УДК 513.83

**Л. П. Плахта**, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

# Когомологічні співвідношення для множин сингулярних точок дій групи $\mathbf{Z}/4$ на $(S^n)^k$

Досліджені $\mathbf{Z}/2$-градуйовані модулі когомологій з коефіцієнтами в полі $\mathbf{F}_2$ множин сингулярних точок кліткових дій групи $\mathbf{Z}/4$ на просторах $X$, кільця когомологій яких ізоморфні $H^*((S^n)^k, \mathbf{F}_2)$.

Исследованы $\mathbf{Z}/2$-градуированные модули когомологий с коэффициентами в поле $\mathbf{F}_2$ множеств сингулярных точек клеточных действий группы $\mathbf{Z}/4$ на пространствах $X$, кольца когомологий которых изоморфны $H^*((S^n)^k, \mathbf{F}_2)$.

Нехай $G$ — скінченна група, $X$ — клітковий $G$-простір, $\Lambda$ — комутативне кільце з одиницею. Група $G$ індукує на градуйованому модулі $H^*(X, \Lambda)$ когомологій простору $X$ структуру $G$-модуля. Сингулярними точками дії групи $G$ на $X$ будемо називати такі точки $x$ простору $X$, для яких стабілізатор $G_x$ не є тривіальною групою. В даній статті розглядаються дії циклічної групи $\mathbf{Z}/4$ на кліткових просторах $X$, які мають кільце когомологій з коефіцієнтами в $\Lambda$, ізоморфне кільцю $H^*((S^n)^k, \Lambda)$ або кільцю $H^*((S^n)\times S^m, \Lambda)$, де $\Lambda = \mathbf{F}_2$ або $\Lambda = \mathbf{Z}$. Ми одержимо співвідношення для градуйованих модулів $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, \mathbf{F}_2)$, де $X^{\mathbf{Z}/2}$ — множина сингулярних точок дії групи $\mathbf{Z}/4$ на просторі $X$. При цьому використовуються методи і результати, описані в монографіях Таммо том Діка [1] і Г. Бредона [2]. В даній статті ми використовуємо термінологію і позначення праць [1 — 3].

Наведемо необхідні означення і відомості з еквіваріантної теорії когомологій.

Нехай $p: EG \to BG$ — універсальне головне розшарування, де $G$ — скінченна група. Якщо $X$ — $G$-простір, $A$ — $G$-інваріантний підпростір, то через $(X_G, A_G)$ позначимо пару $(EG \times_G X, EG \times_G A)$, а через $p_X$ — розшарування з типовим шаром $X$, $p_X: (X_G, A_G) = (EG \times_G X, EG \times_G A) \to BG$. Далі нехай $H_G^*(X, \Lambda)$ — градуйований модуль (градуйована алгебра) еквіваріантних когомологій з коефіцієнтами в кільці $\Lambda$, тобто $H_G^*(X, \Lambda) \cong H^*(X, \Lambda)$. Крім того, $\Lambda = \mathbf{Z}$ або $\Lambda = \mathbf{F}_2$, де $\mathbf{F}_2$ — поле лишків за модулем 2. Градуйовану алгебру $H_G^*(X, A, \Lambda)$ можна розглядати як градуйований модуль над кільцем $H^*(BG, \Lambda)$, вводячи множення наступним чином. Нехай $x \in H^*(BG, \Lambda)$, $y \in H_G^*(X, A; \Lambda)$. Тоді $p_X^*(x) \in H_G^*(X, A; \Lambda)$. Покладемо $x \cdot y = p_X^*(x) \cdot y$, де «$\cdot$» — спарювання $H_G^*(X, A; \Lambda) \otimes H_G^*(X, A; \Lambda) \to H_G^*(X, A; \Lambda)$, яке визначається $\cup$-добутком [1]. Далі для довільного $b \in BG$ позначимо через $j_b: X \to EG \times_G X$, $x \to (b, x)$, включення типового шару над $b$ в тотальний простір $X_G$. Оскільки $EG$ — лінійно зв'язаний простір, то два довільні включення $j_b$, $j_a$ гомотопні і визначають в когомологіях гомоморфізм $j_b^*: H_G^*(X, A; \Lambda) \to H^*(X, A; \Lambda)$ для довільного $G$-інваріантного підпростору $A \subseteq X$.

