УДК 517.9

И. Дж. Марданов, канд. физ.-мат. наук (Азерб. инж.-строит. ин-т, Баку)

Существование семейства решений системы линейных разностных уравнений с отклонениями аргумента

Получены достаточные условия существования семейства решений системы линейных разностных уравнений с отклонениями аргумента.

Одержані достатні умови існування сім'ї розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь з відхиленнями аргументу.

Полученные в настоящей статье результаты для системы разностных уравнений аналогичны некоторым результатам Ю. А. Рябова [1] для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В основе результатов лежит теория интегральных многообразий, разработанная в работах Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [2], Ю. А. Митропольского, О. Б. Лыковой [3].

1. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l X_{n+l}, \det A \neq 0, \tag{1}$$

которую будем называть системой разностных уравнений с отклонениями аргумента, если $A_l \neq 0$ при $l = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$.

При $\mu = 0$ система уравнений (1) упрощается и принимает вид

$$X_{n-1} = AX_n, \quad X_n = A^n X_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Предполагая, что векторы X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеют размерность m, будем искать m-параметрическое семейство решений системы (1) методом последовательных приближений, полагая $X_n = \lim_{j \to \infty} X_n^{(j)}$, где

$$X_n^{(0)} = A^n X_0, X_{n+1}^{(j+1)} = AX_n^{(j+1)} + \mu \sum_{l=N}^{N} A_l X_{n+l}^{(j)}, X_0^{(j+1)} = X_0. \tag{2}$$

Найдем условия сходимости последовательности $X_n^{(j)}$ при $j \to \infty$. Предварительно преобразуем систему уравнений (1). Найдем частное решение системы неоднородных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + F_n, \quad F_n \equiv \sum_{l=-N}^{N} A_l X_{n+l}. \tag{3}$$

В системе уравнений (3) выполним замену переменных $X_n = A^n Z_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; при этом получим систему разностных уравнений

$$Z_{n+1} = Z_n + A^{-n-2} F_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

откуда находим выражения для Z_n через Z_0:

$$Z_n = Z_0 + \sum_{s=0}^{n-1} A^{-s-1} F_s, \quad n > 0,$$
$$Z_n = Z_0 - \sum_{s=-1}^{n} A^{-s-1} F_s, \quad n < 0. \tag{4}$$

Из уравнений (4) следует, что решение системы (3) при заданном X_0 можно представить в виде

$$X_n = A^n + Z_0 \mu \sum_{s=0}^{n-1} A^{n-s-1} \sum_{l=-N}^{N} A_l X_{s+l}, \quad n > 0; \quad X_0 = Z_0,$$
$$X_n = A^n Z_0 - \mu \sum_{s=-1}^{n} A^{n-s-1} \sum_{l=-N}^{N} A_l X_{s+l}, \quad n < 0. \tag{5}$$

Система суммарных уравнений (5) равносильна системе разностных уравнений (1) при условии $X_0 = Z_0$. Систему уравнений (5) можно решать методом последовательных приближений, что равносильно построению последовательностей $X_n^{(j)}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Введем бесконечный вектор $X = \{\ldots X_{-1}, X_0, X_1, \ldots\}$, проекциями которого являются векторы X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и банахово пространство B_ρ с нормой

$$\| X \|_\rho = \sup_n \{\| X_n \| \rho^{|n|}\}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Приведенный здесь способ построения частных решений аналогичен способу, использованному в работе [1] для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Вектор $X \in B_\rho$, если выполняется неравенство

$$\| X_n \| \rho^{|n|} \leqslant M = \text{const}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Введем обозначение $a = \max \{\| A \|, \| A^{-1} \|\}$. Поскольку выполняются неравенства $\| A^n Z_0 \| \leqslant \| A \|^{|n|} \| Z_0 \| = a^{|n|} \| Z_0 \|$, то начальный вектор $X^{(0)} = \{\ldots A^{-1} Z_0, Z_0, A Z_0, \ldots\}$ принадлежит пространству B_α, $\alpha = a^{-1}$. При $\rho a < 1$ вектор $X^{(0)} \in B_\rho$. Запишем систему уравнений (5) в виде операторного уравнения

$$X = X^{(0)} + LX, \quad X \in B_\rho,$$

и исследуем его разрешимость в банаховом пространстве B_ρ, $\rho a < 1$. Из формул (5) находим выражение для оценки нормы оператора L в пространстве B_ρ:

$$\| L \|_\rho \leqslant \max \Big\{ \sup_{n \geqslant 1} | \mu | \sum_{s=1}^{n} \rho^n a^{n-s-1} \sum_{l=-N}^{N} \| A_l \| \rho^{-|l+s-1|},$$
$$\sup_{n \geqslant 1} | \mu | \sum_{s=1}^{n} \rho^n a^{n+1-s} \sum_{l=-N}^{N} \| A_l \| \rho^{-|l-s-1|} \Big\}. \tag{6}$$

Опуская громоздкие вычисления, из формулы (6) находим оценку

$$\| L \|_\rho \leqslant | \mu | (1 - a\rho)^{-1} \sum_{l=-N}^{N} \| A_l \| (a + \rho^{-|l|}),$$

где $\|X_n\|$ — некоторая векторная норма в m-мерном пространстве. Из теоремы Банаха о неподвижной точке следует, что метод последовательных приближений

$$X^{(j+1)} = X^{(0)} + LX^{(j)}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, X^{(j)} \in B_\rho,$$

сходится, если $\| L \|_\rho < 1$, т. е. при выполнении условия

$$|\mu| < \mu_\rho, \mu_\rho = (1 - a\rho) \Big(\sum_{l=-N}^{N} \| A_l \| (a + \rho^{-|l|})^{-1}. \quad (7)$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для системы разностных уравнений* (1) *выполнены неравенства* $\|A\| \leqslant a$, $\|A^{-1}\| \leqslant a$. *Тогда при* $|\mu| < \mu_\rho$, *где* $0 < \rho < a^{-1}$ *и* μ_ρ *задано в формуле* (7), *система разностных уравнений имеет частное решение вида* $X_n = \Phi(n, \mu) X_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *удовлетворяющее условию*

$$\| \Phi(n, \mu) \rho^{|n|} \| \leqslant \text{const}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений (2), *который сходится при* $|\mu| < \mu_\rho^*$.

