УДК 517.51

М. М. Чип, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

Способи побудови узагальнених моментних зображень многочленного виду

Алгебраїчні многочлени, які входять в узагальнене моментне зображення заданої числової послідовності, пропонується шукати у вигляді лінійних комбінацій ортогональних многочленів. Коефіцієнти цих лінійних комбінацій обчислюються з системи алгебраїчних рівнянь, шукані многочлени задовольняють інтегральні та диференціальні рівняння.

Алгебраические многочлены, входящие в обобщенное моментное представление заданной числовой последовательности, предлагается искать в виде линейных комбинаций ортогональных многочленов. Коэффициенты этих линейных комбинаций вычисляются из системы алгебраических уравнений, искомые многочлены удовлетворяют интегральным и дифференциальным уравнениям.

Розвиток теорії наближень Паде, а також теорії інтегральних зображень функцій приводить до необхідності запропонованого в [1] узагальнення класичної проблеми моментів, яке сформулюємо в такому вигляді. Нехай задано деяку послідовність $\{s_n\}_0^\infty \subset \mathbb{C}$, проміжок $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ і на ньому неспадну функцію $\mu(x)$ з нескінченною кількістю точок росту. Потрібно знайти дві послідовності $\{a_k(x)\}_0^\infty$ і $\{b_l(x)\}_0^\infty$ лінійно незалежних функцій з простору $\mathbf{L}_2[(a, b) : d\mu(x)]$, щоб

$$s_{k+l} = \int_a^b a_k(x)\, b_l(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Для побудови поліномів Паде, а також для одержання асимптотичної формули похибки наближення в [2] запропоновано будувати деяку біортогональну систему функцій. Якщо послідовності $\{a_k(x)\}_0^\infty$ і $\{b_l(x)\}_0^\infty$ є послідовностями алгебраїчних многочленів степенів k і l відповідно, то [3] шукану біортогональну систему будуть утворювати многочлени, які ортогональні на проміжку (a, b) з мірою $d\mu(x)$.

Зображення (1) у випадку

$$a_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{\nu k} x^\nu, \quad b_l(x) = \sum_{j=0}^{l} \beta_{jl} x^j \tag{2}$$

будемо називати моментним зображенням многочленного виду. Одержаний в [2] критерій існування такого зображення стверджує, що матриця

$$H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

© М. М. ЧИП, 1992

при кожному $n = 0, 1, 2, \ldots$ є невиродженою. Для знаходження коефіцієнтів многочленів (2), покладаючи

$$\int_a^b x^n d\mu(x) = \sigma_n.$$

з (1) одержуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{\nu k} \sum_{j=0}^{l} \beta_{jl} \sigma_{\nu+j} = s_{k+l}.$$

В даній статті запропоновано інші способи п обудови многочленів (2) які сприятимуть подальшому дослідженню їх властивостей.

Теорема. *Нехай $\{P_n(x)\}_0^\infty$ — послідовність многочленів, ортонормованих на проміжку (a, b) з мірою $d\mu(x)$. Покладемо*

$$a_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} c_{\nu k} P_\nu(x), \quad b_l(x) = \sum_{j=0}^{l} d_{jl} P_j(x). \tag{4}$$

Тоді: 1) *коефіцієнти лінійних комбінацій знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь*

$$\sum_{i=0}^{n} c_{ik} d_{il} = s_{k+l}, \quad n = \min(k, l); \tag{5}$$

2) *послідовності $\{a_k(x)\}_0^\infty$, $\{b_l(x)\}_0^\infty$ задовольняють інтегральне рівняння*

$$y(x) = \int_a^b K_m(x; t)\, y(t)\, d\mu(t), \tag{6}$$

в якому при кожному $m = k$ чи $m = l$ покладено

$$K_m(x; t) = \sum_{i=0}^{m} P_i(x) P_i(t); \tag{7}$$

3) *при умові $d\mu(x) \leqslant \mu'(x)\, dx$, причому*

$$\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)} = \frac{r_0 + r_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2},$$

послідовності $\{a_k(x)\}_0^\infty$ і $\{b_l(x)\}_0^\infty$ задовольняють диференціальне рівняння

$$B(x)\, y''(x) + [A(x) + B'(x)]\, y'(x) = Q_m(x), \tag{8}$$

в якому

$$B(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2, \quad A(x) = p_0 + p_1 x,$$
$$Q_m(x) = \sum_{i=1}^{m} i\,[p_1 + (i+1)\, q_2]\, q_{im} P_i(x), \tag{9}$$

де $q_{im} = c_{\nu k}$ чи $q_{im} = d_{jl}$ при кожному $m = k$ чи $m = l$ відповідно.