Означення 1. *Будемо називати пару $(X, A)$ цілком $\Lambda$-негомологічною нулю, якщо гомоморфізм $j^*: H_G^*(X, A; \Lambda) \to H^*(X, A; \Lambda)$ сюр'єктивний.*

Означення 2. *Нехай $G$ — скінченна група, яка діє на просторі $X$. Точка $x \in X$ називається сингулярною, якщо стабілізатор $G_x$ її не є тривіальною групою.*

Позначимо через $X^G$ множину нерухомих точок дії групи $G$ на $X$. Далі будемо вживати позначення $X \sim_p Y$, якщо кільця когомологій $H^*(X, \mathbf{F}_p)$, $H^*(Y, \mathbf{F}_p)$ просторів $X$ і $Y$ ізоморфні, де $\mathbf{F}_p$ — поле лишків за простим модулем $p$. Відповідно будемо вживати запис $X \sim Y$, якщо кільця когомологій $H^*(X, \mathbf{Z})$, $H^*(Y, \mathbf{Z})$ ізоморфні.

Твердження 1. *Нехай $X \sim_2 (S^n)^k$ — клітковий $\mathbf{Z}/4$-простір, $X^{\mathbf{Z}/4} \neq \varnothing$ і група $\mathbf{Z}/4$ діє на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ тривіально. Тоді має місце ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів $H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2) \cong H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(BG, \mathbf{F})} {}_l\mathbf{F}_2$, де $\mathbf{Z}/2$ — підгрупа групи індекса 2, $x \in X^{\mathbf{Z}/4}$.*

Доведення. Нагадаємо, що $H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{Z}/2[t] \otimes \Lambda(\mathrm{s})$, де $\deg \mathrm{t} = 2$, $\deg \mathrm{s} = 1$, $\Lambda(\mathrm{s})$ — зовнішня алгебра з твірною s, а $\mathbf{Z}/2[\mathrm{t}]$ — кільце поліномів над $\mathbf{Z}/2$. Поле $\mathbf{F}_2$ можна розглядати як $\mathbf{Z}/2$-градуйовану алгебру, всі елементи якої сконцентровані в вимірі 0. Аналогічно алгебра $H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$ перетворюється в $\mathbf{Z}/2$-градуйовану алгебру $H^{(*)}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$, якщо степінь однорідного елемента $x \in H^i(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$ розглядати за модулем 2. Існує очевидний гомоморфізм $l: H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2) \to \mathbf{F}_2$ $\mathbf{Z}/2$-градуйованих алгебр, який відображає твірну $t$ кільця поліномів $\mathbf{F}_2[t] \cong H^{2*}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$ в $1 \in \mathbf{F}_2$, а $s$ посилає в 0. Нехай $S$ — мультиплікативна множина мономів $\{1, \mathrm{t}, \mathrm{t}^2, \ldots,\}$ кільця поліномів $\mathbf{F}_2[t]$. Гомоморфізм $l$, очевидно, продовжується до гомоморфізму $\eta: S^{-1}H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[t, t^{-1}] \otimes \Lambda(s) \to \mathbf{F}_2$, оскільки $l(t) = 1$. Отже, $\mathbf{F}_2$ можна розглядати як $\mathbf{Z}/2$-градуйований модуль над $S^{-1}H^{(*)}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$. Із теореми про локалізацію одержимо ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих алгебр [1]: $S^{-1}i: S^{-1}H^*_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2) \to S^{-1}H^*_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$, який індукується включенням $i: X^{\mathbf{Z}/2} \to X$. Зауважимо, що $X^{\mathbf{Z}/2}$ — множина сингулярних точок дії групи $\mathbf{Z}/4$ на $X$.

