УДК 515.12

М. М. Зарічний, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

Характеризація некомпактних АЕ(n)-просторів

Одержана характеризація сепарабельних метризовних AE (n)-просторів як n-оборотних образів абсолютних ретрактів.

Получена характеризация сепарабельных метризуемых AE (n)-пространств как n-обратимых образов абсолютных ретрактов.

Класичне поняття абсолютного екстензора для n-вимірних просторів (АЕ (n)-простору) істотно використовується при описанні топології фрактальних (локально самоподібних) множин [1]. Справді, для таких множин з глобальної (n — 1)-зв'язності, як правило, випливає локальна (n — 1)-зв'язність, а остання, за класичною теоремою Куратовського-Дугунджі [2], рівносильна властивості бути абсолютним околовим екстензором для n-вимірних просторів (ANE (n)-простором).

Метою даної статті є узагальнення одного результату О. Ч. Чигогідзе [3] про зображення повних сепарабельних метричних АЕ (n)-просторів як n-оборотних образів сепарабельного гільбертового простору l^2.

Наведемо деякі необхідні означення. Надалі всі простори вважаються сепарабельними метризовними, а всі відображення — неперервними, n означає невід'ємне ціле число. Відображення $f : X \to Y$ називається n-оборотним [4], якщо для кожного відображення $g : Z \to Y$, де $\dim Z \leqslant n$, існує відображення $h : Z \to X$, для якого $g = f \circ h$. Через $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\mathfrak{A}_\alpha$) позначаються абсолютні мультиплікативні (адитивні) класи борелівських множин.

Наступна теорема про вкладення є узагальненням теорем Боте [5] та Чигогідзе [3].

Теорема 1. *Нехай* $\dim X = n$. *Тоді існує* AR ($\mathfrak{M}$)-*простір* $\hat{X}$ *такий, що* $\hat{X} \supset X$ *і* $\dim \hat{X} = n + 1$.

Для борелівських множин теорему 1 можна уточнити.

Теорема 1'. *Для кожного ординала* $\alpha < \omega_1$ *існує* (n + 1)-*вимірний* AR ($\mathfrak{M}$)-*простір* $Z \in \mathfrak{M}_\alpha$ (*відповідно* $Z \in \mathfrak{A}_\alpha$), *що топологічно містить замкнену копію кожного n-вимірного простору класу* $\mathfrak{M}_\alpha$ (*відповідно* $\mathfrak{A}_\alpha$).

Наведемо доведення лише теореми 1'. Для визначеності розглядаємо мультиплікативний клас $\mathfrak{M}_\alpha$.

Лема 1. *Існує n-вимірний простір* $A_{n,\alpha}$, *що містить замкнену копію будь-якого n-вимірного простору* $X \in \mathfrak{M}_\alpha$.

Доведення. Нехай $f_n: \mu_n \to Q$ — n-оборотне відображення універсального n-вимірного менгерівського компакта μ_n на гільбертів куб Q, побудоване О. М. Дранішниковим [4]. Простір Q містить копію універсального простору Ω_α для класу $\mathfrak{M}_\alpha$ (див. [6]).

Приймемо $A_{n,\alpha} = f_n^{-1}(\Omega_\alpha)$, тоді $A_{n,\alpha} \in \mathfrak{M}_\alpha$. Для кожного $X \in \mathfrak{M}_\alpha$ існує замкнене вкладення $g: X \to \Omega_\alpha$ і з n-оборотності відображення f_n випливає, що існує відображення $h: X \to A_{n,\alpha}$, для якого $f_n \circ h = g$. Тоді, очевидно, h — замкнене вкладення. Лема доведена.

Перейдемо до доведення теореми 1′. Ми модифікуємо конструкцію з [3]. Нехай $S = \{X_i, p_{ij}\}$ — обернений спектр з границею μ_n, у якому X_i — компактні поліедри, $X_0 = \{*\}$, $\dim X_i \leqslant n$, $p_{i+1,i}$ — сюр'єктивні симпліціальні відображення. Утворимо спектр S' такою індуктивною конструкцією.