Аналогично может быть доказана следующая теорема для нестационарной системы разностных уравнений.

Теорема 2. *Пусть для системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами*

$$X_{n+1} = A(n) X_n + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l(n) X_{n+l}, \det A(n) \neq 0, \quad (8)$$

выполнены при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *условия*

$$\sup_n \| A(n) \| \leqslant a, \quad \sup_n \| A^{-1}(n) \| \leqslant a, \quad \sup_n \| A_l(n) \| \leqslant \alpha_l.$$

Тогда при $|\mu| < \mu_\rho$, *где* $0 < \rho < a^{-1}$ *и* μ_ρ *определяется выражением*

$$\mu_\rho = (1 - a\rho) \Big(\sum_{l=-N}^{N} \alpha_l (a + \rho^{-|l|}) \Big)^{-1},$$

существует m-*мерное семейство решений системы* (8) $X_n = \Phi(n, \mu) X_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *удовлетворяющее условию* $\| \Phi(n, \mu) \rho^{|n|} \| \leqslant \text{const}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, где

$$X_n = \lim_{j \to \infty} X_n^{(j)}; X_{n+1}^{(0)} = A(n) X_n^{(0)},$$

$$X_{n+1}^{(j+1)} = A(n) X_n^{(j+1)} + \mu \sum_{l=-N}^{N} A_l(n) X_{n+l}^{(j)}, X_0^{(j+1)} = X_0.$$

3. Полученные результаты можно распространить на системы линейных разностных уравнений вида

$$X_{n+1} = AX_n + \mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l X_{n+1}, \det A \neq 0. \quad (9)$$

Из теоремы 1 предельным переходом при $N \to \infty$ получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для системы линейных разностных уравнений* (9) *выполнены условия*

$$\| A \| \leqslant a, \| A^{-1} \| \leqslant a, \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \| A_l \| (a\theta)^{|l|} < \infty, \theta > 1. \quad (10)$$

Тогда при $|\mu| < \mu_\rho$, *где*

$$\mu_\rho = (1 - \theta^{-1}) \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \| A_l \| (a + (a\theta)^{|l|}) \Big)^{-1}, \quad \rho = (a\theta)^{-1}; \quad \theta > 1,$$

существует m-мерное семейство решений системы (9) *вида*

$$X_n = \Phi(n, \mu) X_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

удовлетворяющее условию $\| \Phi(n, \mu) (a\theta)^{-|n|} \| \leqslant \mathrm{const}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Это решение может быть получено методом последовательных приближений $X_n = \lim\limits_{j \to \infty} X_n^{(j)}$, *где*

$$X_n^{(0)} = A^n X_0, X_{n+1}^{(j+1)} = AX_n^{(j+1)} + \mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l X_{n+l}^{(j)}, X_0^{(j+1)} = X_0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

который сходится при $|\mu| < \mu_\rho$.

Полученные результаты могут быть распространены на нелинейные системы разностных уравнений.

1. *Рябов Ю. А.* Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом: В 3-х т.— М. : Изд-во Ун-та дружбы народов, 1965.— Т. 3.— С. 153—164.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1963.— Т. 1.— С. 93—154.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Получено 26.06.91

УДК 513.83

Л. П. Плахта, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Когомологічні співвідношення для множин сингулярних точок дій групи Z/4 на $(S^n)^k$

Досліджені **Z**/2-градуйовані модулі когомологій з коефіцієнтами в полі $\mathbf{F}_2$ множин сингулярних точок кліткових дій групи **Z**/4 на просторах X, кільця когомологій яких ізоморфні $H^*((S^n)^k, \mathbf{F}_2)$.

Исследованы **Z**/2-градуированные модули когомологий с коэффициентами в поле $\mathbf{F}_2$ множеств сингулярных точек клеточных действий группы **Z**/4 на пространствах X, кольца когомологий которых изоморфны $H^*((S^n)^k, \mathbf{F}_2)$.

Нехай G — скінченна група, X — клітковий G-простір, Λ — комутативне кільце з одиницею. Група G індукує на градуйованому модулі $H^*(X, \Lambda)$ когомологій простору X структуру G-модуля. Сингулярними точками дії групи G на X будемо називати такі точки x простору X, для яких стабілізатор G_x не є тривіальною групою. В даній статті розглядаються дії циклічної групи **Z**/4 на кліткових просторах X, які мають кільце когомологій з коефіцієнтами в Λ, ізоморфне кільцю $H^*((S^n)^k, \Lambda)$ або кільцю $H^*((S^n) \times S^m, \Lambda)$, де $\Lambda = \mathbf{F}_2$ або $\Lambda = \mathbf{Z}$. Ми одержимо співвідношення для градуйованих модулів $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, \mathbf{F}_2)$, де $X^{\mathbf{Z}/2}$ — множина сингулярних точок дії групи **Z**/4 на просторі X. При цьому використовуються методи і результати,