УДК 517.5

В. Р. Кравчук, канд. фіз.-мат. наук (Тернопіл. пед. ін-т)

Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій

Показана можливість застосування запропонованого В. К. Дзядиком способу побудови раціональних функцій, які здійснюють близьке до найкращого наближення цілих елементарних функцій. Даний спосіб можна назвати лінійним в тому розумінні, що всі коефіцієнти раціональних функцій визначаються з двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Показана возможность применения предложенного В. К. Дзядыком способа построения рациональных функций, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение целых элементарных функций. Данный способ можно назвать линейным в том смысле, что все коэффициенты рациональных функций определяются из двух систем линейных алгебраических уравнений.

В роботі [1] викладений наступний спосіб раціональної апроксимації функцій.

Нехай $y(x)$, $x \in [-h, h]$, $h > 0$,— розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами або ж функція, яку на $[-h, h]$ можна задати рядом Фур'є—Чебишева. При заданих натуральних n і m, використовуючи A-метод [2] (або ж ряд Фур'є—Чебишева, якщо він відомий), будуємо многочлен $y_{n+2m}(x)$, який наближає функцію $y(x)$. Нехай далі $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени, що задовольняють рівняння

$$y_{n+2m}(x)\, Q_m(x) = P_n(x) + \sum_{j=n+m+1}^{n+3m} \tau_j T_j(x/h),$$

в якому τ_j — деякі параметри і $T_j(\xi) = \cos j \arccos \xi$ — многочлени Чебишева степеня j. Після цього утворюємо раціональну функцію $P_n(x)/Q_m(x) =: R_{n,m}(x) = R_{n,m}(y; x)$.

Як показують одержані нижче результати, даний спосіб дозволяє для ряду функцій $y(x)$ будувати раціональні функції $R_{n,m}(y; x)$, які здійснюють їх наближення, близьке до найкращого.

1. Раціональна апроксимація функції e^x, $x \in [-h, h]$, $h > 0$, порядку $(n, 1)$. **Теорема.** *Нехай* $y_{n+2}(x) = \sum_{j=0}^{n+2} c_j x^j$ *— многочлен, побудований за A-методом для наближення функції e^x, $x \in [-h, h]$, $h > 0$* [3], *а $P_n(x)$ і $x + a$ — многочлени, які задовольняють рівняння*

$$y_{n+2}(x)(x + a) = P_n(x) + \tau_{n+2} T_{n+2}(x/h) + \tau_{n+3} T_{n+3}(x/h). \qquad (1)$$

Тоді для раціональної функції $R_{n,1}(x) := P_n(x)/(x + a)$ справедлива асимптотична рівність

$$\| e^x - R_{n,1}(x) \|_{C_{[-h,h]}} = O(1/n))\, E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}},$$

де $E_{n,1}(f)_{C_{[-h,h]}}$ — величина найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$, $x \in [-h, h]$, раціональними функціями порядку $(n, 1)$.

Доведення. Перш за все відмітимо, що згідно з A-методом многочлен $y_{n+2}(x)$ є розв'язком операторного рівняння

$$y_{n+2}(x) = \int_0^x y_{n+2}(t)\, dt + 1 - \tau T_{n+3}\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in [-h, h], \qquad (2)$$

побудованого, виходячи з інтегрального рівняння Вольтерри

$$y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + 1, \quad x \in [-h, h],$$

розв'язком якого є функція e^x. Наведемо необхідні нам в подальшому співвідношення [3]

$$e^x - y_{n+2}(x) = \tau\left(T_{n+3}\left(\frac{x}{h}\right) - \int_0^x e^{x-t} T_{n+3}\left(\frac{t}{h}\right) dt\right), \ x \in [-h, h], \tag{3}$$

$$\left|\int_0^x e^{x-t} T_{n+3}\left(\frac{t}{h}\right) dt\right| < \frac{he^h}{n+4}, \quad x \in [-h, h], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$\tau = \left(\sum_{j=0}^{n+3} j!\, t_j/h^j\right)^{-1} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{2}{(n+3)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+3}, \tag{5}$$

де t_j, $j = \overline{0, n+3}$, — коефіцієнти многочлена Чебышева $T_{n+3}(\xi) = \sum_{j=0}^{n+3} t_j \xi^j$.

Порівнюючи коефіцієнти при трьох найвищих степенях x в рівняннях (1) і (2), одержуємо систему з шести рівнянь з невідомими a, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, τ_{n+2}, τ_{n+3}. Роз'язуючи її, знаходимо

$$\begin{gathered} a = -(n+1) - h^2/(2n+4), \quad \tau_{n+3} = (n+3)\tau, \\ \tau_{n+2} = \frac{2\tau(n+3)(n+2+a)}{h} = \frac{2\tau(n+3)}{h}\left(1 - \frac{h^2}{2n+4}\right), \end{gathered} \tag{6}$$

де параметр τ обчислюється за формулою (5). При відомих a, τ_{n+2}, τ_{n+3} многочлен $P_n(x)$ легко знаходиться з рівняння (1).