Приймемо $Y_0 = X_0$ і припустимо, що для всіх $i < k$, де $k \geqslant 1$, вже побудовані відображення $g_{i,i-1}: Y_i \to Y_{i-1}$ і вкладення $X_i \to Y_i$ такі, що $g_{i,i-1} | X_i = p_{i,i-1}: X_i \to X_{i-1} \hookrightarrow Y_{i-1}$. Нехай Y_k — циліндр композиції відображень

$$X_k \xrightarrow{p_{k,k-1}} X_{k-1} \hookrightarrow Y_{k-1}$$

і $q_{k,k-1}: Y_k \to Y_{k-1}$ — природна проекція циліндра на основу. Нехай $S' = \{Y_i, q_{i,i-1}\}$ і $Y = \varprojlim S'$. Тоді простір $\mu_n = \varprojlim S$ природно вкладений в Y. Будемо розглядати $A_{n,\alpha}$ як підпростір в $\mu_n \subset Y$ і нехай $Z = (Y \setminus \mu_n) \cup \cup A_{n,\alpha}$.

Очевидно, що $Z \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\dim Z = n + 1$ і $A_{n,\alpha}$ — замкнена підмножина в Z. З очевидної стягуваності та локальної стягуваності простору Z випливає $Z \in \mathrm{AR}(\mathfrak{M})$ (див. [2]). Твердження теореми тепер випливає з леми 1.

Теорема 2. *Для простору X наступні умови еквівалентні*:

1) $X \in AE(n+1)$ $(X \in \mathrm{ANE}(n+1))$;

2) X *є n-оборотним образом* $\mathrm{AR}(\mathfrak{M})$*-простору* ($\mathrm{ANR}(\mathfrak{M})$*-простору*).

Теорема 2′. *Для простору $X \in \mathfrak{M}_\alpha$ (відповідно $X \in \mathfrak{A}_\alpha$) наступні умови еквівалентні*:

1) $X \in \mathrm{AE}(n+1)$;

2) X *є n-оборотним образом універсального простору Ω_α (відповідно Λ_α).*

Нагадаємо, що нескінченновимірні многовиди, модельовані на універсальних просторах Ω_α і Λ_α, розглядалися в [6].

Теорема 2″. *Для простору $X \in \mathfrak{M}_\alpha$ (відповідно $X \in \mathfrak{A}_\alpha$) наступні умови еквівалентні*:

1) $X \in \mathrm{ANE}(n+1)$;

2) X *є n-оборотним образом Ω_α-многовиду (відповідно Λ_α-многовиду).*

Доведення теорем 2—2″ проводяться за схемою доведення теореми 3.1 з [4]; при цьому використовуються теореми 1 і 1′, а також властивості Ω_α- (Λ_α-)многовидів [6].

Багатьма авторами розглядалась задача збереження класу ANR ($\mathfrak{M}$)-просторів різними функторіальними конструкціями (див. [7]). Необхідні поняття, що стосуються теорії нормальних функторів в категоріях компактних та тихоновських просторів, можна знайти в [7, 8]. Нагадаємо, що кожен нормальний функтор F в категорії компактів має канонічне продовження F_β на категорію тихоновських просторів [8].

Лема 2. *Функтор F_β зберігає клас сепарабельних метризовних просторів.*

Доведення. Якщо $X \subset Q$, то $F_\beta X \subset F_\beta Q = FQ$ і $F_\beta X$ — сепарабельний простір.

Теорема 3. *Нехай F — нормальний функтор зі скінченними носіями. Якщо функтор F_β зберігає клас* $\mathrm{AR}(\mathfrak{M})$-$(\mathrm{ANR}(\mathfrak{M})$-) *просторів, то F_β зберігає клас* $\mathrm{AE}(n)$-$(\mathrm{ANE}(n)$-) *просторів.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми О. М. Дранішникова [9], при цьому використовується теорема 2.

1. *Mandelbrot B.* Fractal geometry of nature.— Freeman, 1982.
2. *Борсук К.* Теория ретрактов.— М. : Мир, 1971.— 292 с.
3. *Чигогидзе А. Ч.* Характеристика польских $AE(n)$-пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1.— 1987.— № 5.— С. 32—35.
4. *Дранишников А. Н.* Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, вып. 5.— С. 55—95.
5. *Bothe H. G.* Eine Einbettung m-dimensionalen Mengen in $(m+1)$-dimensionalen absoluten Retrakt // Fund. Math.— 1963.— **52**, N 3.— P. 209—224.
6. *Bestvina M., Mogilski J.* Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J.— 1986.— **33**, N 1.— P. 291—313.
7. *Федорчук В. В.* О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, вып. 5.— С. 169—209.
8. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов // Вестн. Моск. ун-та. Мех., мат.— 1984.— № 6.— С. 23—26.
9. *Дранишников А. Н.* Ковариантные функторы и экстензоры в размерности n // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, вып. 6.— С. 185—186.

Одержано 23.03.91