Доведення. Існування співвідношень (4) випливає з того, що в силу (2) коефіцієнти $c_{\nu k}$ та d_{jl} задовольняють деякі системи лінійних алгебраїчних рівнянь трикутного вигляду, в яких $\alpha_{kk} \neq 0$ та $\beta_{ll} \neq 0$. Їх одержують, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x та враховуючи явний вигляд ортонормованих многочленів.

Система (5) випливає з (1) і (4) при врахуванні умов ортонормованості; її розв'язуємо послідовно при $n = 0, 1, 2, \ldots$ і однозначно, задаючи значення однієї з послідовностей $\{c_{kk}\}_0^\infty$ чи $\{d_{ll}\}_0^\infty$.

Встановимо для $\{a_k(x)\}_0^\infty$ інтегральне рівняння вигляду (6). Для цього домножимо обидві частини першого із співвідношень (4) на $P_\nu(x)$ при кожному $\nu = 0, 1, 2, \dots, k$ і проінтегруємо на проміжку (a, b) з мірою $d\mu(x)$. Враховуючи умови ортонормованості, одержуємо

$$c_{\nu k} = \int_a^b a_k(t) P_\nu(t)\, d\mu(t). \tag{10}$$

Підставляючи (10) в перше із співвідношень (4) та враховуючи (7), одержуємо (6).

Диференціальне рівняння вигляду (8) для $\{a_k(x)\}_0^\infty$ встановлюємо шляхом диференціювання першого із співвідношень (4) двічі по x та використання [3] з позначеннями (9) при кожному $\nu = 1, 2, \dots, k$, тотожностей

$$B(x) P_\nu''(x) + [A(x) + B'(x)] P_\nu'(x) \equiv \nu [p_1 + (\nu + 1) q_2] P_\nu(x).$$

Аналогічно встановлюємо (6) і (8) для $\{b_l(x)\}_0^\infty$.

Наслідки. 1. *Співвідношення* (5) *дозволяє обчислити визначник* $d(H_n)$ *матриці* H_n, *записаної в* (3).

Справді, покладемо

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{01} & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{0n} & c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишемо співвідношення (5) в матричному виді $C_n D_n = H_n$. Використовуючи теорему про визначник добутку двох матриць та обчислюючи визначники матриць C_n і D_n, звідси одержуємо $d(H_n) = \prod_{i=0}^{n} c_{ii} d_{ii}$, а для власних значень λ_i матриці H_n при кожному $i = 0, 1, 2, \dots, n$ знаходимо $\lambda_i = c_{ii} d_{ii}$.

2. *Коефіцієнти лінійних комбінацій* (4) *є лінійними комбінаціями членів послідовності* $\{s_n\}_0^\infty$.

Справді, покладаючи $P_\nu(t) = \sum_{i=0}^{\nu} e_{i\nu} b_i(t)$, з (10), враховуючи (1), одержуємо $c_{\nu k} = \sum_{i=0}^{\nu} e_{i\nu} s_{k+i}$. Аналогічне співвідношення встановлюємо для коефіцієнтів d_{jl}.

Використання результатів загальної теорії ортогональних многочленів, а також їх окремих видів, зокрема класичних, веде до глибшого вивчення властивостей розглядуваних моментних зображень.

1. *Дзядык В. К.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде // Укр. мат. журн.— 1983.— 35. № 3.— С. 297—302.
2. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— С. 3—15.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М. : Наука, 1979.— 416 с.

Одержано 09.01.92