Оцінимо величину $\| e^x - R_{n,1}(x) \|_{C_{[-h,h]}}$. Виходячи з рівнянь (1) і (3) і враховуючи співвідношення (6), маємо

$$\begin{gathered} e^x - R_{n,1}(x) = e^x - y_{n+2}(x) + y_{n+2}(x) - R_{n,1}(x) = \\ = \tau\left(T_{n+3}\left(\frac{x}{h}\right) - \int_0^x e^{x-t} T_{n+3}\left(\frac{t}{h}\right) dt + \frac{2(n+3)(n+2+a)}{h(x+a)} T_{n+2}\left(\frac{x}{h}\right) + \right. \\ \left. + \frac{n+3}{x+a} T_{n+3}\left(\frac{x}{h}\right)\right) = \frac{2\tau(n+3)(n+2+a)}{h(x+a)}\left(T_{n+2}\left(\frac{x}{h}\right) + \varphi_n\right) = \\ = -2\tau(1+\alpha_n)(T_{n+2}(x/h) + \varphi_n)/h, \end{gathered} \tag{7}$$

де при натуральних $n > (h+1)^2 e^h$, $x \in [-h, h]$

$$\begin{gathered} |\varphi_n| = |\varphi_n(x; h)| := \left| \frac{h(n+3+a+x)}{2(n+3)(n+2+a)} T_{n+3}\left(\frac{x}{h}\right) + \right. \\ \left. + \frac{h(x+a)}{2(n+3)(n+2+a)} \int_0^x e^{x-t} T_{n+3}\left(\frac{t}{h}\right) dt \right| < \frac{h(h+2)}{n+3} + \frac{h^2 e^h}{2n+6} < 1 \end{gathered} \tag{8}$$

$$|\alpha_n| = |\alpha_n(x; h)| := \left| -\frac{(n+3)(n+2+a)}{x+a} - 1 \right| < \frac{h+2}{n+1-h}. \tag{9}$$

Оскільки при натуральних $n > (h+1)^2 e^h$ в усіх точках сегмента $[-h, h]$ виконується нерівність $|\varphi_n| < 1$, то згідно з (7) різниця $e^x - R_{n,1}(x)$ в $n+3$ екстремальних точках многочлена Чебишева $T_{n+2}(x/h)$: $s_k = -h\cos(k\pi/(n+2))$, $k = \overline{0, n+2}$, приймає значення з переміжними знаками. Тому на основі теореми Валле Пуссена і співвідношення (7) при $n > (h+1)^2 e^h$, виконуються нерівності

$$E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}} \geqslant \min_{0\leqslant k\leqslant n+2} | e^{s_k} - R_{n,1}(s_k) | \geqslant \frac{2|\tau|(1-|\varphi_n|)(1-|\alpha_n|)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tau| \leqslant \frac{hE_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}}}{2(1-|\varphi_n|)(1-|\alpha_n|)} . \qquad (10)$$

З другого боку, на основі співвідношення (7) при кожному натуральному $n > (h+1)^2 e^h$ справедлива нерівність

$$\| e^x - R_{n,1}(x) \|_{C_{[-h,h]}} \leqslant \frac{2(1+|\varphi_n|)(1+|\alpha_n|)}{h} |\tau|. \qquad (11)$$

З двох останніх нерівностей випливає, що при $n > (h+1)^2 e^h$

$$\| e^x - R_{n,1}(x) \|_{C_{[-h,h]}} \leqslant \frac{(1+|\varphi_n|)(1+|\alpha_n|)}{(1-|\varphi_n|)(1-|\alpha_n|)} E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}},$$

або $$\| e^x - R_{n,1}(x) \|_{C_{[-h,h]}} = (1+O(1/n)) E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}}.$$

Теорема доведена.

Зауваження. З нерівностей (10) і (11) випливає справедливість рівності

$$E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}} = (1+O(1/n))\, 2|\tau|/h.$$

Тому, враховуючи співвідношення (5), одержуємо

$$E_{n,1}(e^x)_{C_{[-h,h]}} = \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{2}{(n+3)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}.$$

2. Раціональна апроксимація функцій $\sin x$, $\cos x$, $x\in[-h,h]\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $x\in[-h,h]\subset[-1,1]$. Нехай $f(x)$, $x\in[-h,h]$, — одна з вказаних функцій. Для описаних побудованим вище способом раціональних функцій $R_{n,2}(f;x)$ (n має ту ж парність, що й відповідна функція) справедливі рівності

$$\| f(x) - R_{n,2}(f;x) \|_{C_{[-h,h]}} = \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) E_{n,2}(f)_{C_{[-h,h]}}.$$

На завершення відмітимо, що одержані в цій статті результати були раніше значно більш громіздким способом одержані автором в [4].

1. *Дзядык В. К.* А-метод и рациональная аппроксимация // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 3.— С. 250—252.
2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка. 1988.— 303 с.
3. *Дзядык В. К.* Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, $\sin x$ и др. // Укр. мат. журн.— 1973.— 225, № 4.— С. 435—453.
4. *Кравчук В. Р.* Об эффективном приближении элементарных функций рациональными функциями порядка (n, 1) // Там же.— 1985.— 37, № 2.— С. 175—180.

Одержано 11.02.92