Далі розглянемо спектральну послідовність Лере — Серра для розшарування $(X_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4}) \xrightarrow{p} B\mathbf{Z}/4$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$, де $x \in X^{\mathbf{Z}/4}$. Маємо $H^p(B\mathbf{Z}/4, H^q(X, x, \mathbf{F}_2)) \to H^{p+q}(X_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4}; \mathbf{F}_2)$. Оскільки група $\mathbf{Z}/4$ діє на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ тривіально, то з теореми про універсальні коефіцієнти [1] випливає $E_2^{i,nl} \cong E_2^{i,0} \otimes E_2^{0,nl} \cong \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbf{F}_2$ для $1 \leqslant l \leqslant k$, $i \geqslant 0$ і $E_2^{i,j} = 0$ для всіх інших пар $(i, j)$. З мультиплікативних властивостей спектральної послідовності випливає, що всі диференціали $d_{n+1}: E_2^{p,q} = E_{n+1}^{p,q} \to E_h^{p+n+1,q-n} = E_2^{p+n+1,q-n}$ нульові. Оскільки дана спектральна послідовність вироджується і група $\mathbf{Z}/4$ діє на $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ тривіально, а $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ — вільний, скінченнопороджений $\mathbf{F}_2$-модуль, то пара $(X, x)$ цілком $\mathbf{F}_2$-негомологічна нулю в $(X_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4})$ і множина елементів $(x_\nu/\nu \in J)$, $x_\nu \in H^*_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2)$, таких, що $(j^* x_\nu/\nu \in J)$ утворює $\mathbf{F}_2$-базу в $H^*(X, x, \mathbf{F}_2)$, сама є базою $H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$-модуля $H^*_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2)$. Маємо наступний ланцюжок ізоморфізмів $\mathbf{Z}/2$-градуйованих алгебр

$$H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2) \oplus_{H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_l\mathbf{F}_2 \cong S^{-1} H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2 \otimes \otimes_{S^{-1}H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_\eta\mathbf{F}_2 \cong S^{-1} H^*_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{S^{-1}H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_\eta\mathbf{F}_2 \cong \cong H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_l\mathbf{F}_2. \quad (1)$$

Оскільки $H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$ є вільним $H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$-модулем, одержимо ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів

$$H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_l\mathbf{F}_2 \cong H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2). \quad (2)$$

З (1) і (2) випливає справедливість даного твердження. Зауважимо, що ізоморфізм (2) не обов'язково є ізоморфізмом $Z/2$-градуйованих алгебр.

Наслідок. *Нехай $X \sim {}_2(S^n)^k$ — кліткoвий $\mathbf{Z}/4$-простір, $X^{\mathbf{Z}/4} \neq \varnothing$ і група $\mathbf{Z}/4$ діє на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_2)$, $H^*(X^{\mathbf{Z}/2}, \mathbf{F}_2)$ тривіально. Тоді $\mathbf{Z}/2$-градуйовані модулі $H^*(X, x, \mathbf{F}_2)$, $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$ ізоморфні, де $x \in X^{\mathbf{Z}/4}$.*

Доведення. Оскільки пара $(X, x)$ цілком $F_2$-негомологічна нулю в $(X_{\mathbf{Z}/2}, x_{\mathbf{Z}/2})$, то $\mathrm{rk}\, H^*(X, x, \mathbf{F}_2) = \mathrm{rk} H^*(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$ [2]. Розглянемо спектральну послідовність Лере — Серра з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$ для розшарування $(X^{\mathbf{Z}/2}_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4}) \to B\mathbf{Z}/4$. З теореми про універсальні коефіцієнти [1] випливає $E_2^{2i+1,t} \cong E_2^{2i+1,0} \otimes E_2^{0,t}$, $t > 0$, і $E_2^{2j,t} \cong E_2^{2j,0} \otimes E_2^{0,t}$, $t > 0$. Крім того, $E_2^{2i+1,t} \cong \mathbf{st}^i \cdot E_2^{0,t}$ і $E_2^{2j,t} \cong \mathbf{t}^j \cdot E_2^{0,t}$, $t > 0$. З останніх співвідношень отримуємо рівність $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_2}(E_2^{*,*} \otimes_{H^*(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} \mathbf{F}_2) = \mathrm{rk}_{\mathbf{F}_2} H^*(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$. Далі, з твердження 1 випливає наступна рівність: $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_2}(H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes {}_l\mathbf{F}_2) = \mathrm{rk}_{\mathbf{F}_2}(H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2))$. Отже, дана спектральна послідовність вироджується і тому пара $(X^{\mathbf{Z}/2}, x)$ цілком $\mathbf{F}_2$-негомологічна нулю в $(X^{\mathbf{Z}/2}_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4})$. З останнього факту випливає ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів:

$$H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^{(*)}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_l\mathbf{F}_2 \cong H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2).$$

Таким чином, $\mathbf{Z}/2$-градуйовані модулі $H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2)$, $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$ ізоморфні.

Нехай $M$ — скінченний $\mathbf{Z}$-модуль. Позначимо через $\exp M$ найменше число $n \in \mathbf{Z}$, для якого $nx = 0$ при всіх $x \in M$.

