УДК 517.5,517.58

В. А. Гроза, канд. фіз.-мат. наук (Київ. геофіз. від-ня УкрНДГРІ)

Квантові алгебри, q-многочлени Кравчука та q-функції Кравчука — Мейкснера

Методами теорії зображень квантових алгебр $U_q(su_2)$ і $U_q(su_{1,1})$ доводяться теореми додавання та множення для q-многочленів Кравчука, вводяться q-функції Кравчука—Мейкснера і доводиться їх ортогональність на множині цілих чисел.

Методами теории представлений квантовых алгебр $U_q(su_2)$ и $U_q(su_{1,1})$ доказываются теоремы сложения и умножения для q-многочленов Кравчука, вводятся q-функции Кравчука—Мейкснера и доказывается их ортогональность на множестве целых чисел.

На сучасному етапі все більшого значення набувають q-спеціальні функції та q-ортогональні многочлени. Вони застосовуються в алгебраїчній комбінаториці, теорії зображень груп Шевальє, теорії різницевих рівнянь, квантовій механіці та ін. В граничному випадку при $q \to 1$ q-функції та q-многочлени приводять до відповідних спеціальних функцій та многочленів. В той час, коли методи вивчення класичних спеціальних функцій добре розроблені, теорія q-спеціальних функцій знаходиться на стадії свого розвитку. В останні роки намітився зв'язок q-гіпергеометричних функцій та q-ортогональних многочленів із зображеннями квантових алгебр і квантових груп (див., наприклад, [1, 2]). Це дало можливість застосовувати потужний теоретико-груповий апарат в q-численні.

В даній роботі теорія зображень квантових алгебр застосовується для доведення теорем додавання та множення для q-многочленів Кравчука, а також для виведення співвідношення ортогональності для q-функцій Кравчука — Мейкснера.

q-Гіпергеометрична (або базисна гіпергеометрична) функція визначається формулою

$$
{}_{n+1}\varphi_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; b_1, \ldots, b_n; q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \ldots (a_{n+1}; q)_k}{(b_1; q)_k \ldots (b_n; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k},
$$

де $(a; q)_k = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{k-1})$, $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $(a; q)_0 = 1$ (тут і далі $\mathbb{Z}_+$ означає множину додатніх цілих чисел). Ми також будемо використовувати позначення

$$
{}_{n+1}\Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}; \beta_1, \ldots, \beta_n; q, z) = {}_{n+1}\varphi_n(q^{\alpha_1}, \ldots q^{\alpha_{n+1}}; q^{\beta_1}, \ldots, q^{\beta_n}; q, z).
$$

Існує декілька видів q-многочленів Кравчука. Вони описані в роботі [3]. Ми розглядаємо q-многочлени Кравчука

$$
K_n(q^{-x}; b, N \mid q) = {}_2\Phi_1(-n, -x; -N; q, bq^{n+1}), \tag{1}
$$
$$
n = 0, 1, \ldots, N, \quad N \in \mathbb{Z}_+,
$$

які утворюють ортогональну систему на множині $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Базисна гіпергеометрична функція ${}_2\Phi_1$ і q-многочлени Кравчука зв'язані із скінченновимірними зображеннями T^l квантової алгебри $U_q(su_2)$.

А саме, матричні елементи цих зображень мають вигляд [2]

$$t^l_{mn} = \frac{q^{(m+n)(m+n-2l)/4}\,[2l]!}{([l-m]!\,[l-n]!\,[l+m]!\,[l+n]!)^{1/2}}\,\pi_{12}^{l-n}\pi_{21}^{l-m}\times$$
$$\times K_{l-m}(q^{-l+m};\ q^{m-l-1/2}/(\pi_{12}\pi_{21}), 2l\,|\,q)\,\pi_{11}^{m+n}, \qquad (2)$$

якщо $m-n\geqslant 0$, $m+n\geqslant 0$. Тут $[k]=(q^{k/2}-q^{-k/2})/(q^{1/2}-q^{-1/2})$, $[k]!=[1][2]\ldots[k]$, $k\in\mathbb{Z}_+$, π_{ij}, $i,j=1,2$, — матричні елементи двовимірного незвідного зображення алгебри $U_q(su_2)$. Запишемо в матричному вигляді розклад тензорного добутку $T^{l_1}\otimes T^{l_2}$ зображень квантової алгебри $U_q(su_2)$ на незвідні:

$$t^{l_1}_{j_1j_2}t^{l_2}_{k_1k_2} = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l\\ j_1 & k_1 & m_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l\\ j_2 & k_2 & m_2\end{bmatrix}_q t^l_{m_1m_2}. \qquad (3)$$

