}(i+k, l-k), \qquad a^{*1}(i,l) = a(i,l), \quad 1 \leq n \leq l,$$

і нехай

$$H(i,l) = \sum_{k=1}^{l} a^{*k}(i,l), \quad l \geq 0, \quad H(i,0) = 1.$$

Наведемо допоміжне твердження, необхідне для подальшого викладу, коротке доведення якого див. у додатку.

Лема 1. *Розв’язок рівняння* (12) *можна записати у вигляді*

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{j} C_i H(i, j-i), \quad j \geq 1.$$

З леми 1 та означення C_j маємо

$$\rho_j = \lambda\pi_{00} \sum_{k=1}^{j} \kappa^{k-1} H(k, j-k) = \pi_{00} A_j. \tag{13}$$

Із співвідношень (6)–(8) випливає, що справджуються рівності

$$\pi_{ij} = \frac{\beta_i^{j-i+1}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i, \quad j \geq i-1, \quad i \geq 1, \quad \pi_{0j} = \frac{\lambda}{j\nu} \sum_{k=1}^{j} \frac{\beta_k^{j-k}}{(k-1)!\mu_k}\rho_k, \quad j \geq 1. \tag{14}$$

Використовуючи ці рівності, після нескладних перетворень маємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} \frac{\beta_i^{j-i+1}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i + \frac{\lambda}{\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{\beta_i^{j-i}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda + \mu_i}{(i-1)!\mu_i^2}\rho_i - \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{(i-1)!\mu_i\beta_i^i} \left[\ln(1-\beta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\beta_i^k}{k} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} b(i)\rho_i,$$

де

$$b(i) = \frac{1}{(i-1)!\mu_i} \left[\frac{\lambda + \mu_i}{\mu_i} + \frac{\kappa}{\beta_i^i} \left(\ln(1-\beta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\beta_i^k}{k} \right) \right].$$

Із формули (13) та умови нормування отримуємо

$$1 = \pi_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} = \pi_{00} + \pi_{00} \sum_{i=1}^{\infty} b(i) A_i,$$

а отже,

$$\pi_{00} = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b(i) A_i \right)^{-1}. \tag{15}$$

Формули (13)–(15) завершують доведення теореми.

5. Система з обмеженою орбітою. Якщо кількість місць для чекання на орбіті обмежено, наприклад, числом $m < \infty$, то умови існування ергодичного розподілу виконуються автоматично. Граф інтенсивностей переходів для станів $\{(i,j)\colon 0 \leq i \leq m,\ \max\{0, i-1\} \leq j \leq \leq m-1\} \cup \{(0,m)\}$ буде таким же, як і у випадку необмеженої орбіти, а тому маємо таку систему рівнянь для ергодичного розподілу цих станів:

$$
\begin{aligned}
& j\nu\pi_{0j} = \lambda \sum_{i=1}^{j} \pi_{ij-1}, \quad 1 \leq j \leq m, \\
& \pi_{ij}(\lambda + \mu_i) = \lambda \pi_{ij-1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq m-1, \\
& \pi_{jj-1}(\lambda + \mu_j) = \lambda \pi_{0j-1} + j\nu\pi_{0j}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\
& \pi_{00}\lambda = \mu_1 \pi_{10}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Для станів $\{(i,m)\colon 0 \leq i \leq m+1\}$ граф інтенсивностей переходів зображено на рис. 2.

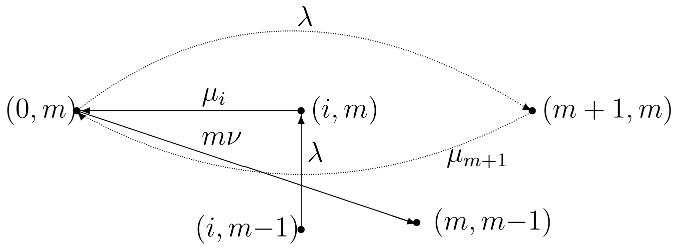

Рис. 2

Відмінність від рис. 1 полягає лише в тому, що тепер перехід зі стану (i,m) можливий лише у стан $(0,m)$ (коли закінчиться обслуговування) і інтенсивність цього переходу є μ_i.