Зауважимо, що у випадку парного $n$ і тривіальної дії групи $\mathbf{Z}/4$ на гомологіях $H_*(X, \mathbf{Z})$ кліткового простору $X$, де $X \sim (S^n)^k$, множина сингулярних точок $X^{\mathbf{Z}/2}$ не є порожньою. Дійсно, припустимо протилежне. Тоді група $\mathbf{Z}/4$ діє на $X$ вільно. Простий підрахунок показує, що $\prod_{j \geqslant 1} \exp H^{j+1}(B\mathbf{Z}/4, H_j(X, \mathbf{Z})) = 1$. Остання рівність суперечить теоремі 1.1 В. Браудера [3], з якої випливає, що порядок групи $\mathbf{Z}/4$ повинен ділити число $\prod_j \exp H^{j+1}(B\mathbf{Z}/4, H_j(X, \mathbf{Z}))$.

Розглянемо тепер дії групи $\mathbf{Z}/4$ на просторі $X \sim {}_2S^m \times S^n$, де $m \geqslant n$. Нагадаємо, що $H^*(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[s]$, де $\deg s = 1$.

Твердження 2. *Нехай $X \sim {}_2S^m \times S^n$ — клітковий $\mathbf{Z}/4$-комплекс, $X^{\mathbf{Z}/4} \neq \varnothing$ і група $\mathbf{Z}/4$ діє на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_2)$, $H^*(X^{\mathbf{Z}/2}, \mathbf{F}_2)$ тривіально, а $x \in X^{\mathbf{Z}/4}$. Тоді або $\mathbf{Z}/2$-градуйовані модулі когомологій $H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2)$, $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$ ізоморфні, або $X^{\mathbf{Z}/2} \sim {}_2S^q$ для деякого числа $q$.*

Доведення. Розглянемо дві спектральні послідовності $E$, $E'$ Лере — Серра для розшарування $(X_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4}) \xrightarrow{p} B\mathbf{Z}/4$ з коефіцієнтами відповідно в $\mathbf{F}_2$ і в $\mathbf{Z}$, а також спектральну послідовність Лере — Серра $U$ для розшарування $(X_{\mathbf{Z}/2}, x_{\mathbf{Z}/2}) \xrightarrow{\rho} B\mathbf{Z}/2$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$. Припустимо, що спектральна послідовність $E$ не вироджується, тобто в ній є ненульові диференціали. З мультиплікативних властивостей спектральної послідовності $E$ випливає, що перший такий диференціал є $d = d_{m-n+1} : E_{m-n+1}^{0,m} \to E_{m-n+1}^{m-n+1,n}$. Враховуючи ізоморфізм $E_2^{*,*} \simeq E_{m-n+1}^{*,*}$, можна зробити висновок, що диференціал $d$ має вигляд

$$d : H^0(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2) \otimes H^n(X, x, \mathbf{F}_2) \to H^{m-n+1}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2) \otimes H^n(X, x, \mathbf{F}_2).$$

Нехай $d(1 \otimes b) = A \otimes a$, де $a, b \neq 0$ і $A \in H^{m+n-1}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)$, $A \neq 0$. Диференціал $d$ індукується диференціалом $d'$ цілочисельної спектральної послідовності $E'$. Оскільки $H^i(B\mathbf{Z}/4, H^n(X, x, \mathbf{Z})) = 0$ при непарних $i$, то $(m-n)$ — непарне число і $d(1 \otimes b) = \mathbf{t}^r \otimes a$, де $r = (m-n+1)/2$. Далі, диференціал $d_1 : U_{m-n+1}^{0,m} \to U_{m-n+1}^{m-n+1,n}$ спектральної послідовності $U$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$ пропускається через диференціал $d : E_{m-n+1}^{0,m} \to E_{m-n+1}^{m-n+1,n}$, тобто $d_1 = \varphi^* d$, де $\varphi^*$ — гомоморфізм, $\varphi^* : E_{m-n+1}^{m-n+1,n} \to U_{m-n+1}^{m-n+1,n}$, що індукується канонічним відображенням $\varphi : B\mathbf{Z}/2 \to B\mathbf{Z}/4$. Оскільки група $\mathbf{Z}/2$ діє тривіально на когомологіях $H^*(X, x, \mathbf{F}_2)$, то з теореми про універсальні коефіцієнти [1] отримуємо співвідношення $U_2^{i,j} \cong H^i(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2) \otimes H^j(X, x, \mathbf{F}_2)$, $i, j \geqslant 0$. Очевидно, що $\varphi^*(\mathbf{t}^r \otimes a) = s^{2r} \otimes a$, $s^{2r} \otimes a \in H^{2r}(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2) \otimes H^n(X, x, \mathbf{F}_2)$, де $s$ — твірна кільця поліномів $\mathbf{F}_2[s] \cong H^*(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2)$. Отже, спектральна послідовність $U^{*,*}$ не вироджується і перший ненульовий диференціал $d_1$ в ній має вигляд $d_1 : H^0(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2) \otimes H^m(X, x, \mathbf{F}_2) \to H^{m-n+1}(B\mathbf{Z}/2, \mathbf{F}_2) \otimes H^n(X, x; \mathbf{F}_2)$, $d_1(1 \otimes b) = s^{2r} \otimes a$. Далі отримаємо $d_1(s^i \otimes b) = s^{2r+i} \otimes a$. Таким чином, два рядки спектральної послідовності $U^{*,*}$ анулюються, а рядок $U_2^{*,n+m}$ доживає до $U_\infty^{*,n+m}$. Звідси випливає що $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_2} H^*(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) = 1$, і тому $X^{\mathbf{Z}/2} \sim {}_2S^q$ для деякого числа $q$.