Тут $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l\\ j & k & m\end{bmatrix}_q$ — коефіцієнт Клебша — Гордана квантової алгебри $U_q(su_2)$. В роботі [4] виведені різноманітні вирази для коефіцієнтів Клебша—Гордана через базисну гіпергеометричну функцію ${}_3\Phi_2$. Підставляючи в (3) вираз (2) для матричних елементів та відповідний вираз для коефіцієнтів Клебша — Гордана з [4], після ряду перетворень одержимо формулу множення для q-многочленів Кравчука:

$$K_m(q^{-x}; b, M\,|\,q)\,K_n(q^{-y}; tb, N\,|\,q) = \frac{(b;q)_{m+1}}{(b;q)_{M-x+1}}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{(M+N)/2-M_1}\frac{(q^{m-M};q)_k\,(q^{x-M};q)_k\,(q^{-N};q)_k}{(q;q)_k\,(q^{-M};q)_k\,(q^{k-M-N-1};q)_k}\times$$
$$\times{}_3\Phi_2\left(\begin{matrix}-k, & -n, & 1-k+M\\ -N, & 1-k+M-m\end{matrix}\,\middle|\,q,q\right){}_3\Phi_2\left(\begin{matrix}-k, & -y, & 1-k+M\\ & -N, & 1-k+M-x\end{matrix}\,\middle|\,q,q\right)\times$$
$$\times q^{k(k-x)}b^k K_{M+n-m-k}(q^{x-y-M+k}; q^{m-n-x+k}b, M+N-2k\,|\,q), \qquad (4)$$

де $M, N, m, n, x, y\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}$, $m\leqslant M$, $n\leqslant N$, $x\leqslant M$, $y\leqslant N$ та $t=q^{m-n}$, $M_1=\max\left(\left|\frac{N-M}{2}\right|, \left|m-n-\frac{M-N}{2}\right|, \left|x-y-\frac{M-N}{2}\right|\right)$.

Функції ${}_3\Phi_2$ із (4) зв'язані з q-многочленами Хана

$$Q_n(q^{-x}; a, b, N\,|\,q) = {}_3\varphi_2(q^{-n}, abq^{n+1}, q^{-x}; aq, q^{-N}; q, q), \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Враховуючи співвідношення ортогональності для останніх [5], з (4) після деяких перетворень виводимо теорему додавання для q-многочленів Кравчука:

$$\sum_{x=0}^{M}\sum_{m=0}^{M}\frac{(b;q)_{M-x+1}\,(q^{\sigma-M};q)_{M-m}\,(q^{-\sigma-M};q)_m\,(q^{\tau-M};q)_{M-x}\,(q^{-\tau-M};q)_x}{(b;q)_{m+1}\,(q;q)_{M-m}\,(q;q)_m\,(q;q)_{M-x}\,(q;q)_x}\times$$
$$\times q^{-r_1-m(M-\sigma)-x(M-\tau)}b_1^{-r_1}K_m(q^{-x}; b, M\,|\,q)\,K_n(q^{-y}; tb, N\,|\,q)\times$$
$$\times Q_{r_1}(q^{m-M}; q^{-M+\sigma-1}, q^{-N-\sigma-1}, M\,|\,q)\,Q_{r_2}(q^{x-M}; q^{-M+\tau-1}, q^{-N-\tau-1}, M\,|\,q) =$$
$$=\delta_{r_1r_2}AK_{M-\sigma-r_1}(q^{\tau-M+r_1}; q^{\sigma-M+r_1}b_1, M+N-2r_1\,|\,q),$$

де $b=b_1q^{x-M}$, $\sigma=m-n\equiv\text{const}$, $\tau=x-y\equiv\text{const}$,

$$A=\frac{(q^{-M-N};q)^2_M\,(q;q)_{r_1}\,(q^{-N-\sigma};q)_{r_1}\,(q^{-N-\tau};q)_{r_1}\,(q^{-N};q)_{r_1}\,q^{r_1(\sigma+\tau-3M)}}{(q^{-M-N};q)^2_{r_1-1}\,(q;q)^2_M\,(q^{r_1-M-N-1};q)_{r_1}\,(q^{-M};q)_{r_1}\,(1-q^{2r_1-M-N-1})^2}.$$

Тут r_1 і r_2 — цілі невід'ємні числа такі, що

$$M+N-2r_i \geqslant \max(|M-N|,\ |2\sigma-M+N|, |2\tau-M+N|), \quad i=1,2.$$

Застосування теоретико-групового підходу до q-числення дає можливість не лише вивчати властивості вже відомих класів, але й вводити нові класи q-многочленів та q-спеціальних функцій.