Звідси, як доповнення до системи рівнянь (16), маємо

$$
\begin{aligned}
& \pi_{im}\mu_i = \pi_{im-1}\lambda, \qquad 1 \leq i \leq m, \\
& \pi_{m+1m}\mu_{m+1} = \pi_{0m}\lambda.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Точно так само, як і в попередньому пункті, приходимо до формул

$$\pi_{ij} = \frac{\beta_i^{j-i+1}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i, \quad i-1 \leq j \leq m-1, \quad i \geq 1, \tag{18}$$

$$\pi_{0j} = \frac{\lambda}{j\nu} \sum_{i=1}^{j} \frac{\beta_i^{j-i}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{19}$$

Тепер із системи (17) та співвідношень (18), (19) отримуємо

$$\pi_{im} = \frac{\lambda\beta_i^{m-i}}{(i-1)!\mu_i^2}\rho_i, \quad 1 \leq i \leq m, \qquad \pi_{m+1m} = \frac{\lambda^2}{m\nu\mu_{m+1}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i^{m-i}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i. \tag{20}$$

З формул (18) – (20) після нескладних перетворень знаходимо

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=i-1}^{m}\pi_{ij}+\sum_{j=1}^{m}\pi_{0j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i-1}^{m-1}\pi_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\pi_{im}+\pi_{m+1m}+\sum_{j=1}^{m}\pi_{0j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{(i-1)!\mu_i}\sum_{j=i-1}^{m-1}\beta_i^{j-i+1}+\lambda\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i^{m-i}}{(i-1)!\mu_i^2}\rho_i+\frac{\lambda^2}{m\nu\mu_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i^{m-i}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i+$$

$$+\frac{\lambda}{\nu}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{\beta_i^{j-i}}{(i-1)!\mu_i}\rho_i=\sum_{i=1}^{m}d(i,m)\rho_i,$$

де

$$d(i,m)=\frac{1}{(i-1)!\mu_i}\left[\frac{\lambda+\mu_i}{\mu_i}+\frac{\lambda^2\beta_i^{m-i}}{m\nu\mu_{m+1}}-\kappa\sum_{j=0}^{m-i}\frac{\beta_i^j}{j+i}\right].$$

Використовуючи формулу (13) та умову нормування, маємо

$$1=\pi_{00}+\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=i-1}^{m}\pi_{ij}+\sum_{j=1}^{m}\pi_{0j}=\pi_{00}+\pi_{00}\sum_{i=1}^{m}d(i,m)A_i,$$

а отже,

$$\pi_{00}=\left(1+\sum_{i=1}^{m}d(i,m)A_i\right)^{-1}.$$

Звідси та з формул (18) – (20) випливає такий результат.

Теорема 4. *Якщо $m<\infty$ — кількість місць для очікування на орбіті, то ергодичний розподіл для процесу $(\eta(t),\xi(t))$ можна записати у вигляді*

$$\pi_{00}=\left(1+\sum_{i=1}^{m}d(i,m)A_i\right)^{-1},\qquad \pi_{m+1m}=\pi_{00}\frac{\lambda^2}{m\mu_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i^{m-i}A_i}{\nu(i-1)!\mu_i},$$

$$\pi_{0j}=\pi_{00}\frac{\lambda}{j\nu}\sum_{i=1}^{j}\frac{\beta_i^{j-i}A_i}{(i-1)!\mu_i},\quad 1\le j\le m,\quad \pi_{im}=\pi_{00}\frac{\lambda\beta_i^{m-i}A_i}{(i-1)!\mu_i^2},\quad 1\le i\le m,$$

$$\pi_{ij}=\pi_{00}\frac{\beta_i^{j-i+1}A_i}{(i-1)!\mu_i},\qquad i-1\le j\le m-1,\quad i\ge 1,$$

де

$$d(i,m)=\frac{1}{(i-1)!\mu_i}\left[\frac{\lambda+\mu_i}{\mu_i}+\frac{\lambda^2\beta_i^{m-i}}{m\nu\mu_{m+1}}-\kappa\sum_{j=0}^{m-i}\frac{\beta_i^j}{j+i}\right].$$