Розглянемо тепер випадок, коли спектральна послідовність $E$ для розшарування $(X_{\mathbf{Z}/4}, x_{\mathbf{Z}/4}) \to B\mathbf{Z}/4$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$ вироджується. З доведення твердження 1 випливає наступний ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів:

$$H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2) \cong H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^{(*)}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_\iota\mathbf{F}_2.$$

Далі, з доведення наслідку твердження 1 легко отримати ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів $H^{(*)}_{\mathbf{Z}/4}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^{(*)}(B\mathbf{Z}/4, \mathbf{F}_2)} {}_\iota\mathbf{F}_2 \cong H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$. З останніх двох співвідношень одержимо ізоморфізм $\mathbf{Z}/2$-градуйованих модулів $H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_2) \cong H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2)$.

Нехай $p$ і $q$ — взаємно прості непарні числа, $q/p - 1$, а $(\mathbf{Z}/p)^*$ — мультиплікативна група одиниць кільця $\mathbf{Z}/p$. Ін'єктивний гомоморфізм $\varphi : \mathbf{Z}/q \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/p) \cong (\mathbf{Z}/p)^*$ задає напівпрямий добуток групи $\mathbf{Z}/p$ на групу $\mathbf{Z}/q$, який позначається $\mathbf{Z}/p \leftthreetimes \mathbf{Z}/q$. Група $\mathbf{Z}/p \leftthreetimes \mathbf{Z}/q = G$ містить нормальну підгрупу $\mathbf{Z}/p$ індексу $q$. Відомо, що кільце поліномів $\mathbf{F}_p[u]$ ізоморфне кільцю когомологій $H^*(B\mathbf{Z}/p \leftthreetimes \mathbf{Z}/q, \mathbf{F}_p)$, де $u \in H^{2q}(BG, \mathbf{F}_p)$. Для групи $G = \mathbf{Z}/p \leftthreetimes \mathbf{Z}/q$ має місце аналог твердження 2. Ми подамо тільки формулювання аналогічного твердження, оскільки його доведення аналогічне доведенню твердження 2.

Твердження 3. *Нехай* $X \sim {}_pS^m \times S^n$ — *клітковий* $G$-*комплекс*, $X^G \neq \varnothing$, *і група* $G$ *діє на когомологіях* $H^*(X, \mathbf{F}_p)$, $H^*(X^{\mathbf{Z}/p}, \mathbf{F}_p)$ *тривіально, а* $x \in X^G$. *Тоді або* $\mathbf{Z}/2q$-*градуйовані модулі* $H^{(*)}(X, x, \mathbf{F}_p)$ *і* $H^{(*)}(X^{\mathbf{Z}/p}, x, \mathbf{F}_p)$ *над* $\mathbf{F}_p$ *ізоморфні, або* $X^{\mathbf{Z}/p} \sim {}_pS^r$ *для деякого числа* $r$.


1. *Tammo tom Dieck*. Transformation groups.— New York : Gruyter, 1987.— 312 p.
2. *Бредон Г*. Введение в теорию компактных групп преобразований.— М. : Наука, 1980.— 440 с.
3. *Browder W*. Cohomology and group actions // Invent. math.— 1983.— **71**.— P. 599—607.


Одержано 23.03.92