Матричні елементи зображень $T^{\varepsilon,\sigma}$ основної унітарної серії квантової алгебри $U_q(su_{1,1})$ виражаються через функцію ${}_2\Phi_1$ [6, 7]:

$$t^{\sigma}_{mn} = q^{(n^2-m^2)/4+(n-m)(\sigma-m)/2}\,(q^{\sigma-m+1}; q)_{m-n}\,(q;q)^{-1}_{m-n}\times$$

$$\times\,{}_2\Phi_1(\sigma+m+1, -\sigma+m; m-n+1; q, -\sqrt{q}\,\pi_{12}\pi_{21})\,\pi_{21}^{m-n}\pi_{22}^{m+n}, \qquad (5)$$

де $\sigma\in\mathbb{C}$, $-m\leqslant n\leqslant m$.

Для $n\in\mathbb{Z}$ введемо q-функції дискретної змінної

$$\mathscr{K}_n(x; p, \tau\,|\,q) = {}_2\Phi_1(\tau+x+1, x-\tau; x-n+1; q, pq^{-n+1}) \qquad (6)$$

при $x\geqslant n$ і

$$\mathscr{K}_n(x; p, \tau\,|\,q) = \mathscr{K}_x(n; p, \tau\,|\,q)$$

при $n\geqslant x$ і назвемо їх q-функціями Кравчука — Мейкснера. При $\tau\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$, $n\leqslant-\tau$, $x\leqslant-\tau$, $n+\tau\in\mathbb{Z}$, $x+\tau\in\mathbb{Z}$ функція $\mathscr{K}_n(x; p, \tau\,|\,q)$ зображується через q-многочлени Кравчука, а при $\tau\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, $n\geqslant\tau$, $x\geqslant\tau$, $n+\tau\in\mathbb{Z}$, $x+\tau\in\mathbb{Z}$ — через q-многочлени Мейкснера

$$M_n(q^{-x}; b, \gamma\,|\,q) = {}_2\Phi_1(-n, -x; \gamma; q, bq^{n+1}), \quad \gamma\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Порівнюючи (5) і (6), легко впевнитись, що матричні елементи зображень основної унітарної серії квантової алгебри $U_q(su_{1,1})$ можуть бути записані в термінах q-функцій Кравчука—Мейкснера. Враховуючи це, з умови унітарності для матричних елементів $t^{i\rho-1/2}_{mn}$, яка має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{i\rho-1/2}_{km}\,(t^{i\rho-1/2}_{kn})^* = \delta_{mn},$$

виводимо співвідношення ортогональності для q-функцій Кравчука—Мейкснера

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} M_\rho(x; q)\,\frac{(p;q)_x}{p^x}\,\mathscr{K}_m\left(x; p, i\rho-\frac{1}{2}\,\middle|\,q\right)\overline{\mathscr{K}_n\left(x; p, i\rho-\frac{1}{2}\,\middle|\,q\right)} =$$

$$= q^{m(m+1)/2}\,\frac{p^m}{(p; q^{-1})_m}\,\delta_{mn},$$

де

$$M_\rho(x;q) = q^K\,(q^{i\rho+m+1/2}; q)_{x-m}\,(q^{-i\rho+m+1/2}; q)_{x-n}\,(q;q)^{-1}_{x-m}\,(q;q)^{-1}_{x-n},$$

$$K = -\frac{1}{4}(2x^2-m^2-n^2) + \frac{1}{2}\left(i\rho-\frac{1}{2}-x\right)(m+n-2x) +$$

$$+\frac{1}{2}x(n+m+1) + nx.$$

Таким чином, функції K_n утворюють систему ортогональних на множині $\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ функцій дискретної змінної.

1. *Noumi M., Mimachi K.* Askey-Wilson Polynomials and the Quantum Group $SU_q(2)$ // Proc. Jap. Acad. A.— 1990.— 66.— P. 146—149.
2. *Koornwinder T. H.* Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q-hy-

pergeometric orthogonal polynomials // Proc. Nederl. Acad. Wetenson. A.— 1989.— 92.— P. 97—117.
3. *Hahn W*. Uber Orthogonal Polynome, die q-Differenzengleichungen genügen // Math. Nachr.— 1949.— 2.— S. 4—34.
4. *Groza V. A., Kachurik I. I., Klimyk A. U*. On Clebsch-Gordan coefficients and matrix elements of representations of the quantum algebra $U_q\,(su_2)$ // J. Math. Phys.— 1990.— **31**, N 12.— P. 2769—2780.
5. *Andrews G. E., Askey R*. Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes Math.— 1985.— **1171**.— P. 36—62.
6. *Гроза В. А*. Представления квантовой алгебры $U_q(su_{1,1})$ и базисные гипергеометрические функции.— Киев, 1990.— 20 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики, ИТФ-90-56Р).
7. *Unitary* representations of the quantum group $SU_q(1,1)$: II-Matrix elements of unitary representations and the basic hypergeometric functions / T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami etc.// Lett. Math. Phys.— 1990.— **19**, P. 195—204.

Одержано 29.01.92