На перший погляд співвідношення (16), (17) разом з умовою нормування складають систему лінійних рівнянь для змінних π_{ij}, яку можна розв'язати відомими числовими методами. Але очевидна перевага формул з теореми 4 полягає в тому, що функції $H(i,j)$ не залежать від числа місць на орбіті, а тому, якщо ергодичний розподіл для конкретного m підраховано, при необхідності отримати цей розподіл для $m+1$ нам не потрібно рахувати заново ці функції. Досить буде обчислити лише $H(m+1,k),\ k=1,2,\ldots,m.$ Також при підрахунку значення $d(i,m)$ основна обчислювальна робота (для великих m) полягає у знаходженні сум $\sum_{j=0}^{m-i}$. Але якщо скористатися рекурентною формулою

$$d(i,m+1)=\begin{cases} d(i,m)+\dfrac{\lambda\beta_i^{m-i}}{\nu(i+1)!\mu_i}\left[\dfrac{\beta_i}{m+1}\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu_{m+2}}\right)-\dfrac{\lambda}{m\mu_{m+1}}\right], & 1\le i\le m,\\[2ex] \dfrac{1}{m!\mu_{m+1}}\left[\dfrac{\lambda+\mu_{m+1}}{\mu_{m+1}}+\dfrac{\lambda}{\nu(m+1)}\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu_{m+2}}\right)\right], & i=m+1,\end{cases}$$

то можна значно скоротити об'єм обчислень.

Додаток. ***Доведення леми*** **1.** Нехай $j\ge 1$ буде фіксованим. Покажемо, що для всіх $1\le$ $\le k\le j$ справджується рівність

$$\rho_j=\sum_{i=1}^{j-k}\rho_i a^{*k}(i,j-i)+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-k+l}a^{*(k-l)}(i,j-i)C_i+C_j. \tag{21}$$

Для $k=1$ рівність (21) збігається з рівнянням (12), а отже, є справедливою.

Припустимо, що вона справедлива для $k=m<j$, і покажемо, що вона справедлива і для $k=m+1$. Використовуючи (12), маємо

$$\rho_j=\sum_{i=1}^{j-m}a^{*m}(i,j-i)\left[\sum_{l=1}^{i-1}a(l,i-l)\rho_l+C_i\right]+\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{j-m+l}a^{*(m-l)}(i,j-i)C_i+C_j=$$

$$=\sum_{l=1}^{j-m-1}\rho_l\sum_{i=1}^{j-l-m}a(l,i)a^{*m}(l+i,j-l-i)+\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{j-m+l-1}a^{*(m+1-l)}(i,j-i)C_i+C_j=$$

$$=\sum_{l=1}^{j-m-1}\rho_l a^{*(m+1)}(l,j-l)+\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{j-m-1+l}a^{*(m+1-l)}(i,j-i)C_i+C_j.$$

Записуючи тепер (21) для $k=j-1$ і враховуючи, що $\rho_1=C_1$ (це виникає з рівняння (12)), маємо

$$\rho_j=\rho_1 a^{*(j-1)}(1,j-1)+\sum_{l=1}^{j-2}\sum_{i=1}^{l+1}a^{*(j-1-l)}(i,j-i)C_i+C_j=$$

$$=C_1 a^{*(j-1)}(1,j-1)+\sum_{l=2}^{j-1}\sum_{i=1}^{l}a^{*(j-l)}(i,j-i)C_i+C_j=$$

$$=\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{l}a^{*(j-l)}(i,j-i)C_i+C_j=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{l=1}^{j-i}a^{*l}(i,j-i)C_i+C_j=$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} H(i, j-i)C_i + C_j = \sum_{i=1}^{j} H(i, j-i)C_i,$$

що і завершує доведення леми 1.

Література

1. J. R. Artalejo, A. Gomes-Corral, *Retrial queueing systems*, Comput. Approach, Springer Verlag (2008).
2. G. I. Falin, J. G. C. Templeton, *Retrial queues*, Chapman & Hall, London (1997).
3. V. V. Anisimov, J. R. Artalejo, *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals*, Queueing Syst., **39**, 157 – 182 (2001).
4. E. A. Lebedev, I. A. Makushenko, H. V. Livinska, I. Ya. Usar, *On steady-state analysis of $[M|M|m|m+n]$-type retrial queueing systems*, Inform. Technol. and Math. Modelling, Queueing Theory and Appl., Commun. Comput. and Inform. Sci., **800**, 133 – 146 (2017).
5. D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson, C. M. Harris, *Fundamental of queueing theory*, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey (2008).
6. A. Economu, S. Kanta, *Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs*, Oper. Res. Lett., **36**, 696 – 699 (2008).
7. В. И. Клименок, *Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами*, Автоматика и вычислит. техника, № 1, 25 – 30 (1990).
8. Z. Xuelu, W. Jinting, M. Qing, *Optimal design for a retrial queueing system with state-dependent service rate*, J. Systems Sci. and Complexity, **30**, 883 – 900 (2017).
9. J. Warland, *An introduction to queueing networks*, Prentice Hall (1988).

Одержано 16.04.19